LUND UNIVERSITY

Numerisk beräkning av temperaturförlopp : ett fysikaliskt betraktelsesätt

Eftring, Bengt

1990

Link to publication

Citation for published version (APA):
Eftring, B. (1990). *Numerisk beräkning av temperaturförlopp : ett fysikaliskt betraktelsesätt*. [Doktorsavhandling (monografi), Byggnadskonstruktion]. Byggforskningsrådet (BFR).

Total number of authors:
1

General rights
Unless other specific re-use rights are stated the following general rights apply:
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.
• Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
• You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
• You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Read more about Creative commons licenses: https://creativecommons.org/licenses/

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

LUND UNIVERSITY

PO Box 117
221 00 Lund
+46 46-222 00 00

Rapport R81:1990

Numerisk beräkning av temperaturförlopp

Ett fysikaliskt betraktelsesätt

B Eftring

Byggforskningsrådet

R81:1990

NUMERISK BERÄKNING AV TEMPERATURFÖRLOPP

Ett fysikaliskt betraktelsesätt

Bengt Eftring

Denna rapport hänför sig till forskningsanslag 890293-6 från Statens råd för byggnadsforskning till Lunds tekniska högskola, Lund.

REFERAT

Rapporten är ett resultat av erfarenheter från två decenniers arbete med utveckling av beräkningsmodeller och genomförande av omfattande beräkningsarbeten inom projekt gällande tjälnedträngning i mark, värmebalans i byggnader och lagring av värme i mark.

Grundläggande problem vid beräkning av temperaturförlopp i fasta material är bland annat gitter- och tidsstegsval, sneda ränder, randvillkor och temperaturberoende termiska egenskaper (speciellt frysning).

Rapporten beskriver en beräkningsteknik som till sin formulering direkt anknyter till det fysikaliska förloppet. Detta gör metoden lättöverskådlig och utvecklingsbar för olika typer av komplikationer.

Tidsskala och geometrisk räckvidd är karakteristiska egenskaper för ett temperaturförlopp. Det visas hur dessa egenskaper på ett naturligt sätt resulterar i ett recept på gitterstruktur. Kunskap om grundläggande processers tidsskala och räckvidd kan vidare användas för att förenkla ett beräkningsproblem.

Det visas hur cellstrukturen kan anpassas till olika former på beräkningsområdet. Speciellt visas hur sneda ränder kan hanteras i en Cartesisk gitterstruktur och hur randvärmemotstånd därvid behöver korrigeras.

Ett problem vid temperaturberoende termiska egenskaper är hur värmeflödet genom en cellrand skall beräknas då värmeledningsförmågan är en funktion av temperaturen. Problemet kan elimineras genom val av en ny temperaturskala.

Tillämpningar redovisas för fall med frysning i mark och för fall med värmelagring i ett vattenfyllt bergrum där man har en komplicerad konvektiv/diffusiv process i bergrummet och en ren diffusiv process i det omgivande berget. Den termiska processen i bergrummet ges, genom antaganden om tidsskalor för olika delprocesser, en starkt förenklad beskrivning. Erhållna beräkningsresultat stämmer väl överens med mätresultat från såväl modellförsök som fullskaleanläggningar.

I Byggforskningsrådets rapportserie redovisar forskaren sitt anslagsprojekt. Publiceringen innebär inte att rådet tagit ställning till åsikter, slutsatser och resultat.

Denna skrift är tryckt på miljövänligt, oblekt papper.

R81:1990

ISBN 91-540-5249-1
Statens råd för byggnadsforskning, Stockholm

gotab Stockholm 1990

INNEHÅLL

FÖRORD vii

SAMMANFATTNING viii

1 INLEDNING 1
1.1 Fysikalisk principbeskrivning av lösningsmetoden 3
1.2 Exempel på beräkningsgång 9

2 TERMISKA GRUNDBEGREPP 11
2.1 Värmekapacitet 11
2.2 Värmeledningsförmåga 12
2.3 Konduktans och värmemotstånd 13
2.3.1 Plan geometri 13
2.3.2 Plan radiell geometri 17
2.3.3 Allmänt varierande tvärsnittsyta 18
2.3.4 Temperaturberoende värmeledningsförmåga 20

3 VÄRMELEDNINGSEKVATIONEN I DISKRET OCH I KONTINUERLIG FORM 21
3.1 Endimensionellt förlopp 21
3.2 Tvådimensionellt förlopp 24
3.3 Tredimensionellt förlopp 27
3.4 Allmänna ortogonala koordinater 28
3.5 Dimensionslös formulering 33
3.6 Icke-ortogonal cellstruktur 34
3.7 Superpositionsprincipen 37

4 LÖSNING BASERAD PÅ ENERGIBALANSER 43
4.1 Cellstruktur och termiska data 43
4.2 Lösningsmetodens princip 44
4.2.1 Iterationsförfarande 45
4.2.2 Termiska komplikationer 48
4.3 Beräkningsuttryck för värmeflöde genom en cellrand 48
4.3.1 Plan geometri 48
4.3.2 Cylindergeometri 51
4.3.3 Sfärisk geometri 52
4.3.4 Allmänna ortogonala koordinater 52
4.4 Den lokala temperaturfördelningen 53
4.4.1 Temperaturfördelning i en cell 53
4.4.2 Temperaturfördelning mellan två cellers temperaturpunkter 54
4.5 Schematisk bild av en värmeströmningskrets 55

5 STABILITETSTIDSSTEG 59
5.1 Längsta tidssteg för en cell 59
5.1.1 Tidsskala för en cell. Fysikalisk betraktelse 59
5.1.2 Stabilitetstidssteg. Egenskap hos differensekvationen 62
5.2 Stabilitetstidsstegets längd 63
5.2.1 Stabilitetstidssteg i olika gitterstrukturer 63
5.2.2 Stabilitetstidssteg vid givet randvärmeflöde 65
5.3 Tidsstegets betydelse för lösningen 66

6 VAL AV GITTER OCH TIDSSTEG 71
6.1 Några karakteristiska egenskaper hos lösningsmetoden 71
6.2 Grundläggande delprocess. Temperatursteg vid rand 77
6.2.1 Gitterstruktur och tidsskala 77
6.2.2 Plant fall 79
6.2.3 Hörn 84
6.3 Grundläggande delprocess. Periodisk randtemperatur 85
6.3.1 Gitterstruktur 85
6.4 Stationär temperaturfördelning 90
6.4.1 Platta på mark. Given randtemperatur 90
6.4.2 Platta på mark. Givet randvärmeflöde 94
6.5 Beräkning där varje gittercell följer sin egen tidsskala 97
6.6 Exempel på gitterval 98

7 BEHANDLING AV RANDVILLKOR 103
7.1 Given temperatur eller givet värmeflöde 103
7.2 Värmekälla i randytan. Ekvivalent omgivningstemperatur 105
7.3 Långvågigt strålningsutbyte vid randytor 106
7.3.1 Bakgrundsstrålning vid randyta 109
7.3.2 Slutet hålrum 110
7.4 Beräkningsområde med obegränsad utsträckning 111
7.5 Tidsberoende randvillkor 113
7.5.1 Given temperatur eller givet värmeflöde 113
7.5.2 Övergångsmotstånd mellan fluid och fast yta 114
7.6 Fluidströmning längs en kanal 115
7.6.1 Endimensionell strömning längs en kanal. Stationär beskrivning ... 115
7.6.2 Transient beskrivning 116

8 ANPASSNING MELLAN GITTER OCH OMRÅDESRÄNDER 117
8.1 Sned rand i en Cartesisk cellstruktur 117
8.1.1 Yttre områdesrand 117
8.1.2 Inre rand mellan delområden 120
8.2 Val av koordinatsystem 123
8.2.1 Allmänna ortogonala koordinater 123
8.2.2 Konform avbildning 124
8.3 Triangulära celler 126
8.3.1 Triangulärt cellsystem 126
8.3.2 Rektangulära och triangulära celler 128

9 RUMSLIGT VARIERANDE TERMISKA EGENSKAPER. GITTER 133
9.1 Endimensionellt halvoändligt område 133
9.2 Flerdimensionellt område 138

10 INFORMATIVA ANALYTISKA LÖSNINGAR 141
10.1 Inträngningsdjup i en randytas normalriktning 141
10.1.1 Temperatursteg 141
10.1.2 Periodisk temperatur 144
10.2 Inträngningsdjup under isoleringskant 146
10.2.1 Temperatursteg 146
10.2.2 Periodisk temperatur 148
10.3 Global räckvidd för ett system 149
10.3.1 Punktkälla och dipol 150
10.3.2 Linjekälla 151
10.4 Insvängningstider 152
10.4.1 Temperatursteg vid skiva 152
10.4.2 Temperaturavklingning i delvolym 155
10.5 Temperatursteg vid hörn 157
10.6 Platta på mark 159
10.6.1 Given randtemperatur 159
10.6.2 Givet randvärmeflöde 161

11 FÖRENKLINGSVÄGAR 163

12 FRYSNING. TEMPERATURBEROENDE TERMISKA EGENSKAPER 169
12.1 Värmeledningsförmåga 169
12.2 Värmekapacitet 171
12.3 Frysning 172
12.3.1 En cells värmeinnehåll 173
12.3.2 Värmeflöde genom en cellrand 174
12.4 Jämförelse mellan analytisk och numerisk lösning 176
12.5 Introduktion av temperaturskalan $T_\lambda(T)$ 179
12.5.1 Numerisk hantering av T_λ-ekvationen 180
12.5.2 Diskontinuitet i randen mellan två olika material 184
12.6 Tillämpningar 186
12.6.1 Tjälnedträngning i mark runt hus 186
12.6.2 Frysning runt rör i mark 188
12.6.3 Djupa markvärmesystems påverkan på tjälningsprocessen nära markytan 190

13 VÄRMETRANSPORT I ETT VATTENFYLLT BERGRUM 193
13.1 Konvektiv-diffusiv värmetransport i en fluid 193
13.2 Konvektiv-diffusiv värmetransport i ett poröst material 194
13.3 Termisk dispersion 196
13.4 Numerisk dispersion 197
13.5 Teknik att undvika numerisk dispersion 199
13.6 Värmetransport i och utanför ett vattenfyllt bergrum 200
13.6.1 Den lokala processen i bergrummet 200
13.6.2 Den globala processen i den omgivande marken 201
13.7 Tillämpningar 202
13.7.1 Datormodell 202
13.7.2 Jämförelse med en laboratoriemodell av ett blockfyllt bergrum 203
13.7.3 Jämförelse med en vattentank i Ingelstad 205
13.7.4 Jämförelse med ett bergrumslager i Avesta 206
13.7.5 Jämförelse med ett gropmagasin i Stuttgart 207
13.7.6 Beräkning av ett bergrumslager i Skarvik 209

14 KORT OM ANDRA NUMERISKA LÖSNINGSMETODER 211

15 ANDRA PROCESSER MED PARABOLISK DIFFERENTIAL-
EKVATION 215

16 REFERENSER 219

FÖRORD

Arbetet bakom föreliggande skrift har utförts vid Institutionen för Byggnadskonstruktionslära och Institutionen för Teoretisk fysik, avdelningen för matematisk fysik vid Lunds Tekniska Högskola. Arbetet initierades i slutet av 60-talet av professor Bo Adamson, Byggnadskonstruktionslära. Vid denna institution utfördes arbete först inom ett projekt gällande tjälnedträngning i mark runt byggnader och därefter inom ett projekt gällande värmebalans i byggnader. I slutet av 70-talet initierade docent Johan Claesson, Matematisk fysik, ett projekt gällande värmelagring i mark.

Rapporten är ett resultat av övergripande erfarenheter från dessa projekt beträffande utveckling av beräkningsmodeller och genomförande av omfattande beräkningar. Projekten har finansierats av Statens Byggforskningsråd, Nämnden för energiproduktionsforskning samt Statens Energiverk.

Författaren vill rikta ett tack till Bo Adamson och samtliga övriga medarbetare i de olika projektgrupperna för många berikande meningsutbyten. Jag vill här speciellt nämna och tacka Johan Claesson, som med aldrig sviktande energi ställt upp på talrika intensiva diskussioner om stort och smått beträffande rapportens innehåll och uppläggning.

Jag vill även rikta ett tack till Pia Bruhn och Ewa Westberg, Matematisk fysik, vilka på ett tidigt stadium flitigt arbetade med ordbehandlaren innan den blev mitt eget verktyg. Till sist ett stort tack till Hans Follin, Byggnadskonstruktionslära, som utfört ett omfattande arbete med rapportens figurer.

Lund i augusti 1990

Bengt Eftring

SAMMANFATTNING

Rapporten är ett resultat av erfarenheter från två decenniers arbete med utveckling av beräkningsmodeller och genomförande av omfattande beräkningsarbeten inom projekt gällande tjälnedträngning i mark, värmebalans i byggnader och lagring av värme i mark.

Grundläggande problem vid beräkning av temperaturförlopp i fasta material är bland annat gitter- och tidsstegsval, sneda ränder, randvillkor och temperaturberoende termiska egenskaper (speciellt frysning).

Rapporten beskriver en beräkningsteknik som till sin formulering direkt anknyter till det fysikaliska förloppet. Detta gör metoden lättöverskådlig och utvecklingsbar för olika typer av komplikationer.

Tidsskala och geometrisk räckvidd är karakteristiska egenskaper för ett temperaturförlopp. Det visas hur dessa egenskaper på ett naturligt sätt resulterar i ett recept på gitterstruktur. Kunskap om grundläggande processers tidsskala och räckvidd kan vidare användas för att förenkla ett beräkningsproblem.

Det visas hur cellstrukturen kan anpassas till olika former på beräkningsområdet. Speciellt visas hur sneda ränder kan hanteras i en Cartesisk gitterstruktur och hur randvärmemotstånd därvid behöver korrigeras.

Ett problem vid temperaturberoende termiska egenskaper är hur värmeflödet genom en cellrand skall beräknas då värmeledningsförmågan är en funktion av temperaturen. Problemet kan elimineras genom val av en ny temperaturskala.

Tillämpningar redovisas för fall med frysning i mark och för fall med värmelagring i ett vattenfyllt bergrum där man har en komplicerad konvektiv/diffusiv process i bergrummet och en ren diffusiv process i det omgivande berget. Den termiska processen i bergrummet ges, genom antaganden om tidsskalor för olika delprocesser, en starkt förenklad beskrivning. Erhållna beräkningsresultat stämmer väl överens med mätresultat från såväl modellförsök som fullskaleanläggningar.

Kapitel 1

INLEDNING

Föreliggande skrift behandlar huvudsakligen numerisk beräkning av transient värmeledning i fasta material. Framställningen omfattar bland annat gitter- och tidsstegsval, sneda ränder, randvillkor och temperaturberoende termiska egenskaper (speciellt frysning). I den redovisade beräkningsmetoden eftersträvas fysikalisk enkelhet vid beskrivningen av det termiska förloppet. Vidare behandlas olika vägar att förändra beskrivningen av en given problemställning så att man får ett enklare problem att lösa. De redovisade betraktelsesätten tillämpas bland annat vid beräkning av det komplicerade konduktiva/konvektiva förlopp som uppstår vid värmelagring i vattenfyllda bergrum.

Framställningen behandlar inte beräkning av stationär temperaturfördelning även om sådana beräkningar i några fall redovisas. Dessa har då utförts med en metod med överrelaxation.

Framställningen behandlar inte andra numeriska lösningsmetoder som kan användas vid beräkning av tidsberoende förlopp. Dock redovisas resultat från referenser avseende jämförelser av beräkningstid och minnesbehov för olika beräkningsmetoder.

Viktiga resultat redovisas inom följande områden:

- gitterstrukturens koppling till den studerade termiska processens tidsskala vilket resulterar i ett recept på gitterstorlekar
- sneda ränder i förhållande till använd gitterstruktur. Korrigering av motståndsvärde vid en sned rand
- olika cellgeometrier
- temperaturberoende termiska egenskaper, speciellt frysning
- beräkningsmetodens koppling till det studerade förloppets fysikaliska principer möjliggör en lättöverskådlig och utvecklingsbar beräkningsmetod
- förenkling av ett problem med hjälp av ingående processers tidsskalor och geometriska räckvidder

Beräkning av termiska förlopp kan medföra olika typer av komplikationer. Bland sådana kan nämnas komplicerad geometri, olika tidsskalor för de inblandade processerna samt icke-konstanta termiska egenskaper i beräkningsområdet (omfattande såväl rums-, tids- som temperaturberoende egenskaper). Vissa problemställningar kan lösas med analytiska metoder, men i det allmänna fallet är man hänvisad till numeriska metoder i kombination med datoranvändning.

Tillgång till datorer med "obegränsat minnesutrymme och med obegränsad snabbhet" skulle förenkla situationen. Fysiska begränsningar av datorkapaciteten innebär emellertid alltid gränser för hur exakt den numeriska beskrivningen av ett problem kan göras. Detta innebär att numerisk lösning av ett termiskt problem i allmänhet omfattar en avvägning av minnesanvändning och tidsåtgång vid datorberäkningen.

Vid ett specifikt problem kan en reduktion av datorkapacitetsbehovet för lösningens genomförande ha avgörande betydelse för tillämpningen. Vid realtidsstyrning av ett system kan beräkningssnabbheten vara direkt avgörande för styrningens funktion. I styrprogram för till exempel hela energisystem har man av detta skäl tidskrav på beräkningen av varje ingående del.

Denna skrift bygger på erfarenheter från två decenniers forskningsarbete innebärande utveckling av beräkningsmodeller för olika termiska processer. Arbetet har till största delen bedrivits inom en forskargrupp som, under olika perioder, finansierats av Statens Byggforskningsråd, Nämnden för energiproduktionsforskning och Statens energiverk. Erfarenheterna har lett till betraktelsesätt vilka varit effektiva vid beskrivningen av system med stor komplikationsgrad.

Framställningen presenterar kärnpunkterna i dessa betraktelsesätt och ger en systematisk sammanfattning av dem. Detta medför att, för läsare med erfarenhet inom området, framställningen i vissa delar är övertydlig. Skälet till detta är att framställningen även skall kunna läsas som en introduktion till området.

Det traditionella sättet att lösa ett värmetransportproblem är att utgå från värmeledningsekvationen $C\partial T/\partial t = \nabla \cdot (\lambda \nabla T)$. Bakgrunden till denna ekvation är en uppställd värmebalans för en kontrollvolym där man använder linjära, experimentellt fastlagda samband vid beskrivningen av värmeflödet genom kontrollvolymens ränder. Denna formulering, vilken gäller för den betraktade kontrollvolymen, omformas genom en limesövergång till att gälla momentan värmebalans för en punkt.

Med den erhållna värmeledningsekvationen kan i princip alla termiska problem i fasta material formuleras. Vid termiska problem som även omfattar konvektion krävs ytterligare en ekvation för att beskriva massabalansen i en punkt. För vissa problemställningar finns analytiska lösningar. Där sådana saknas kan lösningar ändå erhållas genom att på ekvationen tillämpa metoder som utvecklats inom området numerisk analys. Dessa metoder innebär, grovt sett, att man diskretiserar ingående derivator i värmeledningsekvationen. Med hjälp av olika konstgrepp skapas numeriska lösningsmetoder med olika egenskaper vad beträffar till exempel konvergens, instabilitet, ovillkorlig stabilitet (som dock i allmänhet är förknippad med svängningar i lösningen, vilket i alla fall introducerar tidsstegsbegränsningar). Studiet av dessa egenskaper ingår i ämnet numerisk analys och har ingen direkt koppling till fysiken i det problem som skall lösas.

En nackdel med datorprogram som bygger på avancerade numeriska principer är att användare, vilka har god fysikalisk insikt men saknar överblick inom området numerisk analys, endast kan hantera programmen som "svarta lådor" där förändringar kan vara svåra att införa. Det kan även vara svårt för användaren att bedöma beräkningsmodellens begränsningar. En utmärkt numerisk metod kan sålunda resultera i ett verktyg med oavsiktligt begränsad användbarhet och med dålig utvecklingsbarhet vid förändrade problemställningar.

Numerisk beräkning av ett termiskt förlopp innebär i allmänhet att förloppet beskrivs tidpunkt för tidpunkt. Om den termiska processens tillstånd är känt vid en viss tidpunkt så medför det i framställningen redovisade betraktelsesättet att bestämningen av processens tillstånd vid nästa tidpunkt enbart görs med värden från den kända tid-

punkten. Den fysikaliska anknytningen är uppenbar. Förloppets mätbara egenskaper i ett visst ögonblick avgör processens tillstånd ett ögonblick senare.

Avståndet mellan de tidpunkter vid vilka processen beskrivs beror på processens karaktär. Om den betraktade processen är tidsoberoende sker inga ytterligare förändringar från ett känt tillstånd. Inga ytterligare beräkningar behövs. Om processen är tidsberoende påverkas tidpunktsavståndet av hur tidsvariationen sker. Det är till exempel uppenbart att, vid ett periodiskt förlopp, tidpunkterna måste ligga tätare om periodlängden är 1 sekund än om den är 1 år.

En viktig del i det redovisade betraktelsesättet är studium av olika enkla grundprocesser. Väsentliga egenskaper för grundprocesser är deras tidsskalor och geometriska räckvidder. Räckvidden beskriver utsträckningen av den volym inom vilken grundprocessen har betydelse. Vid beräkning av en termisk process kan anpassning till egenskaper hos ingående grundprocesser medföra stora förenklingar och effektivitetsvinster.

Avsikten med framställningen är inte att behandla andra lösningsmetoder, vilka förvisso har sina avgjorda fördelar i vissa situationer. Det grundläggande syftet är att visa att även komplicerade termiska processer kan hanteras på ett enkelt, effektivt och anpassningsbart sätt om lösningsmetoden binds till det fysikaliska förloppet. Man erhåller en konkret och i allmänhet lättbegriplig beräkningsmetod vilket, i många situationer, gör den till en enkel och utvecklingsbar metod. Detta kan ha avgörande betydelse vid många typer av tillämpningar.

Datorprogram enligt den beskrivna metoden har utvecklats under lång tid för olika problemställningar. Den forskargrupp, inom vilken författaren varit verksam, har till exempel utvecklat stora datormodeller över system för värmetransport till och från marken. Systemen, vars funktion huvudsakligen gäller långtidslagring av värme i marken, omfattar bland annat berg rumsvärmelager [*Eftring, 1984*], borrhålsvärmelager [*Hellström, 1984*] och akvifervärmelager (lagring av värme i grundvattenförande skikt i marken) [*Hellström et al., 1984*]. Organisationen IEA (International Energy Agency) utförde under mitten av 1980-talet en internationell utvärdering av tillgängliga datormodeller för de beskrivna systemen. Organisationen valde i samtliga fall de av gruppen utvecklade programmen för vidare användning inom organisationens ram [*IEA, 1983, s 39*] och [*IEA, 1989*]. De tre modellerna kategoriserades som "the best available ones". Ett skäl till modellernas framgång är att den använda metodens grundläggande enkelhet gör det möjligt att beskriva förlopp, som innehåller många typer av komplikationer.

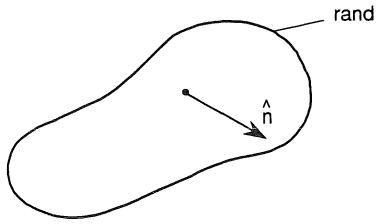
För gruppens senaste generation datorprogram, vilka avser ren konduktion i fasta material, hänvisas till [*Blomberg*].

1.1 Fysikalisk principbeskrivning av lösningsmetoden

I en volym pågår en värmeledningsprocess (figur 1.1.1). Det fysikaliska förloppet bestäms av en värmeströmning inom volymen. Ändring av värmeinnehållet i en punkt medför att dess temperatur T (°C) förändras.

För den givna volymen bestäms den termiska processen av temperaturen i volymen vid någon starttidpunkt (begynnelsevillkor) och av temperaturer eller värmeflöden längs volymens ränder (randvillkor) från och med starttidpunkten. Experimentellt har man funnit att värmeflödet q_n (W/m^2) i riktningen $\hat{n}$ i en punkt bestäms av Fouriers lag:

$$q_n = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \tag{1.1.1}$$

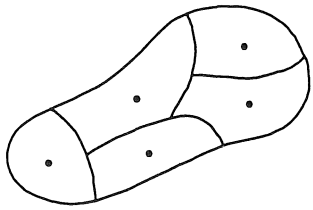


Figur 1.1.1. Volym med en värmeledningsprocess.

Det fysikaliska förloppet inom volymen kan, med önskad noggrannhet, bestämmas genom temperaturmätning i punkter som ligger tillräckligt tätt intill varandra. Den momentana värmetransporten inom volymen kan, med kännedom om temperaturfältet, beräknas enligt formel (1.1.1).

Volymindelning

Den betraktade volymen delas in i delvolymer enligt figur (1.1.2).



Figur 1.1.2. Indelning i delvolymer med temperaturpunkter.

För delvolymerna gäller:

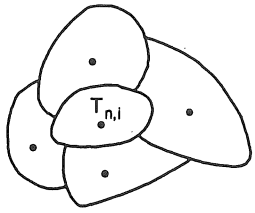
- En delvolyms värmeinnehåll definieras av ett enda temperaturvärde i en temperaturpunkt inom delvolymen
- Temperaturpunkterna måste ligga så tätt inom den betraktade volymen att värmetransporten inom volymen kan beskrivas tillräckligt korrekt enligt formel (1.1.1)

Låt $T_i(t_0)$ beteckna temperaturen i delvolym i vid begynnelsetidpunkten t_0. Enligt förutsättningarna är $T_i(t_0)$ kända för alla i. Problemet är nu att för varje i bestämma temperaturen vid nästa tidpunkt t_1.

Metoden innebär att $T_i(t_1)$ beräknas som om allt baserades på fysiska observationer vid tiden t_0. Med kända $T_i(t_0)$ kan värmeflödet genom samtliga delvolymers ränder beräknas. Randflödena betraktas som konstanta för $t_0 \leq t \leq t_1$. För varje delvolym kan nettoinflödet av värme under ett tidssteg från tidpunkten t_0 till tidpunkten t_1 bestämmas och därmed kan dess nya temperatur beräknas. Processen kan upprepas tidssteg efter tidssteg.

Tidsstegsval

Antagandet om oförändrat värmeflöde genom en delvolyms ränder efter tidpunkten t_0 medför att tidpunkten t_1 inte kan väljas fritt. Betrakta en delvolym i och dess omgivande delvolymer. Se figur 1.1.3.



Figur 1.1.3. En delvolym och dess omgivning.

Vid tidpunkten t_0 är samtliga temperaturer kända. Vid bestämningen av ny temperatur i den betraktade cellen i påverkas denna nya temperatur inte av förändringar i de omgivande delvolymernas temperatur. Den nya temperaturen i cell i skall vara fysikaliskt korrekt även om de omgivande delvolymernas temperaturer hålls oförändrade för $t \geq t_0$.

Om delvolym i får variera fritt mot de låsta omgivningstemperaturerna kommer dess temperatur T_i att asymptotiskt närma sig en sluttemperatur T_{ekv} vilken bestäms bland annat av temperaturpunkternas lägen i berörda delvolymer och av de konstanta temperaturerna i de omgivande delvolymerna. Se kapitel 5 för en mer detaljerad beskrivning.

Det är av termodynamiska skäl inte rimligt att, med det förenklade antagandet om oförändrade värmeflöden efter tidpunkten t_0, en numeriskt beräknad temperatur T_i skulle tillåtas passera det korrekta temperaturvärdet T_{ekv}. Man skulle erhålla ett fysikaliskt ogrundat svängningsförlopp.

Med konstant värmeflöde genom delvolymens rand kommer dess temperatur att ändras linjärt med tiden. Lutningen bestäms av tangenten till den asymptotiska kurvan vid tidpunkten t_0. Den tidpunkt $t_{1,max}$ vid vilken den räta linjens värde är T_{ekv} definierar hur långt fram tidpunkten t_1 maximalt kan ligga utan att man erhåller en fysikaliskt omöjlig lösning. Detta största värde beror endast av temperaturpunkternas

lägen och av de termiska egenskaperna i området.

Storheten $t_{1,max} - t_0$ definierar den betraktade delvolymens maximala tidssteg.

Översiktlig lösningsmetod

Metoden att numeriskt beräkna processen tidpunkt för tidpunkt kan summariskt sammanfattas på följande sätt:

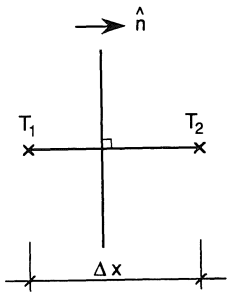
1. bestäm begynnelsetemperaturerna
2. bestäm randvillkor för aktuell tidpunkt
3. bestäm värmeflödet genom varje rand
4. bestäm ackumulerat värmetillskott till varje delvolym under det betraktade tidssteget. Det nya värmeinnehållet i varje delvolym bestämmer deras respektive temperaturer i slutet av det betraktade tidssteget
5. om sluttid ej uppnådd: hoppa till 2

Krav på delvolymerna

Den redovisade metoden eftersträvar fysikalisk enkelhet. Värmeflödet genom en randdel skall beräknas på enklaste sätt.

- Värmeflödet q_n i riktning $\hat{n}$ ges av $q_n = -\lambda \partial T/\partial n$. Temperaturgradienten $\partial T/\partial n$ kan enklast beräknas med hjälp av två temperaturpunkter.
- Flödet skall beräknas i en riktning som är vinkelrät mot randdelen. Flödet bestäms till sin riktning av temperaturgradienten vilken beräknas med hjälp av ovan nämnda temperaturpunkter. Sammanbindningslinjen mellan de två temperaturpunkterna måste skära randdelen under rät vinkel. Se figur 1.1.4. Man har:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{rand} \approx \frac{T_2 - T_1}{\Delta x} \tag{1.1.2}$$



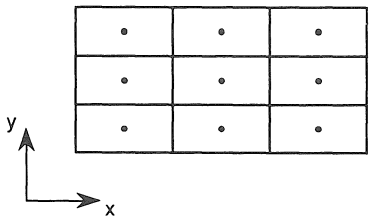
Figur 1.1.4. Temperaturpunkter vid en randdel.

Om sammanbindningslinjen mellan temperaturpunkterna inte bildar rät vinkel mot randdelen kommer man att lösa en ekvation som avviker från värmeledningsekvationen. Se avsnitt 3.6.

Exempel på delvolymer

Några huvudtyper av delvolymer som uppfyller villkoren ovan ges av:

- Delvolymernas ränder är parallella med koordinatplanen i ett Cartesiskt koordinatsystem. Se figur 1.1.5 som ger exempel på delvolymer i ett tvådimensionellt fall.



Figur 1.1.5. Tvådimensionella Cartesiska delvolymer.

- Delvolymernas ränder sammanfaller med ytor som definieras av att en koordinat är konstant i ett allmänt ortogonalt koordinatsystem.

- Delvolymerna utgör *spetsvinkliga* trianglar. Temperaturpunkten i en triangel ligger i mittpunktsnormalernas skärningspunkt. Kravet på spetsvinklighet medför att temperaturpunkten ligger inne i triangeln.

En fördel med de två första delvolymstyperna är att man i ett datorprogram snabbare kan lokalisera en delvolyms omgivande temperaturpunkter.

Metoder att hantera delvolymers olika maximala tidssteg

Man kan särskilja några olika situationer vid indelningen i delvolymer.

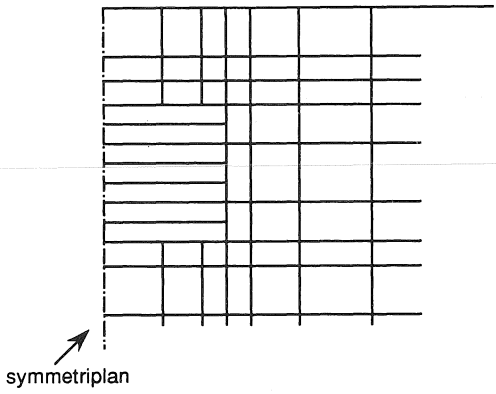
- Beräkningsområdet består av en enda "delvolym" vars maximala tidssteg är Δt_1. Temperaturen i området beräknas i tur och ordning för tidpunkterna $t_0 + n \cdot \Delta t_1$, $n = 1,2,3...$

- Beräkningsområdet består av flera delvolymer med olika maximala tidssteg. Man har två olika grundprinciper:

1. Alla delvolymer beräknas med ett tidssteg Δt_{min} som bestäms av delvolymen med det kortaste maximala tidssteget. Alla delvolymers temperatur beräknas för tidpunkterna $t_0 + n \cdot \Delta t_{min}$, $n = 1,2,3...$
2. Varje delvolym beräknas i enlighet med sin egen tidsskala, det vill säga med ett tidssteg i samma storleksordning som dess maximala tidssteg. För en närmare beskrivning hänvisas till avsnitt 6.5. Med denna metod att organisera beräkningen kan antalet beräknade delvolymtemperaturer reduceras kraftigt om beräkningsvolymen omfattar delvolymer med stor skillnad på de maximala tidsstegen.

Separata delvolymbeskrivningar

En delvolym kan ha en inre struktur som helt avviker från övriga delvolymer. Ett exempel på detta är till exempel den volymstruktur, som använts vid beräkning av temperaturförlopp i ett vattenfyllt bergrum. Marken har delats in i en delvolymstruktur med hjälp av ett tredimensionellt Cartesiskt koordinatsystem. De delvolymer som beskriver bergrummets volym har slagits ihop till en egen delvolym för hela bergrummet. Denna bergrumsdelvolym har sedan delats in i ett nytt system delvolymer med hjälp av ett endimensionellt vertikalt Cartesiskt koordinatsystem. Se figur 1.1.6.



Figur 1.1.6. Delvolymer med separat beskrivning.

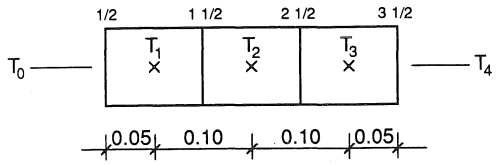
Med den beskrivna indelningen kan man enligt ovan ha olika beräkningstidsskalor i och utanför bergrummet. Vid beräkningen av värmeflödet mellan olika delvolymer är det väsentligt att en noggrann energikonservation iakttas.

1.2 Exempel på beräkningsgång

Ett temperaturförlopp skall beräknas för en kropp som är 0.3 m lång och vars tvärsnittsyta är 0.01 m^2. Materialets värmeledningsförmåga λ är 3 (W/mK). Dess värmekapacitet är $2 \cdot 10^6$ (J/m^3K). Kroppens långsidor är totalisolerade varför ingen värmetransport sker genom dem.

Vid tiden $t = 0$ är kroppens begynnelsetemperatur 0 °C. Vid tider $t \geq 0$ har de båda kortsidorna temperaturerna 100 respektive 0 $°C$. Man erhåller en endimensionell temperaturprocess i materialet mellan de två kortsidorna.

De grundläggande principerna för beräkningsmetoden skall visas för ett fall där beräkningsområdet delats in i tre delvolymer. Se figur 1.2.1.



Figur 1.2.1. Område med tre delvolymer.

Delvolymerna numreras 1, 2 och 3. Deras ränder numreras enligt figuren. Vid randen 1/2 är randtemperaturen $T_0 = 100$ och vid randen 3 1/2 är randtemperaturen $T_4 = 0$ °C. Varje delvolym har längden 0.1 m och tvärsnittsytan 0.01 m^2. Delvolymernas temperaturpunkter ligger i deras respektive mittpunkter.

Värmetransporten i den betraktade kroppen beskrivs av värmeflödet genom de olika cellränderna. Enligt (1.1.1-2) kan värmeflödet vinkelrätt genom en cellrand i-1/2 approximativt beräknas som $K_{i-1/2} \cdot (T_{i-1} - T_i)$ där $K_{i-1/2}$ (W/K) är kopplingskonduktansen mellan temperaturpunkterna $i - 1$ och i. Man har i det betraktade exemplet:

$$K_{1/2} = K_{3\,1/2} = \frac{3 \cdot 0.01}{0.01/2} = 0.6$$

$$K_{1\,1/2} = K_{2\,1/2} = \frac{3 \cdot 0.01}{0.01} = 0.6$$

Nettovärmeflödet till en delvolym i under ett tidssteg förändrar dess temperatur med ett belopp som bestäms av cellens värmekapacitet $C_i = 0.01 \cdot 0.1 \cdot 2 \cdot 10^6 = 2000$ (J/K). Förloppet i den betraktade kroppen skall beräknas för tidpunkterna $t = 2000, 4000, \ldots$. Vid tiden $t = 0$ gäller för det totala värmeflödet Q (W) genom de olika ränderna:

$$Q_{1/2} = (T_0 - T_1) \cdot K_{1/2} = (100 - 0) \cdot 0.6 = 60$$

$$Q_{1\,1/2} = Q_{2\,1/2} = Q_{3\,1/2} = 0$$

De nya temperaturerna vid tidpunkten $t = 2000$ s ges av:

$$T_1 = 0 + (Q_{1/2} - Q_{1\,1/2}) \cdot 2000/C_1 = 60$$

$$T_2 = T_3 = 0$$

Vid tidpunkten $t = 2000$ s gäller:

$$Q_{1/2} = (100 - 60) \cdot 0.6 = 24$$

$$Q_{1\,1/2} = (60 - 0) \cdot 0.3 = 18$$

$$Q_{2\,1/2} = Q_{3\,1/2} = 0$$

Vid tidpunkten $t = 4000$ s ges de nya temperaturerna av:

$$T_1 = 60 + (24 - 18) \cdot 2000/2000 = 66$$

$$T_2 = 0 + (18 - 0) \cdot 2000/2000 = 18$$

$$T_3 = 0$$

Temperaturförloppet kan följas genom att förfarandet upprepas tidpunkt efter tidpunkt. Man erhåller en temperaturfront som vandrar in i den betraktade kroppen. Vid tiden $t = 2000$ s är temperaturen i delvolymerna 2 och 3 opåverkade. Vid tiden $t = 4000$ s är delvolym 3 fortfarande opåverkad. Man har ett transient temperaturförlopp med ett inträngningsdjup som är beroende av den betraktade tidpunkten.

Temperaturfördelningen går mot en stationär slutfördelning, vilken karakteriseras av att nettovärmeflödet in till varje delvolym är noll. Det totala värmeflödet genom varje cellrand är 10 W. Det sker inga ytterligare temperaturförändringar inom den betraktade volymen. Den transienta delen av temperaturförloppet har klingat av.

Kapitel 2

TERMISKA GRUNDBEGREPP

För att en värmetransportprocess skall kunna beskrivas i ekvationsform måste några elementära grundbegrepp definieras.

2.1 Värmekapacitet

Låt dT (K) vara den temperaturförändring som inträffar då en liten värmemängd dE (J) tillförs en massenhet av ett ämne. Värmekapaciteten c per massenhet, (J/(kgK)), definieras av:

$$dE = cdT \tag{2.1.1}$$

Värmekapaciteten c beror allmänt sett på under vilka förhållanden värmetillskottet sker. Om värmetillskottet sker under konstant tryck betecknas värmekapaciteten c_p. Om processen äger rum vid konstant volym betecknas värmekapaciteten c_v. För luft gäller sambandet:

$$\frac{c_p}{c_v} = 1.40 \tag{2.1.2}$$

För vatten har man:

$$\frac{c_p}{c_v} = 1.001 \tag{2.1.3}$$

Det höga värdet är karakteristiskt för gaser. Värdet nära ett är karakteristiskt för vätskor och fasta material. I rapporten betraktas framför allt fasta och, i viss mån, flytande material. För dessa försummas i allmänhet skillnaden mellan c_p och c_v och den allmänna beteckningen c används. Angivna värden avser värmetillförsel vid konstant tryck.

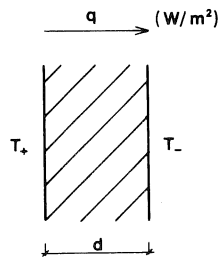
I den fortsatta framställningen kommer i allmänhet värmebalansen för olika volymer att behandlas. För en volymsenhet av ämnet gäller:

$$dE = \rho cdT = CdT \tag{2.1.4}$$

Ämnets volumetriska värmekapacitet betecknas C (J/(m^{3}K)).

2.2 Värmeledningsförmåga

Figur 2.2.1 visar ett skikt av ett homogent, fast material. Skiktets tjocklek är d (m). Temperaturskillnaden över skiktet är $T_+ - T_-$ (°C). Det stationära, endimensionella värmeflödet per ytenhet genom skivan betecknas q (W/m^2). Man finner experimentellt att värmeflödet är direkt proportionellt mot temperaturdifferensen och omvänt proportionellt mot skiktets tjocklek.



Figur 2.2.1. Stationärt värmeflöde genom ett homogent skikt.

Man har:

$$q = \lambda \frac{T_+ - T_-}{d} \tag{2.2.1}$$

Värmeflödet q definieras positivt i riktning från sidan med temperaturen T_+ till sidan med T_-. Proportionalitetsfaktorn λ är materialets värmeledningsförmåga. Dess dimension är (W/mK) eller (W/m^2)/(K/m).

Uttrycket (2.2.1) kan tillämpas på godtyckligt tunna skikt. Låt den endimensionella temperaturfördelningen i ett material vara $T(x,t)$. Genom ett tunt skikt mellan x och $x + \Delta x$ är värmeflödet $q(x,t)$, där $q(x,t)$ är positivt i x-axelns riktning. Flödet $q(x,t)$ kan approximativt beskrivas med det stationära uttrycket (2.2.1). Man erhåller:

$$q(x,t) \simeq \lambda \frac{T(x,t) - T(x+\Delta x,t)}{\Delta x} \tag{2.2.2}$$

I gränsen, när Δx går mot noll, övergår (2.2.2) exakt i uttrycket:

$$q(x,t) = -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \tag{2.2.3}$$

Detta är Fouriers lag för endimensionell värmetransport. I en direkt generalisering till det allmänna fallet i tre dimensioner ges Fouriers lag av:

$$\vec{q} = (q_x, q_y, q_z) \tag{2.2.4}$$

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

I komponentform erhålls:

$$q_x(x,y,z,t) = -\lambda \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x}$$

$$q_y(x,y,z,t) = -\lambda \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y} \tag{2.2.5}$$

$$q_z(x,y,z,t) = -\lambda \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z}$$

2.3 Konduktans och värmemotstånd

Härledningen av värmeledningsekvationen grundar sig på att temperaturen varierar linjärt genom ett tunt skikt. Den tidsberoende värmetransporten mellan två punkter i ett material kan i varje ögonblick approximativt beskrivas som stationär om punkterna ligger tillräckligt nära varandra. Detta kommer till användning i den valda metoden att beräkna värmetransporten i ett material. Formler för värmeflöde och temperaturfördelning vid stationära förhållanden skall ges för några olika fall.

Figur 2.2.1 visar ett snitt genom en homogen, plan skiva med ytan A m^2. Enligt formel (2.2.1) kan sambandet mellan temperaturdifferensen $T_+ - T_-$ över skivan och det totala värmeflö- det Q (W) genom den skrivas:

$$T_+ - T_- = RQ \tag{2.3.1}$$

Skivans totala värmemotstånd betecknas R (K/W). Man har:

$$R = \frac{d}{\lambda A} \tag{2.3.2}$$

Sambanden (2.3.1-2) kan även formuleras som:

$$Q = K(T_+ - T_-) \tag{2.3.3}$$

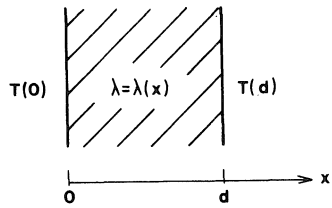
$$K = A\frac{\lambda}{d}$$

Skivans totala konduktans betecknas K (W/K).

2.3.1 Plan geometri

Figur 2.3.1 visar ett tvärsnitt genom en plan skiva med varierande värmelednings-

förmåga $\lambda = \lambda(x)$.



Figur 2.3.1. Plan skiva med varierande värmeledningsförmåga.

Det stationära värmeflödet q (W/m^2) genom skivan är av kontinuitetsskäl oberoende av x. I analogi med formel (2.2.3) gäller:

$$q = -\lambda(x)\frac{dT}{dx} \tag{2.3.4}$$

På differentialform kan detta skrivas:

$$q\frac{dx}{\lambda(x)} = -dT \tag{2.3.5}$$

Formeln uttrycker sambandet att värmeflödet genom ett skikt multiplicerat med skiktets värmemotstånd ger temperaturdifferensen $-dT$ över skiktet. Integration ger, vid konstant q:

$$q\int_0^d \frac{dx}{\lambda(x)} = -\int_0^d dT = T(0) - T(d) \tag{2.3.6}$$

Värmemotståndet R (K/(W/m^2)) för skivan är, i analogi med formel (2.3.1):

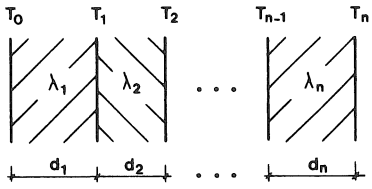
$$R = \int_0^d \frac{dx}{\lambda(x)} \tag{2.3.7}$$

För specialfallet $\lambda(x) = \lambda$ erhålls:

$$R = \frac{d}{\lambda} \tag{2.3.8}$$

För en skiva med n skikt med olika λ-värden (figur 2.3.2) erhålls i analogi med (2.3.7):

$$R = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{n} R_i \tag{2.3.9}$$



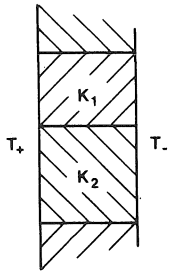
Figur 2.3.2. Skiva med n skikt med olika λ-värden.

Det totala värmemotståndet R (K/W) för en yta A av skivan är:

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\lambda_i A} \tag{2.3.10}$$

I förhållande till värmeflödet ligger de n skikten i serie. Seriekopplade motstånd adderas.

Figur 2.3.3 visar två delar av en skiva, vilka värmeflödesmässigt är parallellkopplade. Delarnas totala värmemotstånd är R_1 och R_2. De totala värmeflödena genom delarna är Q_1 respektive Q_2 (W).



Figur 2.3.3. Två parallellkopplade delar av en skiva.

Det totala värmeflödet Q (W) genom de två delarna är:

$$Q = Q_1 + Q_2 \tag{2.3.11}$$

Den resulterande konduktansen K (W/K) för de två delarna skall enligt (2.3.3) uppfylla:

$$Q = K(T_+ - T_-) \tag{2.3.12}$$

Man erhåller:

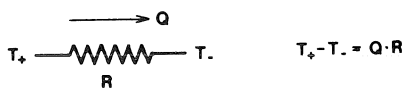
$$K = K_1 + K_2 \tag{2.3.13}$$

Allmänt gäller för n delar som är värmeflödesmässigt parallellkopplade:

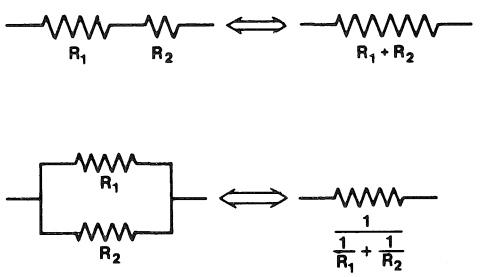
$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i \tag{2.3.14}$$

Vid parallellkoppling av värmemotstånd är den totala konduktansen summan av de enskilda delarnas konduktans. Ekvation (2.3.14) kan även skrivas:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \tag{2.3.15}$$



Figur 2.3.4. Symbol för värmemotstånd.



Figur 2.3.5. Seriekoppling (överst) och parallellkoppling av värmemotstånd.

Vid beskrivning av en värmeströmningskrets kan det vara fördelaktigt att använda en grafisk representation. Ett värmemotstånd kan till exempel beskrivas med en motståndssymbol enligt figur 2.3.4. Med denna symbol kan på ett enkelt sätt serie- och parallellkoppling av värmemotstånd visas enligt figur 2.3.5.

För den stationära temperaturfördelningen råder några enkla samband. Temperaturdifferensen $T_{i-1} - T_i$ över ett skikt ges enligt (2.3.1) av:

$$T_{i-1} - T_i = R_i q \tag{2.3.16}$$

För temperaturdifferensen över hela skivan gäller:

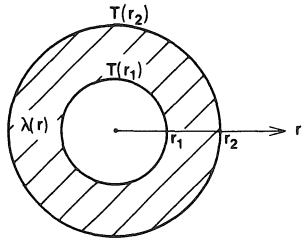
$$T_0 - T_n = Rq \tag{2.3.17}$$

För temperaturen T_k i randytan mellan två skikt erhålls:

$$T_k = T_0 + \sum_{i=1}^{k}(T_i - T_{i-1}) = T_0 + (T_n - T_0)\left(\sum_{i=1}^{k} R_i\right)/R \tag{2.3.18}$$

2.3.2 Plan radiell geometri

Figur 2.3.6 visar ett tvärsnitt genom en kropp som begränsas av två koncentriska cylinderytor. Värmeledningsförmågan varierar med radien r. Temperaturen ges av $T = T(r)$. Värmemotståndet i radiell led genom kroppen skall bestämmas.



Figur 2.3.6. Cylindersymmetrisk kropp.

Det radiella, stationära värmeflödet är $q(r)$ (W/m^2). Enligt Fouriers lag, formel (2.2.3), gäller:

$$q(r) = -\lambda(r)\frac{dT}{dr} \tag{2.3.19}$$

Genom en cylinderyta med radien r är värmeflödet q (W/m) per längdenhet längs axeln:

$$q = 2\pi r q(r) = -2\pi r \lambda(r)\frac{dT}{dr} \tag{2.3.20}$$

Av kontinuitetsskäl är värmeflödet q oberoende av r. Integration ger:

$$q\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{2\pi r\lambda(r)} = -\int_{r_1}^{r_2} dT = T(r_1) - T(r_2) \tag{2.3.21}$$

Värmemotståndet R (K/(W/m)) är:

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{2\pi r\lambda(r)} \tag{2.3.22}$$

För specialfallet $\lambda(r) = \lambda$ erhålls:

$$R = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\lambda} \tag{2.3.23}$$

För en kropp med n koncentriska skikt, där skikt i har värmeledningsförmågan λ_i, erhålls värmemotståndet R (K/(W/m)):

$$R = \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(r_{i+1}/r_i)}{2\pi\lambda_i} \qquad r_{i+1} > r_i \qquad 1 \leq i \leq n \tag{2.3.24}$$

För längden L av kroppen är det totala värmemotståndet R (K/W):

$$R = \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(r_{i+1}/r_i)}{2\pi\lambda_i L} \tag{2.3.25}$$

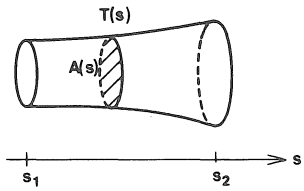
2.3.3 Allmänt varierande tvärsnittsyta

I en kropp varierar temperaturen med en längdkoordinat s. Temperaturen är $T = T(s)$. Värmeledningsförmågan är $\lambda(s)$. Kroppens tvärsnittsarea ges av $A(s)$ (m^2). Se figur 2.3.7.
Det stationära värmeflödet är $q(s)$ (W/m^2). Enligt Fouriers lag, formel (2.2.3), gäller:

$$q(s) = -\lambda(s)\frac{dT}{ds} \tag{2.3.26}$$

Totalvärmeflödet $Q = A(s)q(s)$ (W) är av kontinuitetsskäl konstant. Man erhåller:

$$Q = A(s)q(s) = -A(s)\lambda(s)\frac{dT}{ds} \tag{2.3.27}$$



Figur 2.3.7. Endimensionellt värmeflöde vid varierande tvärsnittsyta.

Integration från s_1 till s_2 medför:

$$Q \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{A(s)\lambda(s)} = -\int_{s_1}^{s_2} dT = T(s_1) - T(s_2) \tag{2.3.28}$$

Det totala värmemotståndet R (K/W) mellan de två positionerna s_1 och s_2 är, i analogi med formel (2.3.1):

$$R = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{A(s)\lambda(s)} \tag{2.3.29}$$

För ett *plant radiellt* fall ($s = r$) enligt avsnitt 2.3.2 är, för längden L av kroppen:

$$A(s) = 2\pi s L \tag{2.3.30}$$

Vid konstant värmeledningsförmåga, $\lambda(s) = \lambda$, ger ekvation (2.3.29):

$$R = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{2\pi s L \lambda} = \frac{\ln(s_2/s_1)}{2\pi L \lambda} \tag{2.3.31}$$

Detta uttryck är lika med uttrycket (2.3.25) för ett enda skikt.

För ett endimensionellt fall med *sfärisk* geometri är:

$$A(s) = 4\pi s^2 \tag{2.3.32}$$

Det totala värmemotståndet mellan de två koncentriska sfäriska ytorna med radierna s_1 respektive s_2 är enligt (2.3.29):

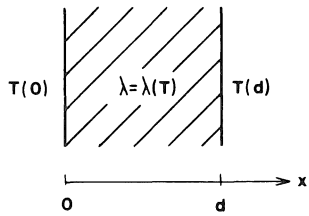
$$R = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{4\pi s^2 \lambda(s)} \tag{2.3.33}$$

Vid konstant värmeledningsförmåga $\lambda(s) = \lambda$ erhålls:

$$R = \frac{1}{4\pi\lambda}(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}) \tag{2.3.34}$$

2.3.4 Temperaturberoende värmeledningsförmåga

I de betraktade fallen har värmeledningsförmågan varit konstant och oberoende av temperaturen. Figur 2.3.8 visar ett tvärsnitt genom en plan skiva med den temperaturberoende värmeledningsförmågan $\lambda = \lambda(T)$. Man kan definiera en ekvivalent, konstant värmeledningsförmåga λ_{ekv} med vilken de tidigare givna formlerna för motstånd och konduktans kan användas.



Figur 2.3.8. Plan skiva med temperaturberoende värmeledningsförmåga.

Enligt formel (2.2.3) gäller för q (W/m^2):

$$q = -\lambda(T)\frac{dT}{dx} \tag{2.3.35}$$

Integration ger, med konstant q:

$$q = \frac{1}{d}\int_{T(d)}^{T(0)} \lambda(T)dT = \lambda_{ekv}\frac{T(0) - T(d)}{d} \tag{2.3.36}$$

Man har:

$$\lambda_{ekv} = \frac{1}{T(0) - T(d)}\int_{T(d)}^{T(0)} \lambda(T)dT \tag{2.3.37}$$

Värmemotståndet R (K/(W/m^2)) för skivan är:

$$R = \frac{d}{\lambda_{ekv}} \tag{2.3.38}$$

Kapitel 3

VÄRMELEDNINGSEKVATIONEN I DISKRET OCH I KONTINUERLIG FORM

Vid ett allmänt, dynamiskt temperaturförlopp i ett fast material har man i varje punkt en balans mellan temperaturförändring och värmetillskott genom värmeledning. Denna balans uttrycks av värmeledningsekvationen. Vid numerisk beräkning av ett temperaturförlopp kan den kontinuerliga temperaturfördelningen representeras av värden i ett ändligt antal diskreta punkter. Värmebalans i varje punkt ger en approximativ formulering av värmeledningsekvationen.

I kapitlet formuleras värmeledningsekvationen för Cartesiska 1-, 2- och 3-dimensionella koordinatsystem samt för ett allmänt ortogonalt koordinatsystem i tre dimensioner. Vidare behandlas några grundläggande egenskaper hos värmeledningsekvationen.

3.1 Endimensionellt förlopp

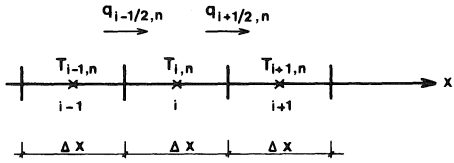
Vid ett plant endimensionellt temperaturförlopp beror temperaturen T och värmeflödet q på koordinaten x och tiden t:

$$T = T(x,t) \qquad q = q(x,t) \tag{3.1.1}$$

Funktionerna T och q är definierade i varje punkt i området. De är kontinuerliga i tiden. I en diskret representation av till exempel temperaturen definieras värdet i ett antal punkter längs x-axeln. Låt avståndet mellan dessa punkter vara Δx. Även tidsförloppet delas in i diskreta steg med längden Δt. Temperaturen i punkt i vid tidpunkten $n\Delta t + t_0$ betecknas $T_{i,n}$:

$$T_{i,n} = T(i\Delta x + x_0, n\Delta t + t_0) \qquad i = 0,1,2,\ldots \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{3.1.2}$$

Referensläget x_0 och begynnelsetidpunkten t_0 kan väljas godtyckligt. Koordinataxeln kan delas in i en cellstruktur där varje cell har längden Δx. Strukturen definieras så att varje temperaturpunkt i befinner sig mitt i en cell. Temperaturen i cellens mittpunkt representerar cellens värmeinnehåll. Se figur 3.1.1.



Figur 3.1.1. Diskret representation av temperatur och värmeflöde.

Värmeflödet från cell $i-1$ till cell i vid tidpunkten $n\Delta t + t_0$ betecknas $q_{i-1/2,n}$ (W/m^2). Värmeflödet från cell i till cell $i+1$ betecknas analogt $q_{i+1/2,n}$. Värmekapaciteten per ytenhet vinkelrätt mot x-axeln är för cell i lika med $C\Delta x$ (J/m^{2}K). Ökningen av cellens värmeinnehåll under tidssteget från $n\Delta t + t_0$ till $(n+1)\Delta t + t_0$ är:

$$C\Delta x(T_{i,n+1} - Ti, n) \tag{3.1.3}$$

Under detta tidssteg beskrivs värmeflödena genom cellens två ränder approximativt av de aktuella värdena vid tidsstegets början, när $t = n\Delta t + t_0$. Nettovärmetillskottet till cell i under tidssteget är:

$$(-q_{i+1/2,n} + q_{i-1/2,n})\Delta t \tag{3.1.4}$$

Värmebalans för cellen medför följande ekvation:

$$C\Delta x(T_{i,n+1} - T_{i,n}) = -(q_{i+1/2,n} - q_{i-1/2,n})\Delta t \tag{3.1.5}$$

Division med $\Delta x \Delta t$ ger:

$$C\frac{T_{i,n+1} - T_{i,n}}{\Delta t} = -\frac{q_{i+1/2,n} - q_{i-1/2,n}}{\Delta x} \tag{3.1.6}$$

I vänsterledet ingår en diskret approximation av temperaturens tidsderivata i cell i. Högerledet är en diskret approximation av värmeflödets derivata i x-led. Då Δx och Δt går mot noll ($i\Delta x$ och $n\Delta t$ definierar en bestämd punkt i rum respektive tid) erhålls i gränsen:

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \tag{3.1.7}$$

Detta är en kontinuerligt formulerad värmebalansekvation. Vänsterledet uttrycker energiökning per volyms- och tidsenhet i en godtycklig punkt. Detta balanseras av högerledet som uttrycker energitillskott via värmeledning till punkten.

Om temperaturfördelningen mellan cellerna i den diskreta representationen approximativt betraktas som stationär under tidssteget kan, enligt (2.2.2), värmeflödena

$q_{i-1/2,n}$ och $q_{i+1/2,n}$ skrivas:

$$q_{i-1/2,n} = \lambda \frac{T_{i-1,n} - T_{i,n}}{\Delta x}$$
$$q_{i+1/2,n} = \lambda \frac{T_{i,n} - T_{i+1,n}}{\Delta x} \tag{3.1.8}$$

Insättning i (3.1.6) ger:

$$C \frac{T_{i,n+1} - T_{i,n}}{\Delta t} = \frac{\lambda \frac{T_{i+1,n} - T_{i,n}}{\Delta x} - \lambda \frac{T_{i,n} - T_{i-1,n}}{\Delta x}}{\Delta x} \tag{3.1.9}$$

Ekvation (3.1.9) är en diskret approximation av:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \tag{3.1.10}$$

Detta är en kontinuerlig formulering av värmeledningsekvationen. Vid konstant värmeledningsförmåga erhålls:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{3.1.11}$$

Värmediffusiviteten a (m^2/s) bestämmer hur snabbt en temperaturfront sprider sig genom materialet. Formel (10.1.4) anger att frontpositionen vid tiden t (s) är proportionell mot $\sqrt{at}$.

I vissa fall har man värmeutveckling i materialet. Ett exempel på detta är härdande betong där kemiska processer i materialet utvecklar värme. Ett annat exempel är uppvärmning via mikrovågor. Man har i dessa fall ett extra värmetillskott per tids- och volymsenhet. Detta tillskott h är allmänt en funktion av rum och tid. Man har för endimensionella förhållanden:

$$h = h(x, t) \tag{3.1.12}$$

Sorten för värmeutvecklingen h (J/ms) väljs med tanke på att de uppställda värmebalansekvationerna bygger på volymsbetraktelser och inte på massabetraktelser. I den diskreta representationen blir nettovärmetillskottet till cell i:

$$(-q_{i+1/2,n} + q_{i-1/2,n} + h\Delta x)\Delta t \tag{3.1.13}$$

I analogi med utvecklingen (3.1.5-7) erhålls följande kontinuerliga formulering av värmebalansekvationen:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + h \tag{3.1.14}$$

Jämfört med ekvationen (3.1.7) har högerledet, värmetillskottet per volyms- och tidsenhet, ökats med termen h som ger ett extra värmetillskott i punkten. Med hjälp av Fouriers lag (2.2.3) övergår (3.1.14) till:

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + h \tag{3.1.15}$$

Om temperaturfördelningen är stationär har tidsderivatan värdet noll. Ekvationerna (3.1.7), (3.1.10) och (3.1.16) övergår därmed till:

$$\frac{dq}{dx} = 0 \tag{3.1.16}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dT}{dx}\right) = 0 \tag{3.1.17}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dT}{dx}\right) + h = 0 \tag{3.1.18}$$

Vid konstant värmeledningsförmåga kan ekvationen (3.1.18) skrivas:

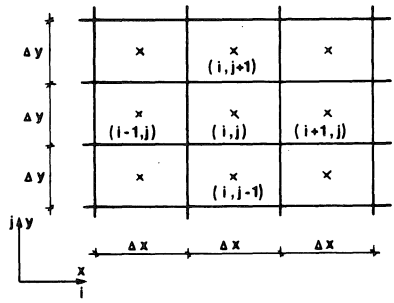
$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{h}{\lambda} = 0 \tag{3.1.19}$$

3.2 Tvådimensionellt förlopp

Vid ett plant tvådimensionellt temperaturförlopp beror temperaturen av de Cartesiska koordinaterna x, y och av tiden t. Värmeflödet $\vec{q}$ (W/m^2) är en vektor med komponenterna q_x i x-led och q_y i y-led. Man har:

$$\begin{aligned} T &= T(x,y,t) \\ \vec{q} &= (q_x(x,y,t), q_y(x,y,t)) \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Funktionerna T och $\vec{q}$ är kontinuerliga i rum och tid.

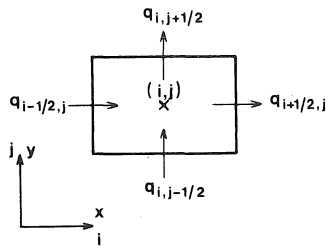


Figur 3.2.1. Rektangulärt gitter.

Planet indelas i en rektangulär cellstruktur enligt figur 3.2.1. Cellerna har kantlängden Δx i x-led och Δy i y-led. Temperaturen i cellernas mittpunkter ger en diskret representation av temperaturfördelningen i planet.
Cellerna identifieras i x-led med index i och i y-led med index j. I analogi med det endimensionella fallet avser beteckningen $T_{i,j,n}$ temperaturen i cell i,j vid tidpunkten $n\Delta t + t_0$.

$$T_{i,j,n} = T(i\Delta x + x_0, j\Delta y + y_0, n\Delta t + t_0) \tag{3.2.2}$$

Värmeflödet (W/m^2) i positiv axelriktning genom de fyra sidorna i cell i,j betecknas enligt figur 3.2.2.



Figur 3.2.2. Värmeflöden (W/m^2) genom en cells fyra sidor.

En värmebalansekvation skall uppställas för cell i,j. Värmekapaciteten för cell i,j är, per längdenhet vinkelrätt mot (x,y)-planet, $C\Delta x\Delta y$ (J/mK). Ökningen av cellens värmeinnehåll (J/m) under tidssteget från $n\Delta t + t_0$ till $(n+1)\Delta t + t_0$ är:

$$C\Delta x\Delta y(T_{i,j,n+1} - T_{i,j,n}) \tag{3.2.3}$$

Under tidssteget beskrivs värmeflödena genom cellens ränder approximativt av de aktuella värdena vid tidsstegets början, när $t = n\Delta t + t_0$. Nettovärmetillskottet (J/m) till cell i,j under tidssteget är;

$$(-q_{i+1/2,j,n} + q_{i-1/2,j,n})\Delta y\Delta t + (-q_{i,j+1/2,n} + q_{i,j-1/2,n})\Delta x\Delta t \tag{3.2.4}$$

Kravet på värmebalans för cellen medför att uttrycken (3.2.3) och (3.2.4) skall vara lika stora. Efter division med $\Delta x\Delta y\Delta t$ erhålls:

$$C\frac{T_{i,j,n+1} - T_{i,j,n}}{\Delta t} = -\frac{q_{i+1/2,j,n} - q_{i-1/2,j,n}}{\Delta x} - \frac{q_{i,j+1/2,n} - q_{i,j-1/2,n}}{\Delta y} \tag{3.2.5}$$

Ekvation (3.2.5) innehåller diskreta approximationer av olika derivator. Då Δt, Δx och Δy går mot noll (iΔx, jΔy och nΔt definierar en bestämd punkt i rum och tid) erhålls i gränsen:

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} \tag{3.2.6}$$

Detta är en kontinuerligt formulerad värmebalansekvation. Med vektorbeteckningen erhålls:

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q} \qquad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{3.2.7}$$

Ekvationen (3.2.7) uttrycker en balans mellan energitillskottet i en punkt genom temperaturändring och nettovärmeflöde till punkten genom värmeledning. Uttrycket $\nabla \cdot \vec{q}$, divergensen av flödet $\vec{q}$, ger således nettoutflödet av värme från en punkt. Sorten är energi per volyms- och tidsenhet. I analogi med Fouriers lag (2.2.4) erhålls:

$$\vec{q} = (q_x, q_y) = \left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}, -\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) \tag{3.2.8}$$

Formel (3.2.8) gäller även för anisotropa material där man har olika värmeledningsförmågor λ_x och λ_y i de två koordinatriktningarna. Insättning i (3.2.7) ger:

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) \tag{3.2.9}$$

Vid en volumetrisk värmeutveckling $h = h(x, y, t)$ (W/m^2) modifieras (3.2.7) till:

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q} + h = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + h \tag{3.2.10}$$

Vid konstant värmeledningsförmåga kan ekvation (3.2.9) skrivas:

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{3.2.11}$$

Vid stationära temperaturfördelningar är tidsderivatans värde noll. Ekvationerna (3.2.7), (3.2.9) och (3.2.10) ändras till:

$$\nabla \cdot \vec{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \tag{3.2.12}$$

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) = 0 \tag{3.2.13}$$

$$-\nabla \cdot \vec{q} + h = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + h = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) + h = 0 \tag{3.2.14}$$

Vid konstant värmeledningsförmåga kan (3.2.13) och (3.2.14) skrivas:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{3.2.15}$$

$$\nabla^2 T + \frac{h}{\lambda} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{h}{\lambda} = 0 \tag{3.2.16}$$

3.3 Tredimensionellt förlopp

I det tredimensionella fallet är temperaturen och värmeflödet funktioner av de Cartesiska koordinaterna x, y, z och av tiden t.

$$\begin{aligned} T &= T(x, y, z, t) \\ \vec{q} &= (q_x(x, y, z, t), q_y(x, y, z, t), q_z(x, y, z, t)) \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Volymen indelas i parallellepipedformade celler med kantlängderna Δx, Δy och Δz i respektive axelriktning. Temperaturen i varje cells mittpunkt ger en diskret representation av den kontinuerliga temperaturfördelningen. I analogi med tidigare avsnitt betecknar $T_{i,j,k,n}$ temperaturen i cell i, j, k vid tidpunkten $n\Delta t + t_0$.

$$T_{i,j,k,n} = T(i\Delta x + x_0, j\Delta y + y_0, k\Delta z + z_0, n\Delta t + t_0) \tag{3.3.2}$$

Värmeflödena genom en cells sex sidoytor har beteckningar som är analoga med dem i det tvådimensionella fallet. Det totala värmeflödet genom till exempel randen mellan cellerna i, j, k och $i + 1, j, k$ är:

$$\Delta y \Delta z \cdot q_{i+1/2,j,k,n} \tag{3.3.3}$$

Randens area är $\Delta y \Delta z$. Värmebalansekvationen för en cell skall uppställas enligt samma mönster som i avsnitt 3.2. Ökningen av värmeinnehållet i cell i, j, k under tidssteget från $n\Delta t + t_0$ till $(n + 1)\Delta t + t_0$ är:

$$C\Delta x \Delta y \Delta z (T_{i,j,k,n+1} - T_{i,j,k,n}) \tag{3.3.4}$$

Med samma approximation som används i (3.2.4) är nettovärmetillskottet till cell i, j, k under tidssteget:

$$\begin{aligned} &(-q_{i+1/2,j,k,n} + q_{i-1/2,j,k,n})\Delta y \Delta z \Delta t + \\ &(-q_{i,j+1/2,k,n} + q_{i,j-1/2,k,n})\Delta x \Delta z \Delta t + \\ &(-q_{i,j,k+1/2,n} + q_{i,j,k-1/2,n})\Delta x \Delta y \Delta t \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Kravet på värmebalans för cellen medför att uttrycken (3.3.4) och (3.3.5) skall vara lika stora. Efter division med $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$ och gränsövergångar som vid (3.2.5-6) erhålls:

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q} \qquad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{3.3.6}$$

Med Fouriers lag (2.2.4) erhålls:

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{3.3.7}$$

Vid volumetrisk värmeutveckling $h = h(x, y, z, t)$ (W/m^3) modifieras (3.3.7) till:

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{q} + h = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + h \tag{3.3.8}$$

Vid konstant värmeledningsförmåga kan ekvation (3.3.7) skrivas:

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{3.3.9}$$

Vid stationaritet är tidsderivatans värde noll. De tvådimensionella ekvationerna (3.2.12-14) motsvaras av:

$$\nabla \cdot \vec{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0 \tag{3.3.10}$$

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) = 0 \tag{3.3.11}$$

$$-\nabla \cdot \vec{q} + h = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + h = \tag{3.3.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) + h = 0$$

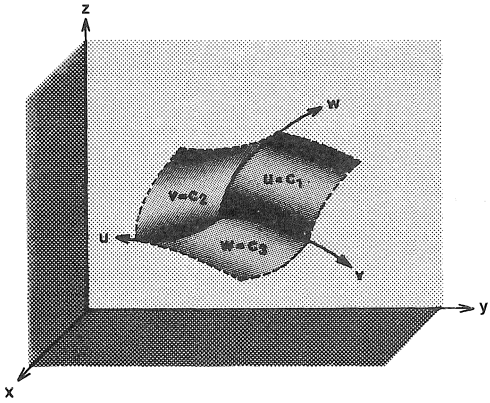
Vid konstant värmeledningsförmåga erhålls:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \tag{3.3.13}$$

$$\nabla^2 T + \frac{h}{\lambda} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{h}{\lambda} = 0 \tag{3.3.14}$$

3.4 Allmänna ortogonala koordinater

Värmeledningsekvationen skall formuleras i ett allmänt ortogonalt koordinatsystem. Härledningen baseras, liksom i avsnitt 3.1-3, på en approximativ värmebalans för en gittercell.



Figur 3.4.1. Allmänt ortogonalt koordinatsystem.

Koordinaterna i det allmänna ortogonala koordinatsystemet ges av (u, v, w). Koordinaterna i det Cartesiska systemet är (x, y, z). Se figur 3.4.1 . Ett samband mellan de två systemens koordinater ges av:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v, w) \\ y &= y(u, v, w) \\ z &= z(u, v, w) \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

I vektorform blir detta:

$$\vec{r}(x, y, z) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \tag{3.4.2}$$

Enhetsvektorer i de tre koordinatriktningarna blir:

$$\begin{aligned} &u\text{-riktning:} \quad \hat{e}_u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \\ &v\text{-riktning:} \quad \hat{e}_v = \frac{1}{h_v}\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \\ &w\text{-riktning:} \quad \hat{e}_w = \frac{1}{h_w}\frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

För skalfaktorerna h_u, h_v och h_w gäller:

$$
\begin{aligned}
h_u &= \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2} \\
h_v &= \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2} \\
h_w &= \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2}
\end{aligned}
\tag{3.4.4}
$$

Ortogonaliteten mellan vektorerna innebär:

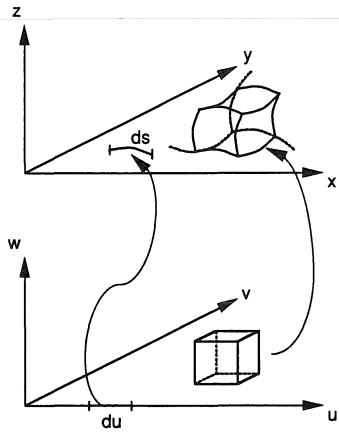
$$
\hat{e}_u \cdot \hat{e}_v = 0 \qquad \hat{e}_u \cdot \hat{e}_w = 0 \qquad \hat{e}_v \cdot \hat{e}_w = 0 \tag{3.4.5}
$$

Man har följande differentialsamband:

$$
d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} dw = h_u \hat{e}_u du + h_v \hat{e}_v dv + h_w \hat{e}_w dw \tag{3.4.6}
$$

$$
ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = h_u^2 du^2 + h_v^2 dv^2 + h_w^2 dw^2
$$

En infinitesimal volym mellan punkterna (u, v, w) och $(u + du, v + dv, w + dw)$ i det allmänna ortogonala systemet och dess motsvarighet i det Cartesiska systemet återges i figur 3.4.2.



Figur 3.4.2. Infinitesimal kontrollvolym i det ortogonala (u, v, w)-systemet.

I analogi med avsnitt 3.3 uppdelas beräkningsvolymen i delvolymer av lika storlekar. Temperaturen mitt i cell i, j, k vid tidpunkten $n\Delta t + t_0$ ges av:

$$T_{i,j,k,n} = T(i\Delta u + u_0,\, j\Delta v + v_0,\, k\Delta w + w_0,\, n\Delta t + t_0) \tag{3.4.7}$$

Referenslägena u_0, v_0 och w_0 och begynnelsetiden t_0 väljs på lämpligt sätt.

I avsnitt 3.3 uppställdes värmebalansekvationen för en parallellepiped som definieras av de två punkterna (x, y, z) och $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. I det allmänna fallet definieras en cellvolym av punkterna $\vec{r}(u, v, w)$ och $\vec{r}(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w)$. Kantlängderna för cellen ges av:

$$\begin{aligned}
&u\text{-riktning:} && |\vec{r}(u + \Delta u, v, w) - \vec{r}(u, v, w)| \approx \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right| \Delta u = h_u \Delta u \\
&v\text{-riktning:} && |\vec{r}(u, v + \Delta v, w) - \vec{r}(u, v, w)| \approx \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| \Delta v = h_v \Delta v \\
&w\text{-riktning:} && |\vec{r}(u, v, w + \Delta w) - \vec{r}(u, v, w)| \approx \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right| \Delta w = h_w \Delta w
\end{aligned} \tag{3.4.8}$$

Cellens volym är $h_u\Delta u \cdot h_v\Delta v \cdot h_w\Delta w$ (m^3) och dess värmekapacitet är $C \cdot h_u\Delta u \cdot h_v\Delta v \cdot h_w\Delta w$ (J/K). Randytan mellan cell i, j, k och cell $i + 1, j, k$ är $h_v\Delta v \cdot h_w\Delta w$ (m^2). Värmeflödet genom randytan betecknas $q_u|_{i+1/2,j,k,n}$ ($\mathrm{W/m^2}$). Det totala värmeflödet (W) från cell i, j, k till cell $i + 1, j, k$ genom randytan är:

$$h_v\Delta v \cdot h_w\Delta w \cdot q_u|_{i+1/2,j,k,n} \tag{3.4.9}$$

Värmebalansekvationen för den betraktade kontrollvolymen är:

$$\begin{aligned}
&C \cdot h_u\Delta u \cdot h_v\Delta v \cdot h_w\Delta w(T_{i,j,k,n+1} - T_{i,j,k,n}) = \\
&\Big\{-h_v\Delta v \cdot h_w\Delta w \cdot q_u|_{i+1/2,j,k,n} + h_v\Delta v \cdot h_w\Delta w \cdot q_u|_{i-1/2,j,k,n} - \\
&h_u\Delta u \cdot h_w\Delta w \cdot q_v|_{i,j+1/2,k,n} + h_u\Delta u \cdot h_w\Delta w \cdot q_v|_{i,j-1/2,k,n} - \\
&h_u\Delta u \cdot h_v\Delta v \cdot q_w|_{i,j,k+1/2,n} + h_u\Delta u \cdot h_v\Delta v \cdot q_w|_{i,j,k-1/2,n}\Big\}\,\Delta t
\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

Ekvationen divideras med $\Delta u\Delta v\Delta w\Delta t$. I gränsen, då Δu, Δv, Δw och Δt går mot noll ($ih_u\Delta u$, $jk_v\Delta v$, $kh_w\Delta w$ och $n\Delta t$ definierar en bestämd punkt i rum och tid) erhålls den kontinuerliga värmebalansekvationen för ett allmänt ortogonalt koordinatsystem.

$$h_u h_v h_w C\frac{\partial T}{\partial t} = -\left(\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_w q_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u h_w q_v) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v q_w)\right) \tag{3.4.11}$$

Avståndet i u-led mellan två punkter är $h_u du$. Värmeflödet q_u i u-led ges av:

$$q_u = -\lambda\frac{1}{h_u}\frac{\partial T}{\partial u}$$

Fouriers lag i det allmänna systemet är:

$$\vec{q} = -\lambda\nabla T = -\lambda\left(\frac{1}{h_u}\frac{\partial T}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial T}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial T}{\partial w}\hat{w}\right) \tag{3.4.12}$$

Insättning av detta i (3.4.11) ger:

$$h_u h_v h_w C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\lambda\frac{\partial T}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_u h_w}{h_v}\lambda\frac{\partial T}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\lambda\frac{\partial T}{\partial w}\right) \tag{3.4.13}$$

Ekvation (3.4.13) är värmeledningsekvationen i ett allmänt ortogonalt koordinatsystem. Faktorerna h_u, h_v och h_w definieras av (3.4.4).

För *Cartesiska koordinater* gäller:

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = w$$

Skalfaktorerna är enligt (3.4.4):

$$h_u = 1, \qquad h_v = 1, \qquad h_w = 1$$

Ekvation (3.4.13) övergår i ekvation (3.3.7).

För *Cylinderkoordinater* gäller:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases} \qquad r \geq 0, \quad 0 \leq \phi < 2\pi \tag{3.4.14}$$

Skalfaktorerna är enligt (3.4.4):

$$h_r = 1, \qquad h_\phi = r, \qquad h_z = 1$$

Ekvation (3.4.13) övergår i:

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{3.4.15}$$

Ekvationen (3.4.15) formulerar värmeledningsekvationen i cylinderkoordinater.

För *Sfäriska koordinater* gäller:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi \tag{3.4.16}$$

Skalfaktorerna blir:

$$h_r = 1, \qquad h_\theta = r, \qquad h_\phi = r\sin\theta$$

Värmeledningsekvationen blir:

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\lambda\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial\phi}\right) \tag{3.4.17}$$

3.5 Dimensionslös formulering

Vid konstanta termiska egenskaper ges den endimensionella värmeledningsekvationen enligt (3.1.11) av:

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{3.5.1}$$

Låt L vara en för problemet karakteristisk längd. En dimensionslös längd x' kan definieras enligt:

$$x' = x/L \tag{3.5.2}$$

Enligt (3.5.1) har at dimensionen m^2. En dimensionslös tid t' kan definieras enligt:

$$t' = at/L^2 \tag{3.5.3}$$

Ekvation (3.5.1) kan formuleras om enligt:

$$\frac{\partial T}{\partial t'} = \frac{\partial^2 T}{\partial (x')^2} \tag{3.5.4}$$

Temperaturfördelningen i ett område kan karakteriseras av en temperaturnivå T_0 och ett temperaturspann $T_1 - T_0$. En dimensionslös temperatur T' kan definieras enligt:

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)\cdot T' \tag{3.5.5}$$

Den endimensionella värmeledningsekvationen i dimensionslös form ges av:

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} = \frac{\partial T'}{\partial (x')^2} \tag{3.5.6}$$

Med skalade rand- och begynnelsevillkor ges en lösning till (3.5.6) av $T' = T'(x', t')$. En allmän lösning till (3.5.1) ges av:

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)\cdot T'\left(x/L, at/L^2\right) \tag{3.5.7}$$

Lösningen gäller för valfria kombinationer av L, a, T_0 och T_1 under förutsättning att de dimensionslöst formulerade randvillkoren är oförändrade.

Ett värmeflöde (W/m^2) i x-riktning ges av:

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\lambda(T_1 - T_0)}{L} \cdot \frac{\partial T'}{\partial x'} = \frac{\lambda(T_1 - T_0)}{L} \cdot q' \tag{3.5.8}$$

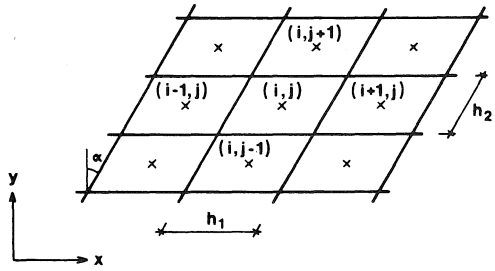
Det dimensionslösa värmeflödet q' definieras som $q' = -\partial T'/\partial x'$. Skalfaktorn vid övergång till dimensionslöst värmeflöde är $\lambda(T_1 - T_0)/L$ (W/m^2).

Det redovisade skalningsförfarandet kan genomföras på analogt sätt för två- och tredimensionella fall.

3.6 Icke-ortogonal cellstruktur

I avsnitten 3.1-3 har den kontinuerliga värmeledningsekvationen givits en approximativ, diskret formulering. Den betraktade en-, två- eller tredimensionella rymden har indelats i en ortogonal cellstruktur. Varje cellrand karakteriseras av att en av de ortogonala koordinaterna är konstant. Den kontinuerliga temperaturfördelningen har givits en diskret representation, definierad av en temperaturpunkt i varje cell. En approximativ värmebalansekvation har uppställts för en cell. Ekvationen har visat sig vara en diskret approximation av värmeledningsekvationen.

En väsentlig egenskap i det ortogonala cellsystemet är att sammanbindningslinjen mellan två angränsande cellers temperaturpunkter skär den gemensamma randen under rät vinkel. Detta medger en enkel approximation av värmeflödet genom randen. Situationen skall belysas genom uppställning av värmebalansekvationen för en cell i en icke-ortogonal cellstruktur enligt figur 3.6.1.



Figur 3.6.1. Icke-ortogonal cellstruktur.

Värmeflödet (W) genom de fyra randytorna till cell i, j är, med samma approxi-

mation som använts i avsnitt 3.2:

$$\frac{T_{i-1,j} - T_{i,j}}{h_1} \lambda h_2 \cos\alpha \tag{3.6.1}$$

$$\frac{T_{i,j} - T_{i+1,j}}{h_1} \lambda h_2 \cos\alpha \tag{3.6.2}$$

$$\frac{T_{i,j-1} - T_{i,j}}{h_2} \lambda h_1 \cos\alpha \tag{3.6.3}$$

$$\frac{T_{i,j} - T_{i,j+1}}{h_2} \lambda h_1 \cos\alpha \tag{3.6.4}$$

Nettovärmeflödet (W) till cell i, j är:

$$\lambda \frac{h_2}{h_1} \cos\alpha (T_{i-1,j} - T_{i,j} + T_{i+1,j} - T_{i,j}) + \tag{3.6.5}$$

$$\lambda \frac{h_1}{h_2} \cos\alpha (T_{i,j-1} - T_{i,j} + T_{i,j+1} - T_{i,j})$$

Med hjälp av serieutveckling av det kontinuerliga temperaturfältet $T(x, y)$ runt centrumpunkten i cell i, j kan uttrycket (3.6.5) omformuleras. För temperaturen i de fem cellernas mittpunkter gäller:

$$\begin{aligned} T_{i,j} &= T(x, y) \\ T_{i-1,j} &= T(x - h_1, y) \\ T_{i+1,j} &= T(x + h_1, y) \\ T_{i,j-1} &= T(x - h_2 \sin\alpha, y - h_2 \cos\alpha) \\ T_{i,j+1} &= T(x + h_2 \sin\alpha, y + h_2 \cos\alpha) \end{aligned} \tag{3.6.6}$$

Serieutveckling, där derivator av tredje ordningen och högre försummas, ger:

$$T_{i-1,j} - T_{i,j} = \frac{\partial T}{\partial x}(-h_1) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cdot \frac{(-h_1)^2}{2} + \ldots \tag{3.6.7}$$

$$T_{i+1,j} - T_{i,j} = \frac{\partial T}{\partial x} h_1 + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cdot \frac{h_1^2}{2} + \ldots \tag{3.6.8}$$

$$T_{i,j-1} - T_{i,j} = \frac{\partial T}{\partial x}(-h_2 \sin\alpha) + \frac{\partial T}{\partial y}(-h_2 \cos\alpha) + \tag{3.6.9}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(-h_2)^2 \sin^2\alpha + 2\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}(-h_2 \sin\alpha)(-h_2 \cos\alpha) + \right.$$

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(-h_2)^2 \cos^2\alpha\right) + \ldots$$

$$T_{i,j+1} - T_{i,j} = \frac{\partial T}{\partial x} h_2 \sin\alpha + \frac{\partial T}{\partial y} h_2 \cos\alpha + \tag{3.6.10}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} h_2^2 \sin^2\alpha + 2\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} h_2 \sin\alpha h_2 \cos\alpha + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} h_2^2 \cos^2\alpha\right) + \ldots$$

Nettovärmeflödet (W) till cell i, j enligt uttrycket (3.6.5) övergår med hjälp av (3.6.7-10) till:

$$\lambda \frac{h_2}{h_1} \cos\alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} h_1^2\right) + \lambda \frac{h_1}{h_2} \cos\alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} h_2^2 \sin^2\alpha + \right. \tag{3.6.11}$$

$$\left. 2\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} h_2^2 \sin\alpha \cos\alpha + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} h_2^2 \cos^2\alpha\right)$$

Ändringen per tidsenhet av värmeinnehållet (W) i cell i, j på grund av temperaturförändring är:

$$C h_1 h_2 \cos\alpha \frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.6.12}$$

Krav på värmebalans medför att uttrycken (3.6.11) och (3.6.12) skall vara lika stora. Man erhåller:

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\left(1 + \sin^2\alpha\right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \sin(2\alpha) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \cos^2\alpha \tag{3.6.13}$$

Av ekvation (3.6.13) framgår att man med den använda lösningsmetodiken löser en differentialekvation som avviker från värmeledningsekvation genom att det introducerats vinkelberoende koefficienter i de termer som omfattar rumsdifferentieringar. Avvikelsen avtar med minskande vinkel α i figur 3.6.1. För $\alpha = 0$, dvs. ortogonal cellstruktur, övergår ekvation (3.6.13) exakt i (3.2.9) med konstant värmeledningsförmåga.

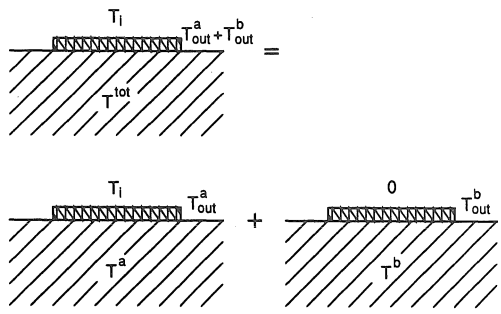
Felet som begås i den diskreta approximationen sker i formuleringen av värmeflödena genom cellens fyra ränder. Cellranden bildar ej rät vinkel med sammanbindningslinjen mellan de omgivande temperaturpunkterna. Värmeflödet genom en rand påverkas därför av både $\partial T/\partial x$ och $\partial T/\partial y$. Vid de enkla uttrycken (3.6.1-4) för värmeflödet genom en cellrand används, felaktigt, ett approximativt uttryck för endast den ena av de två ingående derivatorna. Den enkla formuleringen av värmeflödet genom en rand kräver att den approximativt formulerade gradienten är vinkelrät mot randen. Se även avsnitt 4.4.

Förhållandet illustreras ytterligare av den triangulära cellstruktur som definieras i avsnitt 8.3. Triangelcellerna är visserligen ej celler i en ortogonal cellstruktur, men sammanbindningslinjen mellan angränsande trianglars temperaturpunkter skär den gemensamma randen under rät vinkel. Enkla värmeflödesekvationer av samma typ som (3.1.8) kan därmed användas vid den approximativa formuleringen av värmeledningsekvationen.

3.7 Superpositionsprincipen

Värmeledningsekvationen är en linjär partiell differentialekvation. Om två temperaturfördelningar löser ekvationen för en given geometri så utgör även summan av temperaturfördelningarna en lösning. Principen tillåter att de termiska egenskaperna är funktioner av tid och position. Principen gäller inte om de termiska egenskaperna är temperaturberoende.

Superpositionsprincipen skall illustreras av följande problem [*Hagentoft, Thesis*]. Se figur 3.7.1. På plan mark ligger en platta över vilken temperaturen är konstant T_{in}. Plattan består av ett värmeisolerande skikt med försumbar tjocklek. Dess värmemotstånd är R. Randtemperaturen utanför plattan är summan av två temperaturvariationer T^a_{ut} och T^b_{ut}.



Figur 3.7.1. Superposition där temperaturen vid markytan spaltas upp i två delar. Innetemperaturen T_{in} läggs i den första delen [*Hagentoft, Thesis*].

Det totala förloppet kan delas in i två delar enligt följande. I den första delen är temperaturen över plattan T_{in} och randtemperaturen utanför plattan T^a_{ut}. I den andra delen är temperaturen över plattan 0 och randtemperaturen utanför plattan T^b_{ut}. Temperaturfördelningen i de två förloppen betecknas $T^a(x, y, z, t)$ respektive $T^b(x, y, z, t)$. De två temperaturfördelningarna uppfyller värmeledningsekvationen (3.3.7):

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T^a) = C \frac{\partial T^a}{\partial t} \tag{3.7.1}$$

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T^b) = C \frac{\partial T^b}{\partial t} \tag{3.7.2}$$

Den linjära egenskapen hos ∇ och $\partial/\partial t$ medför att summering av (3.7.1-2) ger:

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T^a) + \nabla \cdot (\lambda \nabla T^b) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T^a + \lambda \nabla T^b) =$$

$$= \nabla \cdot (\lambda \nabla (T^a + T^b)) = C \frac{\partial T^a}{\partial t} + C \frac{\partial T^b}{\partial t} = C \frac{\partial (T^a + T^b)}{\partial t} \tag{3.7.3}$$

Sålunda erhålls:

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla (T^a + T^b)) = C \frac{\partial (T^a + T^b)}{\partial t} \tag{3.7.4}$$

Randvillkoret vid plattan ger för förloppet T^a:

$$\frac{T_{in} - T^a}{R} = -\lambda \frac{\partial T^a}{\partial n} \tag{3.7.5}$$

Här definierar n normalriktningen ned i marken under plattan. Man erhåller

$$T_{in} = T^a - \lambda R \frac{\partial T^a}{\partial n} \tag{3.7.6}$$

För förloppet T^b erhålls:

$$0 = T^b - \lambda R \frac{\partial T^b}{\partial n} \tag{3.7.7}$$

Summering av (3.7.6-7) ger randvillkoret T^{tot} för hela förloppet:

$$T^{tot} = T_{in} + 0 = T^a + T^b - \lambda R \frac{\partial (T^a + T^b)}{\partial n} \tag{3.7.8}$$

Vid markytan gäller direkt:

$$T^a = T^a_{ut}(t) \qquad T^b = T^b_{ut}(t) \tag{3.7.9}$$

Summering ger randvillkoret T^{tot} för det totala förloppet:

$$T^{tot} = T^a + T^b = T^a_{ut}(t) + T^b_{ut}(t) \tag{3.7.10}$$

Den totala temperaturfördelningen $T^{tot}(x, y, z, t)$ erhålls således genom summering av de två delförloppen T^a och T^b:

$$T^{tot}(x, y, z, t) = T^a(x, y, z, t) + T^b(x, y, z, t) \tag{3.7.11}$$

Vid transienta förlopp måste även begynnelsetemperaturen (t=0) beskrivas. Man har allmänt:

$$T^{tot}|_{t=0} = T^a|_{t=0} + T^b|_{t=0} \tag{3.7.12}$$

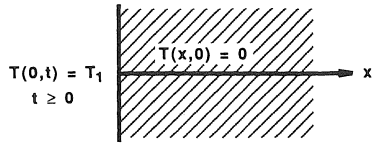
Man kan då till exempel låta T^a beskriva begynnelsefördelningen och låta T^b börja med temperaturen noll i hela området.

Värmeflödet genom plattan för hela förloppet Q^{tot} erhålls genom summering av värmeflödena Q^a och Q^b för delförloppen:

$$Q^{tot}(t) = Q^a(t) + Q^b(t) \tag{3.7.13}$$

Superpositionsprincipen skall tillämpas på några belysande exempel.

Exempel 1.

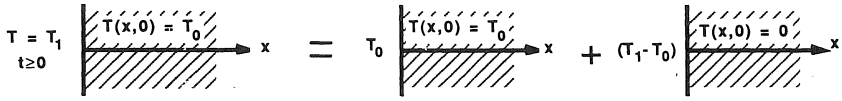


Figur 3.7.2. Enhetssprång vid plan rand.

Ett enkelt grundfall visas i figur 3.7.2. I en plan halvoändlig rymd är begynnelsetemperaturen noll. Vid tider $t \geq 0$ är randtemperaturen 1. Enligt avsnitt 10.2.1 ges lösningen av:

$$T(x,t) = \text{erfc}(\frac{x}{\sqrt{4at}}) \tag{3.7.14}$$

Om begynnelsetemperaturen i stället är T_0 och randtemperaturen vid tiden $t \geq 0$ sätts till T_1 kan problemet separeras i två delar enligt figur 3.7.3.



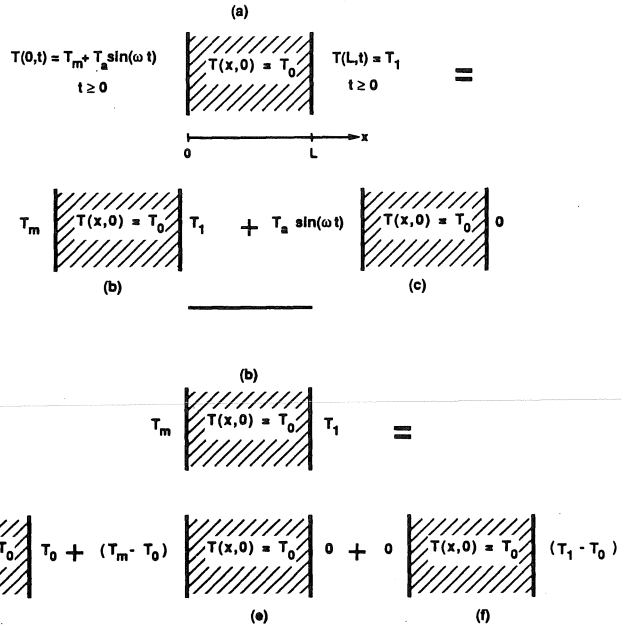
Figur 3.7.3. Stegändring vid rand. Separation i två delprocesser.

Med hjälp av grundfallslösningen (3.7.14) erhålls lösningen:

$$T(x,t) = T_0 + (T_1 - T_0)\mathrm{erfc}(\frac{x}{\sqrt{4at}}) \tag{3.7.15}$$

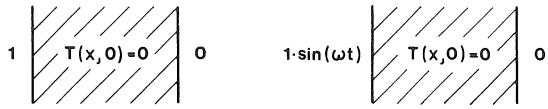
Exempel 2.

Ett mer komplicerat problem definieras som problem (a) överst i figur 3.7.4. Problemet kan till exempel beskriva ett temperaturförlopp i en homogen vägg.



Figur 3.7.4. Temperaturförlopp i en vägg. Separation i delprocesser.

Problemet kan först spaltas upp i delarna (b) och (c). Problem (b) karakteriseras av språngtemperaturer vid de två ränderna. Problem (c) karakteriseras av en sinusvarierande randtemperatur. Ur problem (b) kan delarna (d), (e) och (f) separeras. Lösningen till ursprungsproblemet karakteriseras av de två grundfall som definieras i figur 3.7.5.



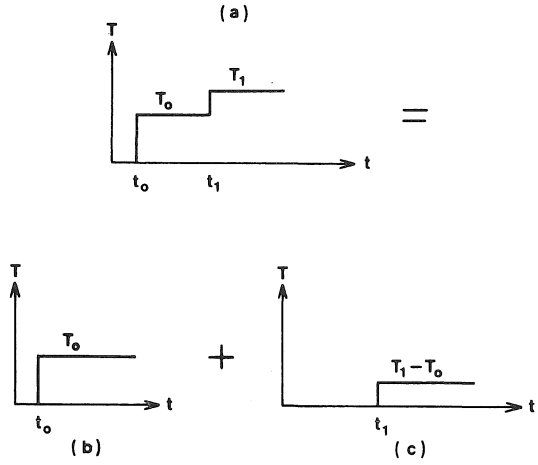
Figur 3.7.5. Två grundfall som ger lösningen till problem (a) i figur 12.1.3.

Låt lösningarna till de två grundfallen i figur 3.7.5 vara $T_{steg}(x,t)$ och $T_{sinus}(x,t)$. Lösningen till ursprungsproblemet (a) ges av summan av lösningarna till problem (c), (d), (e) och (f). Man erhåller:

$$T(x,t) = T_a \cdot T_{sinus}(x,t) + T_0 + (T_m - T_0)T_{steg}(x,t) \qquad (3.7.16)$$
$$+ (T_1 - T_0)T_{steg}(L - x, t)$$

Exempel 3.

Lösningar till grundfall som ligger förskjutna i tiden kan superponeras. Betrakta följande exempel. I en plan halvoändlig rymd är begynnelsetemperaturen noll. Randtemperaturen definieras enligt delfigur (a) i figur 3.7.6.



Figur 3.7.6. Superponering av språngtemperaturer vid rand.

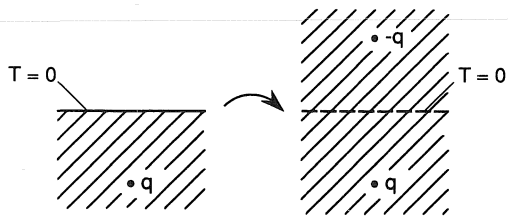
Av figuren framgår hur problemets randtemperatur (a) kan separeras i delarna (b) och (c). Dessa delproblem löses direkt av grundfallslösningen (3.7.14). Man erhåller den totala lösningen:

$$
\begin{aligned}
t \le t_0 : \quad & T(x,t) = 0 \\
t_0 < t \le t_1 : \quad & T(x,t) = T_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4a(t-t_0)}}\right) \\
t > t_1 : \quad & T(x,t) = T_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4a(t-t_0)}}\right) \\
& \quad +(T_1 - T_0)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4a(t-t_1)}}\right)
\end{aligned}
\tag{3.7.17}
$$

En randtemperatur som utgör en i tiden sträckvis konstant funktion kan beskrivas som summan av ett antal temperatursprång vid olika tidpunkter.

Exempel 4.

Figur 3.7.7 visar ett tvärsnitt genom en linjekälla på konstant avstånd från en rand med temperaturen noll. Fallet kan till exempel beskriva värmeutvinning genom ett horisontellt rör i mark.



Figur 3.7.7. Spegling av linjekälla.

Figuren visar hur markytans konstanta temperatur kan representeras med hjälp av en extra, speglad linjekälla med negativt tecken. Den resulterande temperaturfördelningen erhålls som en summa av lösningarna för respektive linjekälla i en oändlig, homogen omgivning. Den geometriska komplikationen med markytan har försvunnit.

Kapitel 4

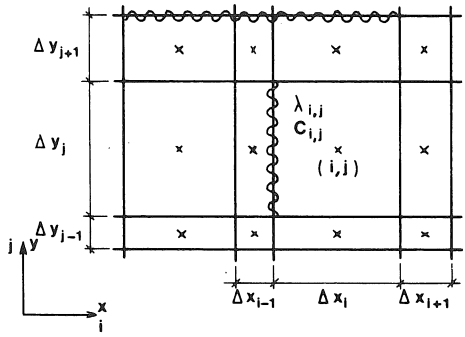
LÖSNING BASERAD PÅ ENERGIBALANSER

Grunder för lösningsmetoden och dess genomförande beskrivs i följande avsnitt.

4.1 Cellstruktur och termiska data

De i kapitel 3 givna diskreta formuleringarna av värmeledningsekvationen begränsas av några generella förutsättningar. Cellindelningen är ekvidistant i de tre koordinataxlarnas riktning. De termiska egenskaperna är konstanta inom hela det betraktade området.

Den valda beskrivningen kan emellertid generaliseras till att gälla en mer komplicerad cellstruktur med varierande cellstorlekar enligt figur 4.1.1.



Figur 4.1.1. Del av allmän cellstruktur i ett plant tvådimensionellt fall.

Cellstrukturens indelning i till exempel x-led definieras genom en uppsättning linjer (två- dimensionellt fall) eller plan (tredimensionellt fall) vilka är vinkelräta mot x-axeln. Avståndet mellan intilliggande linjer eller plan är Δx_i. På motsvarande sätt

definieras en indelning längs övriga koordinataxlar. I en tredimensionell struktur ges dimensionerna för en cell med beteckningen (i, j, k) av längderna Δx_i, Δy_j och Δz_k.

De termiska egenskaperna är konstanta inom varje cell, men kan variera godtyckligt från cell till cell. Värmeledningsförmågan i en cell (i, j, k) betecknas med $\lambda_{i,j,k}$ (W/mK) och värmekapaciteten med $C_{i,j,k}$ (J/m^{3}K).

Längs varje cells rand kan ett värmeisolerande skikt med försumbar tjocklek placeras. Ett skikt med motståndet $R_{i-1/2,j,k}$ (K/(W/m^2)) ligger mellan cellerna $(i-1, j, k)$ och (i, j, k).

4.2 Lösningsmetodens princip

I avsnitt 3.3 visades att värmebalans för en cell resulterar i en approximativ formulering av värmeledningsekvationen. Man har allmänt för energiinnehållet $E_{i,j,k,n+1}$ (J) i en cell i, j, k vid tidpunkten $n+1$:

$$E_{i,j,k,n+1} = E_{i,j,k,n} + \left(\sum_m Q_{rand,m,n}\right) \Delta t \tag{4.2.1}$$

En ekvivalent formulering ger, vid temperaturoberoende värmekapacitet C, ett explicit uttryck för temperaturen $T_{i,j,k,n+1}$ vid tidpunkten $n+1$:

$$T_{i,j,k,n+1} = T_{i,j,k,n} + \frac{1}{V_{i,j,k} C_{i,j,k}} \left(\sum_m Q_{rand,m,n}\right) \Delta t \tag{4.2.2}$$

$T_{i,j,k,n}$	temperatur i en cell vid den diskreta tidpunkten n, definierad av $t_0 + n\Delta t$
$V_{i,j,k}$	cellens volym (m^3)
$C_{i,j,k}$	cellmaterialets värmekapacitet (J/m^{3}K)
$Q_{rand,m,n}$	värmeflöde in till cellen genom dess randyta nummer m vid den diskreta tidpunkten n (W)
Δt	tidssteg mellan de diskreta tidpunkterna n och $n+1$. Tidsstegets längd behöver ej vara konstant (s)

Formel (4.2.2) ger ett recept på hur en cells nya temperatur vid tidpunkten $n+1$ skall beräknas, när dess temperatur och randvärmeflöden är kända vid tidpunkten n. Varierande cellvolym och värmekapacitet inom beräkningsvolymen vållar inget problem, då produkten $V_{i,j,k} \cdot C_{i,j,k}$ är väldefinierad för varje cell. I avsnitt 4.3 visas hur $Q_{rand,m,n}$ beräknas. Formlerna (4.2.1-2) beskriver mycket tydligt det fysikaliska förloppet.

Anmärkning

Genom insättning av explicita uttryck för $Q_{rand,m,n}$ i (4.2.2) erhålls:

$$T_{i,j,k,n+1} = \Bigg(1 - \frac{\Delta t}{C_{i,j,k}V_{i,j,k}}\big(K_{i-1/2,j,k} + K_{i+1/2,j,k} + \tag{4.2.3}$$

$$K_{i,j-1/2,k} + K_{i,j+1/2,k} + K_{i,j,k-1/2} + K_{i,j,k+1/2}\big)\Bigg) T_{i,j,k,n} +$$

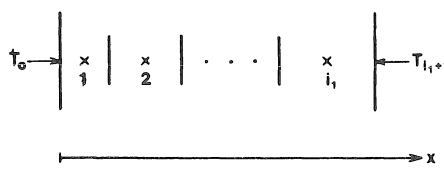
$$\frac{K_{i-1/2,j,k}\Delta t}{C_{i,j,k}} T_{i-1,j,k,n} + \frac{K_{i+1/2,j,k}\Delta t}{C_{i,j,k}} T_{i+1,j,k,n} + \frac{K_{i,j-1/2,k}\Delta t}{C_{i,j,k}} T_{i,j-1,k,n} +$$

$$\frac{K_{i,j+1/2,k}\Delta t}{C_{i,j,k}} T_{i,j+1,k,n} + \frac{K_{i,j,k-1/2}\Delta t}{C_{i,j,k}} T_{i,j,k-1,n} + \frac{K_{i,j,k+1/2}\Delta t}{C_{i,j,k}} T_{i,j,k+1,n}$$

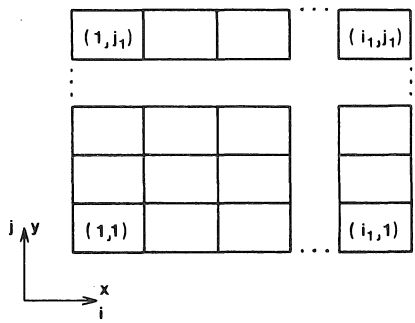
Denna typ av formulering beskriver den nya temperaturen i en punkt som ett viktat värde av de gamla temperaturerna i den betraktade punkten och dess omgivande punkter. Kopplingskonduktanserna K (W/K) definieras i avsnitt 2.3 och 4.3. Det beskrivna förloppets fysiska karaktär framhävs inte av formuleringen, som principellt överensstämmer med den beskrivning metoden brukar ges under namnet metoden med explicit framåtdifferens.

4.2.1 Iterationsförfarande

Figurerna 4.2.1 och 4.2.2 visar en endimensionell och en tvådimensionell gitterstruktur. Den endimensionella strukturen omfattar i_1 celler. Den tvådimensionella strukturen omfattar $i_1 \cdot j_1$ celler. En motsvarande gitterstruktur i tre dimensioner omfattar $i_1 \cdot j_1 \cdot k_1$ celler. Cellstorlekarna kan variera enligt beskrivningen i avsnitt 4.1.



Figur 4.2.1. Endimensionell gitterstruktur.



Figur 4.2.2. Tvådimensionell gitterstruktur.

Temperatur vid tiden $t_0 + n\Delta t$ betecknas:

$$\begin{array}{lll} \text{1-dim.:} & T_{i,n} & \text{i cell } i \\ \text{2-dim.:} & T_{i,j,n} & \text{i cell } i,j \\ \text{3-dim.:} & T_{i,j,k,n} & \text{i cell } i,j,k \end{array} \tag{4.2.4}$$

Totala värmeflöden (W) genom en cellrand vid tiden $t_0 + n\Delta t$ betecknas:

$$\begin{array}{lll} \text{1-dim.:} & Q_{i-1/2,n} & \text{från cell } (i-1) \text{ till cell } i \\ \\ \text{2-dim.:} & Q_{i-1/2,j,n} & \text{från cell } (i-1,j) \text{ till cell } (i,j) \\ & Q_{i,j-1/2,n} & \text{från cell } (i,j-1) \text{ till cell } (i,j) \\ \\ \text{3-dim.:} & Q_{i-1/2,j,k,n} & \text{från cell } (i-1,j,k) \text{ till cell } (i,j,k) \\ & Q_{i,j-1/2,k,n} & \text{från cell } (i,j-1,k) \text{ till cell } (i,j,k) \\ & Q_{i,j,k-1/2,n} & \text{från cell } (i,j,k-1) \text{ till cell } (i,j,k) \end{array} \tag{4.2.5}$$

En gittercells volym (m^3) betecknas med V_i, $V_{i,j}$ eller $V_{i,j,k}$ beroende på cellstrukturens dimension. Den volymetriska värmekapaciteten (J/m^3K) i en cell betecknas på motsvarande sätt med C_i, $C_{i,j}$ eller $C_{i,j,k}$.

Vid iterationen används det totala värmeflödet Q (W) genom varje cellrand. Iterationen påverkas ej av om gitterstrukturen har till exempel plan eller radiell geometri. Geometrin bestämmer endast hur värmeflödet Q skall beräknas.

Iterationsförfarandet har följande principiella struktur:

1. Vid starttidpunkten ($n = 0$) ansätts temperaturer i samtliga celler.
2. Randtemperaturer bestäms för den aktuella tidpunkten. Samtliga temperaturer är därmed kända.

$$\begin{array}{lll} \text{1-dim.:} & T_{i,n} & 0 \le i \le i_1 + 1 \\ \text{2-dim.:} & T_{i,j,n} & 0 \le i \le i_1 + 1, \quad 0 \le j \le j_1 + 1 \\ \text{3-dim.:} & T_{i,j,k,n} & 0 \le i \le i_1 + 1, \quad 0 \le j \le j_1 + 1, \\ & & 0 \le k \le k_1 + 1 \end{array} \tag{4.2.6}$$

3. Värmeflödet (W) genom alla cellers samtliga ränder bestäms (avsnitt 4.3):

$$\begin{array}{lll} \text{1-dim.:} & Q_{i-1/2,n} & 1 \le i \le i_1 + 1 \\ \text{2-dim.:} & Q_{i-1/2,j,n} & 1 \le i \le i_1 + 1, \\ & Q_{i,j-1/2,n} & 1 \le j \le j_1 + 1 \\ \text{3-dim.:} & Q_{i-1/2,j,k,n} & 1 \le i \le i_1 + 1, \\ & Q_{i,j-1/2,k,n} & 1 \le j \le j_1 + 1, \\ & Q_{i,j,k-1/2,n} & 1 \le k \le k_1 + 1 \end{array} \tag{4.2.7}$$

4. Nettovärmetillskottet (J) till varje cell under ett tidssteg Δt (s) bestäms:

$$\begin{aligned} \text{1-dim.:} \quad & \Delta E_{i,n} = (Q_{i-1/2,n} - Q_{i+1/2,n})\Delta t \\ \text{2-dim.:} \quad & \Delta E_{i,j,n} = (Q_{i-1/2,j,n} - Q_{i+1/2,j,n} + \\ & \qquad Q_{i,j-1/2,n} - Q_{i,j+1/2,n})\Delta t \\ \text{3-dim.:} \quad & \Delta E_{i,j,k,n} = (Q_{i-1/2,j,k,n} - Q_{i+1/2,j,k,n} + \\ & \qquad Q_{i,j-1/2,k,n} - Q_{i,j+1/2,k,n} + \\ & \qquad Q_{i,j,k-1/2,n} - Q_{i,j,k+1/2,n})\Delta t \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

5. Ny temperatur (°C) beräknas i varje cell:

$$\begin{aligned} \text{1-dim.:} \quad & T_{i,n+1} = T_{i,n} + \frac{\Delta E_{i,n}}{V_i \cdot C_i} \\ \text{2-dim.:} \quad & T_{i,j,n+1} = T_{i,j,n} + \frac{\Delta E_{i,j,n}}{V_{i,j} \cdot C_{i,j}} \\ \text{3-dim.:} \quad & T_{i,j,k,n+1} = T_{i,j,k,n} + \frac{\Delta E_{i,j,k,n}}{V_{i,j,k} \cdot C_{i,j,k}} \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Iterationspunkterna 2 till 5 upprepas tills önskad simuleringstidpunkt är uppnådd. Tids- stegslängden Δt kan varieras för varje iteration. Tidssteget har en övre begränsning, stabilitetstidssteget, vilket ej får överskridas. Storleken av stabilitetstidssteget beror av de termiska egenskaperna och av den valda gitterstrukturen. Se kapitel 5.

4.2.2 Termiska komplikationer

Det i avsnitt 4.2.1 redovisade iterationsförfarandet vid lösning av ett värmeledningsproblem kan kompletteras vid olika typer av termiska komplikationer.

Om randvillkoret vid beräkningsområdets gräns utgörs av ett givet värmeflöde (W/m^2) används detta vid bestämningen av det totala värmeflödet Q (W) genom berörda cellers ränder. Detta sker i punkt 3. Se även kapitel 7.

Temperaturberoende värmeledningsförmåga påverkar beräkningen av värmeflöden genom cellränder (punkt 2). Vid beräkningen bestäms varje cells värmeledningsförmåga av dess aktuella temperatur. Se kapitel 12.

Externt tillförd volymetrisk värmeutveckling (W/m^3) i materialet påverkar beräkningen av nettovärmetillskottet ΔE till varje berörd cell. Man lägger till en extra term i beräkningen. Detta sker i punkt 4.

Temperaturberoende värmekapacitet påverkar beräkningen av ny temperatur i varje cell vilket sker i punkt 5. Vid beräkningen bestäms varje cells temperatur som en funktion av dess nya volymetriska värmeinnehåll. Se kapitel 12.

4.3 Beräkningsuttryck för värmeflöde genom en cellrand

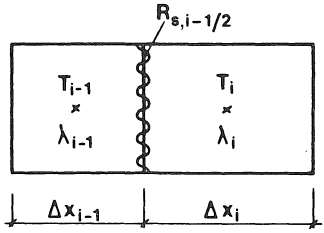
Ett allmänt uttryck för värmeflödet $Q_{rand,m,n}$ (W) i formel (4.2.1), är:

$$Q_{rand,m,n} = K_m(T_{rand,m,n} - T) \tag{4.3.1}$$

K_m (W/K) är en kopplingskoefficient, den totala konduktansen, mellan den punkt som definierar cellens temperatur T och den punkt utanför cellen, vars temperatur $T_{rand,m,n}$ används vid beräkningen av värmeflödet genom randdel m. I det följande definieras ett värmeflöde som positivt om värme transporteras i positiv axelriktning.

4.3.1 Plan geometri

I figur 4.3.1 visas två celler med gemensam rand i en plan gitterstruktur. För enkelhets skull markeras ingående storheter endast med det lägesindex som varierar längs sammanbindningslinjen mellan de två cellernas temperaturpunkter.



Figur 4.3.1. Två celler med gemensam rand. Plan geometri.

Värmeledningsförmågan i de två cellerna är λ_i och λ_{i-1} (W/mK). Cellernas längd i x-led är Δx_i och Δx_{i-1} (m). Deras gemensamma kontaktyta är A (m^2). Värmemotståndet i randen mellan cellerna är $R_{s,i-1/2}$ (K/(W/m^2)).

Det totala värmeflödet $Q_{i-1/2}$ (W) från cell $i-1$ till cell i genom den gemensamma randen skrivs i analogi med (4.3.1):

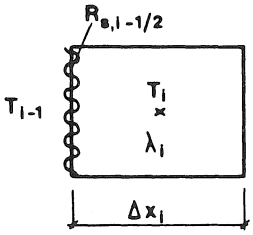
$$Q_{i-1/2} = K_{i-1/2}(T_{i-1} - T_i) \tag{4.3.2}$$

Konduktansen $K_{i-1/2}$ (W/K) blir med hjälp av (2.3.10):

$$K_{i-1/2} = \frac{1}{R_{i-1/2}} = \frac{A}{\frac{\Delta x_{i-1}}{2\lambda_{i-1}} + R_{s,i-1/2} + \frac{\Delta x_i}{2\lambda_i}} \tag{4.3.3}$$

Värmemotståndet $R_{i-1/2}$ (K/W) är summan av värmemotstånden för halva cellen $i-1$, det isolerande skiktet mellan cellerna och halva cellen i.

Om cell i är en randcell i beräkningsområdet erhålls en situation av den typ som illustreras i figur 4.3.2.



Figur 4.3.2. Randcell i beräkningsområdet.

Temperaturen T_{i-1} är yttemperatur på randen till cell i. I detta fall blir konduktansen $K_{i-1/2}$ mellan temperaturpunkterna $i-1$ och i:

$$K_{i-1/2} = \frac{1}{R_{i-1/2}} = \frac{A}{R_{s,i-1/2} + \frac{\Delta x_i}{2\lambda_i}} \tag{4.3.4}$$

Exempel:

För tydlighets skull ges exempel på en beskrivning av formlerna med fullständiga index för ett fall med tredimensionella Cartesiska koordinater. Flödet genom randen mellan cellerna $(i, j-1, k)$ och (i, j, k) är:

$$Q_{i,j-1/2,k} = K_{i,j-1/2,k}(T_{i,j-1,k} - T_{i,j,k})$$

Konduktansen $K_{i,j-1/2,k}$ är:

$$K_{i,j-1/2,k} = \frac{1}{R_{i,j-1/2,k}} = \frac{A_{i,j-1/2,k}}{\frac{\Delta y_{j-1}}{2\lambda_{i,j-1,k}} + R_{s,i,j-1/2,k} + \frac{\Delta y_j}{2\lambda_i}}$$

Arean $A_{i,j-1/2,k}$ mellan cellerna är:

$$A_{i,j-1/2,k} = \Delta x_i \Delta z_k$$

Cellens volym $V_{i,j,k}$ är:

$$V_{i,j,k} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

Anmärkning:

Konduktansen mellan två celler med olika värmeledningsförmåga kan beräknas med hjälp av ett viktat värde λ_{ekv} för värmeledningsförmågan mellan cellernas mittpunkter. Värmeflödet $Q_{1\,1/2}$ (W) mellan cellerna 1 och 2 kan skrivas:

$$Q_{1\,1/2} = K_{1\,1/2}(T_1 - T_2)$$

$$K_{1\,1/2} = \frac{\lambda_{ekv} A}{\frac{\Delta x_1}{2} + \frac{\Delta x_2}{2}} \tag{4.3.5}$$

Ett korrekt uttryck för λ_{ekv} skall ge det stationära värmeflödet mellan cellerna. Följande viktning uppfyller detta:

$$\lambda_{ekv,\,korrekt} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\frac{\Delta x_1}{\lambda_1} + \frac{\Delta x_2}{\lambda_2}} \tag{4.3.6}$$

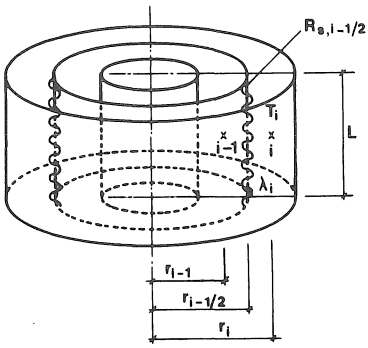
Följande viktning, som ibland förekommer, ger felaktigt stationärt värmeflöde mellan cellerna:

$$\lambda_{ekv,\,fel} = \frac{\Delta x_1 \lambda_1 + \Delta x_2 \lambda_2}{\Delta x_1 + \Delta x_2} \tag{4.3.7}$$

Kvoten mellan de erhållna flödena med felaktig respektive korrekt viktning blir 4/3 för ett fall med $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ W/mK och $\Delta x_1 = \Delta x_2$. Värmeflödet mellan cellerna blir 33 % för stort.

4.3.2 Cylindergeometri

Figur 4.3.3 visar två celler med gemensam rand i en cylindersymmetrisk gitterstruktur. Randen har längden L (m) i axiell riktning.



Figur 4.3.3. Två celler med gemensam rand. Cylindersymmetri.

Värmeledningsförmågan i de två cellerna är λ_i och λ_{i-1} (W/mK). Cellernas dimensioner (m) framgår av figuren. Värmemotståndet för skiktet i randen mellan cellerna är $R_{s,i-1/2}$ (K/(W/m^2)).

Det totala värmeflödet $Q_{i-1/2}$ (W) från cell $i-1$ till cell i ges av formel (4.3.1). I detta fall är konduktansen $K_{i-1/2}$ (W/K) med hjälp av (2.3.31):

$$K_{i-1/2} = \frac{1}{R_{i-1/2}} = \frac{L}{\dfrac{\ln\frac{r_{i-1/2}}{r_{i-1}}}{2\pi\lambda_{i-1}} + \dfrac{R_{s,i-1/2}}{2\pi r_{i-1/2}} + \dfrac{\ln\frac{r_i}{r_{i-1/2}}}{2\pi\lambda_i}} \tag{4.3.8}$$

Det totala värmemotståndet $R_{i-1/2}$ (K/W) är summan av de totala värmemotstånden för halva cellen $i-1$, det isolerande skiktet mellan cellerna och halva cellen i.

Om cell i är en randcell i analogi med det plana fallet, illustrerat i figur 4.3.2, erhålls:

$$K_{i-1/2} = \frac{1}{R_{i-1/2}} = \frac{L}{\dfrac{R_{s,i-1/2}}{2\pi r_{i-1/2}} + \dfrac{\ln\frac{r_i}{r_{i-1/2}}}{2\pi\lambda_i}} \tag{4.3.9}$$

4.3.3 Sfärisk geometri

I detta fall utgörs cellerna av koncentriska skikt. Beteckningarna är analoga med dem, som används i radiell led i det cylindersymmetriska fallet (se figur 4.3.3). Värmeledningsförmågan i angränsande celler är λ_i och λ_{i-1} (W/mK). Värmemotståndet i randen mellan cellerna är $R_{s,i-1/2}$ (K/(W/m^2)).

Det totala värmeflödet $Q_{i-1/2}$ (W) från cell $i-1$ till cell i ges av formel (4.3.1). I detta fall är konduktansen $K_{i-1/2}$ (W/K) enligt (2.3.34):

$$K_{i-1/2} = \frac{1}{R_{i-1/2}} = \tag{4.3.10}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{4\pi\lambda_{i-1}}\left(\frac{1}{r_{i-1}} - \frac{1}{r_{i-1/2}}\right) + \frac{R_{s,i-1/2}}{4\pi r_{i-1/2}^2} + \frac{1}{4\pi\lambda_i}\left(\frac{1}{r_{i-1/2}} - \frac{1}{r_i}\right)}$$

Det totala värmemotståndet $R_{i-1/2}$ (K/W) är summan av de totala värmemotstånden för halva cellen $i-1$, det isolerande skiktet mellan cellerna och halva cellen i.

Om cell i är en randcell erhålls i analogi med det plana fallet, illustrerat i figur 4.3.2:

$$K_{i-1/2} = \frac{1}{R_{i-1/2}} = \frac{1}{\frac{R_{s,i-1/2}}{4\pi r_{i-1/2}^2} + \frac{1}{4\pi\lambda_i}\left(\frac{1}{r_{i-1/2}} - \frac{1}{r_i}\right)} \tag{4.3.11}$$

4.3.4 Allmänna ortogonala koordinater

Med utgångspunkt från figur 3.4.2 och med indexbeteckningar enligt figur 4.3.1 kan uttryck för konduktanser mellan celler i ett allmänt ortogonalt cellsystem formuleras i analogi med de uttryck som ges i avsnitt 4.3.1 gällande plan geometri.

Konduktansen $K_{i-1/2,j,k}$ (W/K) mellan två celler $(i-1,j,k)$ och (i,j,k) ges av:

$$K_{i-1/2,j,k} = \frac{h_v\Delta v_j \cdot h_w\Delta w_k}{\frac{h_u\Delta u_{i-1}}{2\lambda_{i-1}} + R_{s,i-1/2,j,k} + \frac{h_u\Delta u_i}{2\lambda_i}} \tag{4.3.12}$$

Om cellen $(i-1,j,k)$ inte ingår i beräkningsvolymen har man:

$$K_{i-1/2,j,k} = \frac{h_v\Delta v_j \cdot h_w\Delta w_k}{R_{s,i-1/2,j,k} + \frac{h_u\Delta u_i}{2\lambda_i}} \tag{4.3.13}$$

En cells volym V (m^3) ges av:

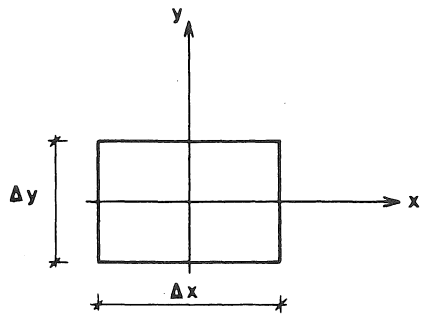
$$V = h_u\Delta u_i \cdot h_v\Delta v_j \cdot h_w\Delta w_k \tag{4.3.14}$$

4.4 Den lokala temperaturfördelningen

Den givna lösningsmetoden beskriver ett temperaturförlopp med hjälp av temperaturen i ett antal diskreta punkter i beräkningsvolymen. Karakteristiska egenskaper för den approximativt beskrivna kontinuerliga temperaturfördelning runt dessa temperaturpunkter skall belysas.

4.4.1 Temperaturfördelning i en cell

Figur 4.4.1 visar en cell i en tvådimensionell Cartesisk gitterstruktur. De termiska egenskaperna är konstanta i cellen.



Figur 4.4.1. Rektangulär gittercell.

Låt temperaturen i cellen beskrivas av ett allmänt andragradspolynom enligt:

$$T(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + T_0 \tag{4.4.1}$$

Temperaturen i cellens mittpunkt är:

$$T(0,0) = T_0 \tag{4.4.2}$$

Enligt den använda diskreta approximationen skall cellens mittpunktstemperatur T_0 representera cellens energiinnehåll. Därmed skall T_0 vara cellens medeltemperatur. Man har följande villkor:

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2}\int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} CT(x,y)dxdy = \Delta x \Delta y C T_0 \tag{4.4.3}$$

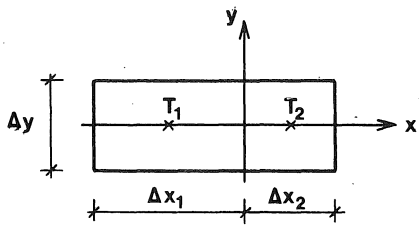
Temperaturfunktionen (4.4.1) uppfyller detta villkor om $a = c = 0$. Temperaturfördelningen i cellen ges av:

$$T(x,y) = bxy + dx + ey + T_0 \tag{4.4.4}$$

Temperaturfördelningen uppfyller $\nabla^2 T = 0$. Den utgör en stationär fördelning i form av ett plan med en eventuell överlagrad sadelfunktion. Temperaturen är T_0 i cellens centrum. Planets lutning i x- och y-led, liksom den överlagrade sadelfunktionen, saknar betydelse för cellens energiinnehåll.

4.4.2 Temperaturfördelning mellan två cellers temperaturpunkter

Temperaturfördelningen mellan temperaturpunkterna i två celler med gemensam rand avgör värmeflödet genom randen. Två celler och ett koordinatsystem definieras i figur 4.4.2.



Figur 4.4.2. Två celler med gemensam rand.

De termiska egenskaperna är konstanta inom respektive cell. För varje cell ansätts en allmän temperaturfördelning enligt formel (4.4.4). Fördelningarna väljs så att temperaturen i respektive cells mittpunkt är T_1 respektive T_2. Man erhåller:

$$T_1(x,y) = b_1\,(x + \Delta x_1/2)\,y + d_1\,(x + \Delta x_1/2) + e_1 y + T_1 \tag{4.4.5}$$

$$T_2(x,y) = b_2\,(x - \Delta x_2/2)\,y + d_2\,(x - \Delta x_2/2) + e_2 y + T_2 \tag{4.4.6}$$

Det totala värmeflödet (W/m) genom randen mellan cellerna bestäms av uttryck av följande typ för var och en av de två cellerna:

$$\int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \left(-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} \right) dy = -\lambda d \Delta y \tag{4.4.7}$$

Totalflödet mellan cellerna bestäms av temperaturfältets lutning d i x-led. Värmeflödet genom randytan måste vara kontinuerligt i x-led:

$$\lambda_1 d_1 = \lambda_2 d_2 \tag{4.4.8}$$

Temperaturfördelningen längs sammanbindningslinjen mellan cellernas mittpunkter är:

$$T_1(x,0) = d_1\,(x + \Delta x_1/2) + T_1 \qquad \text{(cell 1)} \tag{4.4.9}$$

$$T_2(x,0) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} d_1\,(x - \Delta x_2/2) + T_2 \qquad \text{(cell 2)} \tag{4.4.10}$$

Kontinuitet i temperaturfördelningen mellan cellernas temperaturpunkter innebär att temperaturen i randen ($x = 0$) skall vara lika i (4.4.9) och (4.4.10). Man erhåller:

$$\lambda_1 d_1 = \frac{T_2 - T_1}{\frac{\Delta x_1}{2\lambda_1} + \frac{\Delta x_2}{2\lambda_2}} \tag{4.4.11}$$

Insättning i (4.4.7) ger i analogi med (4.3.3) flödet Q (W/m) mellan cellerna:

$$Q = K(T_1 - T_2) \tag{4.4.12}$$

$$K = \frac{\Delta y}{\frac{\Delta x_1}{2\lambda_1} + \frac{\Delta x_2}{2\lambda_2}}$$

Flödet mellan två celler ges av den endimensionella stationära temperaturfördelningen mellan deras temperaturpunkter.

Temperaturfördelningen i vardera cellen kan beskrivas som plan där lutningen längs sammanbindningslinjen mellan temperaturpunkterna är definierad enligt ovan. Planen kan ha godtycklig lutning vinkelrätt mot sammanbindningslinjen utan att värmeflödet genom randen påverkas. Grunden till detta enkla förhållande är att sammanbindningslinjen mellan temperaturpunkterna skär randen under rät vinkel. Se även avsnitt 3.6.

4.5 Schematisk bild av en värmeströmningskrets

Metoden att lösa värmeledningsekvationen bygger på en ortogonal cellindelning av beräkningsområdet. Varje cells energiinnehåll definieras av en temperatur. Värmeflödet mellan två angränsande celler bestäms av produkten av cellernas temperaturdifferens och en kopplingskonduktans mellan dem.

Den termiska kopplingen mellan två temperaturpunkter visas i figur 4.5.1 där K (W/K) står för kopplingens konduktans och R (K/W) står för kopplingens värmemotstånd ($K = 1/R$). Figuren åskådliggör schematiskt sambanden mellan K, R och värmeflödet Q (W):

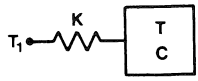
$$T_1 - T_2 = QR \tag{4.5.1}$$

och

$$Q = K(T_1 - T_2) = \frac{1}{R}(T_1 - T_2) \tag{4.5.2}$$

Figur 4.5.1. Termisk koppling mellan två temperaturpunkter.

En cells temperatur är T och dess värmekapacitet är C (J/K). Cellen har en enda kopplingskonduktans K (W/K) till en temperaturpunkt med temperaturen T_1. Värmeströmningskretsen beskrivs schematiskt i figur 4.5.2.

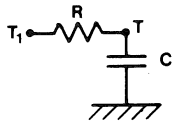


Figur 4.5.2. Gittercell med termisk koppling till en temperaturpunkt.

Cellens temperaturförlopp beskrivs av följande differentialekvation:

$$C\frac{dT}{dt} = K(T_1 - T) \tag{4.5.3}$$

Ett vanligt förekommande sätt att åskådliggöra formel (4.5.3) visas i figur 4.5.3.

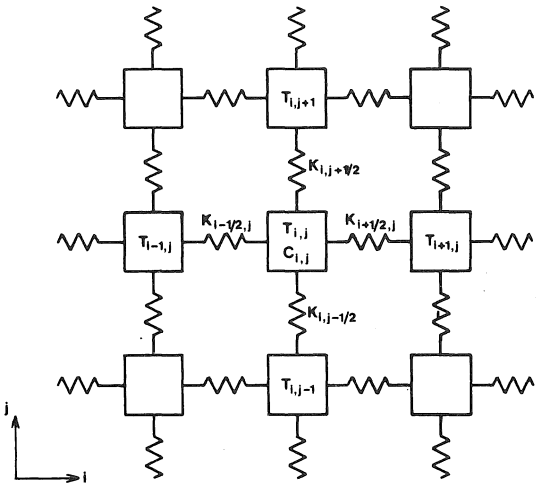


Figur 4.5.3. Schema grundat på en elektrisk analogi.

I den elektriska analogin motsvaras temperatur av spänning och värmeflöde av strömstyrka. Den elektriska analogin medför krav på definiering av en jordpotential. Detta

undviks genom användning av symboler enligt figur 4.5.2.

En del av en tvådimensionell gitterstruktur visas i figur 4.5.4.



Figur 4.5.4. Schematisk bild av en tvådimensionell gitterstruktur.

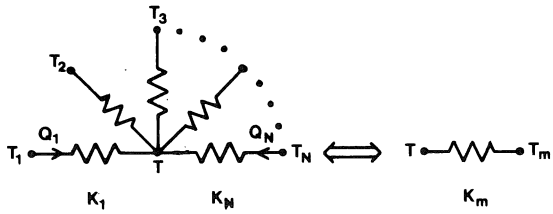
Man kan betrakta de enskilda cellerna som "uppsågade bitar" av den avbildade materien. Mellan angränsande bitar kan värme transporteras via kopplingskonduktanserna. Bilden avspeglar väl den enkla fysikaliska bakgrunden till den redovisade metoden.

En kontinuerlig beskrivning av temperaturen $T_{i,j}$ ges av:

$$C_{i,j}\frac{dT_{i,j}}{dt} = K_{i-1/2,j}(T_{i-1,j} - T_{i,j}) + K_{i+1/2,j}(T_{i+1,j} - T_{i,j}) + \tag{4.5.4}$$

$$K_{i,j-1/2}(T_{i,j-1} - T_{i,j}) + K_{i,j+1/2}(T_{i,j+1} - T_{i,j})$$

Låt en temperaturpunkt ha termisk kontakt med ett antal (N) andra temperaturpunkter enligt figur 4.5.5.



Figur 4.5.5. Reduktion av kopplingar till en temperaturpunkt.

Man har:

$$Q_i = (T_i - T)K_i \tag{4.5.5}$$

Nettoflödet Q (W) till centrumpunkten är:

$$\begin{aligned} Q &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} Q_i = \sum_{i=1}^{N}(T_i - T)K_i = (T_m - T)K_m \\ &\text{där } K_m = \textstyle\sum_{i=1}^{N} K_i \qquad \text{(W/K)} \\ T_m &= \frac{\sum_{i=1}^{N} T_i K_i}{K_m} \qquad (^o\text{C}) \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

Om det finns flera kopplingar till en temperaturpunkt kan dessa reduceras till en enda enligt (4.5.5-6). Se även kapitel 7.

Kapitel 5

STABILITETSTIDSSTEG

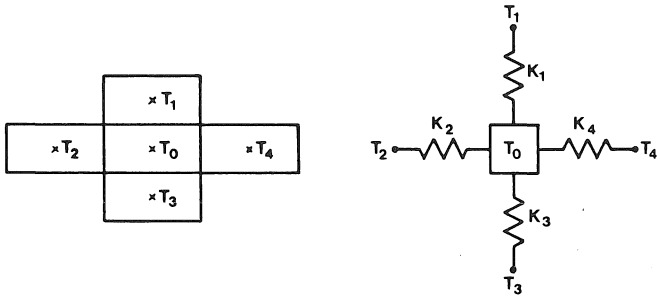
Vid lösning av värmeledningsekvationen enligt den i kapitel 4 beskrivna metoden delas tidsförloppet in i diskreta tidssteg. Om tidsstegets längd överskrider ett visst värde uppstår en orimlig oscillation i den enskilda cellens temperatur för varje nytt tidssteg. Den erhållna svängningen av temperaturen markerar tydligt att beräkningen genomförs med fel förutsättningar. Man talar om ett stabilitetstidssteg, vilket definierar en övre gräns för det vid iterationen använda tidssteget.

5.1 Längsta tidssteg för en cell

Tidsstegets maximala längd skall belysas på två olika sätt.

5.1.1 Tidsskala för en cell. Fysikalisk betraktelse

Figur 5.1.1 visar en del av en tvådimensionell ortogonal gitterstruktur. I figuren visas även schematiskt den termiska kopplingen mellan de fem cellerna.



Figur 5.1.1. Termisk koppling till omgivande celler för en cell i en tvådimensionell gitterstruktur.

Centrumcellens totala värmekapacitet är C_0 (J/K). Centrumcellens temperatur vid tiden t betecknas $T(t)$. De omgivande cellernas temperaturer $T_1 \ldots T_4$ är konstanta i tiden. Man har $K_i = 1/R_i$ (W/K). Det totala värmeflödet $Q(t)$ (W) till centrumcellen i figur 5.1.1 kan skrivas:

$$Q(t) = K_1(T_1 - T(t)) + K_2(T_2 - T(t)) + K_3(T_3 - T(t)) + K_4(T_4 - T(t)) \quad (5.1.1)$$

Omformulering ger:

$$Q(t) = (K_1 + K_2 + K_3 + K_4)\left(\frac{K_1T_1 + K_2T_2 + K_3T_3 + K_4T_4}{K_1 + K_2 + K_3 + K_4} - T(t)\right) \quad (5.1.2)$$

En ekvivalent formulering ges, i överensstämmelse med (4.5.5), av:

$$Q(t) = K_{ekv}(T_{ekv} - T(t)) \quad (5.1.3)$$

$$K_{ekv} = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 = \frac{1}{R_{ekv}}$$

$$T_{ekv} = \frac{K_1T_1 + K_2T_2 + K_3T_3 + K_4T_4}{K_1 + K_2 + K_3 + K_4}$$

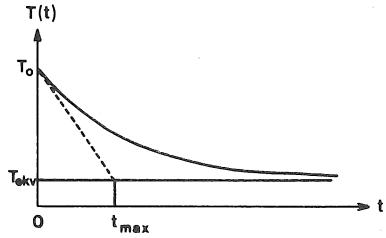
Figur 5.1.2. Ekvivalent omgivningstemperatur för centrumcellen.

Ekvationen (5.1.3) innebär att medelomgivningstemperaturen för centrumcellen i figur 5.1.1 är T_{ekv}. Se figur 5.1.2. Centrumcellens temperatur närmar sig slutvärdet T_{ekv} vid ökande tid. Differentialekvationen för centrumcellens temperatur när det totala värmeflödet till cellen formuleras enligt (5.1.3) är:

$$\begin{aligned} K_{ekv}(T_{ekv} - T(t)) &= C_0\frac{dT(t)}{dt} \\ T(0) &= T_0 \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Lösningen ges av:

$$T(t) = T_{ekv} + (T_0 - T_{ekv})e^{-\frac{K_{ekv}}{C_0}t} \quad (5.1.5)$$



Figur 5.1.3. Centrumcellens temperatur som funktion av tiden.

Vid tiden $t = 0$ är cellens temperatur T_0. Vid stora tider går temperaturen asymptotiskt mot värdet T_{ekv}. Se figur 5.1.3.

Vid den numeriska lösningen beräknas värmeflödet till centrumcellen vid tidsstegets början, dvs. i detta fall vid tiden $t = 0$. Enligt den använda metodens approximationer betraktas värmeflödet som konstant under tidssteget. Centrumcellens temperatur följer därför den analytiska lösningens tangent i punkten $t = 0$.

Av termodynamiska skäl kan celltemperaturen vid det beskrivna förloppet ej passera omgivningens temperatur. Vid tidpunkten $t = t_{max}$ sammanfaller cellens och omgivningens temperatur. Analys av (5.1.5) ger:

$$t_{max} = \frac{C_0}{K_{ekv}} = \frac{C_0}{K_1 + K_2 + K_3 + K_4} \tag{5.1.6}$$

Om tidssteget Δt väljs i intervallet $0 \leq \Delta t \leq t_{max}$ erhålls vid varje iteration en fysikaliskt acceptabel lösning. Ett annat val av Δt medför en fysikaliskt orimlig förändring under tidssteget.

En generalisering av (5.1.6) ger ett allmänt uttryck för en cells längsta tidsteg. Cellens totala värmekapacitet är C_0 (J/K). Den är termiskt kopplad till omgivande temperaturpunkter med n konduktanser K_i (W/K). Cellens längsta tidssteg Δt_{max} (s) ges då av:

$$\Delta t_{max} \, (= t_{max}) = \frac{C_0}{\sum_{i=1}^{n} K_i} \tag{5.1.7}$$

Vid genomförandet av ett tidsstegs beräkningar skall tidsstegets längd Δt väljas enligt:

$$\Delta t \leq \Delta t_{max} \tag{5.1.8}$$

Av figur 5.1.3 framgår att tidslängden t_{max} är ett mått på hur snabbt den betraktade cellens temperatur anpassar sig till en plötsligt förändrad omgivningstemperatur.

5.1.2 Stabilitetstidssteg. Egenskap hos differensekvationen

Värmeflödet till centrumcellen i figur 5.1.1 under ett tidssteg Δt bestäms av cellernas temperatur i början av tidssteget. Värmebalans ger:

$$(K_1(T_1 - T(0)) + K_2(T_2 - T(0)) + K_3(T_3 - T(0)) + K_4(T_4 - T(0)))\Delta t =$$

$$= C_0(T(\Delta t) - T(0)) \tag{5.1.9}$$

$$\text{där} \qquad K_i = \frac{1}{R_i}$$

Omformulering ger (se även (4.2.2-3)):

$$T(\Delta t) = \frac{K_1 \Delta t}{C_0} T_1 + \frac{K_2 \Delta t}{C_0} T_2 + \frac{K_3 \Delta t}{C_0} T_3 + \frac{K_4 \Delta t}{C_0} T_4 \tag{5.1.10}$$

$$+ \left(1 - \frac{\Delta t}{C_0}(K_1 + K_2 + K_3 + K_4)\right) T(0)$$

Temperaturen $T(\Delta t)$ i centrumcellen är ett viktat medelvärde av temperaturerna i de fem cellerna vid tidsstegets start, $\Delta t = 0$.

Stabilitetskravet för ett iterativt schema, där varje cell förs framåt i tiden enligt formuleringen i (5.1.10), är att de olika vikterna i högerledet är ickenegativa och att summan av dem är 1. Se till exempel [*Ames, s 45*]. Den sista termen ger följande villkor för Δt:

$$1 - \frac{\Delta t}{C_0}(K_1 + K_2 + K_3 + K_4) \geq 0 \tag{5.1.11}$$

eller

$$\Delta t \leq \frac{C_0}{K_1 + K_2 + K_3 + K_4} = \Delta t_{stab} = \Delta t_{max} \tag{5.1.12}$$

Det av stabilitetsskäl erhållna uttrycket för tidsstegets övre gräns, Δt_{stab}, är identiskt med det som på fysikaliska grunder erhölls i avsnitt 5.1.1.

Tidssteget Δt_{stab} utgörs av kvoten mellan cellens totala värmekapacitet (J/K) och summan av dess konduktanser (W/K) till omgivande temperaturpunkter. Den analytiska beskrivningen (5.1.5) av centrumcellens avklingning mot den ekvivalenta omgivningstemperaturen kan således skrivas:

$$T(t) = T_{ekv} + (T(0) - T_{ekv})e^{-\frac{t}{\Delta t_{stab}}} \tag{5.1.13}$$

Stabilitetstidssteget för en cell är ett mått på hur snabbt cellens temperatur anpassar sig till omgivningens temperatur. Ju mindre cellen är desto kortare blir dess stabilitetstidssteg (se avsnitt 5.2.1) och desto snabbare kan den anpassa sig. Storleken av de enskilda cellerna i en cellstruktur, vilken skall återge ett visst temperaturförlopp, bör anpassas till hur snabbt temperaturförloppet sker i olika delar av cellstrukturen. Se avsnitt 6.2-3.

5.2 Stabilitetstidsstegets längd

Längden av stabilitetstidssteget skall anges för några grundläggande situationer.

5.2.1 Stabilitetstidssteg i olika gitterstrukturer

Stabilitetstidsstegets längd (s) skall anges för några olika gitterstrukturer. Enligt (5.1.7) och (5.1.12) gäller för en cell:

$$\Delta t_{stab} = \frac{C_0}{\sum_{i=1}^{n} K_i} \tag{5.2.1}$$

Summeringen i nämnaren skall omfatta cellens samtliga konduktanser till angränsande temperaturpunkter.

I en plan *endimensionell* struktur väljs den konstanta cellstorleken Δx. Randytan mellan angränsande celler har arean A (m^2). Man erhåller:

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{\lambda}{\Delta x} A \qquad i = 1,2 && \text{(W/K)} \\ C_0 &= C \Delta x A && \text{(J/K)} \\ \Delta t_{stab} &= \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \frac{C}{\lambda} = \frac{\Delta x^2}{2a} && \text{(s)} \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Stabilitetstidssteget är oberoende av randarean A.

I en *tvådimensionell* Cartesisk struktur väljs de konstanta cellstorlekarna Δx och Δy i x- respektive y-led. Cellernas utsträckning i den tredje dimensionen är L (m). Man erhåller:

$$\begin{aligned} x\text{-led:} \quad K_i &= \frac{\lambda}{\Delta x} \Delta y L && \text{(W/K)} \\ y\text{-led:} \quad K_i &= \frac{\lambda}{\Delta y} \Delta x L && \text{(W/K)} \\ C_0 &= C \Delta x \Delta y L && \text{(J/K)} \\ \Delta t_{stab} &= \frac{1}{2a\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right)} && \text{(s)} \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Om $\Delta x = \Delta y$ erhålls:

$$\Delta t_{stab} = \frac{\Delta x^2}{4a} \qquad \text{(s)} \tag{5.2.4}$$

Stabilitetstidssteget är oberoende av storheten L.

I en *tredimensionell* Cartesisk struktur erhålls:

$$
\begin{aligned}
&x\text{-led:} \quad K_i = \frac{\lambda}{\Delta x}\Delta y \Delta z && \text{(W/K)} \\
&y\text{-led:} \quad K_i = \frac{\lambda}{\Delta y}\Delta x \Delta z && \text{(W/K)} \\
&z\text{-led:} \quad K_i = \frac{\lambda}{\Delta z}\Delta x \Delta y && \text{(W/K)} \\
&C_0 = C\Delta x \Delta y \Delta z && \text{(J/K)} \\
&\Delta t_{stab} = \frac{1}{2a\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}\right)} && \text{(s)}
\end{aligned}
\tag{5.2.5}
$$

Om $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ erhålls:

$$
\Delta t_{stab} = \frac{\Delta x^2}{6a} \qquad \text{(s)} \tag{5.2.6}
$$

Stabilitetstidssteget för en gittercell är proportionellt mot kvadraten på cellens linjära dimension. Tidssteget skall anges för några cellstorlekar i en tredimensionell gitterstruktur. Värmeledningsförmågan är $\lambda = 2$ W/mK och den volymetriska värmekapaciteten är $C = 2 \cdot 10^6$ J/m^{3}K.

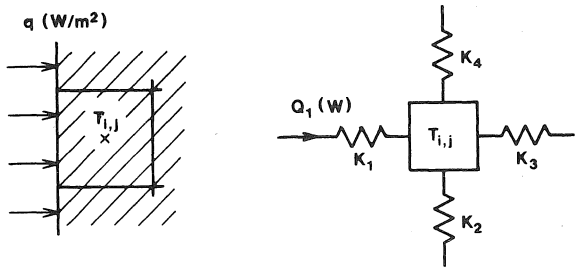
$\Delta x = \Delta y = \Delta z$ (m)	Δt_{stab}
0.001	0.17 s
0.01	17 s
0.1	28 min
0.3	4.2 tim
1.0	46 tim
3.0	420 tim
10.0	4600 tim
	≈ 0.53 år

Tabell 5.2.1. Stabilitetstidssteg i en tredimensionell gitterstruktur.

Tabell 5.2.1 ger stabilitetstidssteget för olika cellstorlekar i området 0.001 till 10 m. Ju större cellen är desto längre tid behöver den för att komma i jämvikt med omgivningen, dvs för att reagera på temperaturförändringar i omgivningen (se till exempel formel (5.1.13)). Det är därför till exempel orimligt att använda cellstorlekar som har stabilitetstidssteget 50 timmar för att beskriva ett förlopp som varierar med 24-timmars periodicitet. Cellstorleken måste av fysikaliska skäl anpassas till det förlopp som skall simuleras. Se även avsnitt 6.2-3.

5.2.2 Stabilitetstidssteg vid givet randvärmeflöde

Betrakta en cell vars ena rand sammanfaller med den yttre randen av ett beräkningsområde. Värmeflödet genom randen har ett föreskrivet värde q (W/m^2). Se figur 5.2.1.



Figur 5.2.1. Randcell med givet värmeflöde.

Värmeflödet genom den cellrand som sammanfaller med områdesranden har det konstanta värdet Q_1 (W). Detta värde är explicit givet och är således icke resultat av en approximativ formulering som utnyttjar en momentan temperaturdifferens över konduktansen K_1 mellan cellens temperaturpunkt och områdesranden. I analogi med (5.1.1-6) kan det totala värmeflödet $Q(t)$ (W) till den betraktade randcellen skrivas:

$$Q(t) = Q_1 + K_2(T_2 - T(t)) + K_3(T_3 - T(t)) + K_4(T_4 - T(t)) \tag{5.2.7}$$

Omformulering ger:

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_1 + K_{ekv}(T_{ekv} - T(t)) \\ &= K_{ekv}(T_{ekv} + \frac{Q_1}{K_{ekv}} - T(t)) \\ K_{ekv} &= K_2 + K_3 + K_4 \\ T_{ekv} &= \frac{K_2T_2+K_3T_3+K_4T_4}{K_{ekv}} \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

I analogi med (5.1.5) ges den kontinuerliga lösningen av:

$$T(t) = T_{ekv} + \frac{Q_1}{K_1} + \left(T(0) - T_{ekv} - \frac{Q_1}{K_1}\right) e^{-\frac{K_{ekv}}{C_0}t} \tag{5.2.9}$$

Cellens temperatur närmar sig asymptotiskt värdet $T_{ekv} + Q_1/K_1$. Det längsta fysikaliskt acceptabla tidssteget vid den numeriska lösningen ges av:

$$\Delta t \leq t_{max} = \frac{C_0}{K_2 + K_3 + K_4} \tag{5.2.10}$$

Vid bestämningen av en cells stabilitetstidssteg enligt formel (5.1.7) skall de konduktanser genom vilka värmeflödet är föreskrivet ej tas med i konduktanssumman.

Vid *volumetrisk* värmeutveckling i en cell har man ett extra värmetillskott till cellen under tidssteget. Värmeflödet genom cellens ränder bestäms på vanligt sätt av de omgivande temperaturerna. Därmed skall cellens samtliga konduktanser till omgivande temperaturpunkter tas med vid bestämning av cellens stabilitetstidssteg.

5.3 Tidsstegets betydelse för lösningen

I avsnitt 5.1 visades att iterationstidssteget måste väljas mindre än det fysikaliskt erhållna övre gränsvärdet $\Delta t_{max} = \Delta t_{stab}$. I detta avsnitt visas hur valet av Δt påverkar den iterativa lösningen.

Betrakta ett tvådimensionellt gitter med oändlig utsträckning. Alla konduktanser K_i har samma värde K. Temperaturen i cell (i, j) vid iteration n betecknas $T_{i,j,n}$. En kombination av (5.1.10) och (5.1.12) ger:

$$T_{i,j,n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta t_{stab}}\right) T_{i,j,n} + \frac{\Delta t}{4\Delta t_{stab}}(T_{i-1,j,n} + T_{i+1,j,n} + T_{i,j-1,n} + T_{i,j+1,n}) \tag{5.3.1}$$

Uttrycket (5.3.1) visar hur en ny temperatur vid tiden $(n+1)\Delta t$ kan beräknas för varje cell med hjälp av de kända temperaturerna vid tiden $n\Delta t$. Välj tidssteget Δt så att:

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_{stab}} = 1 + \epsilon \tag{5.3.2}$$

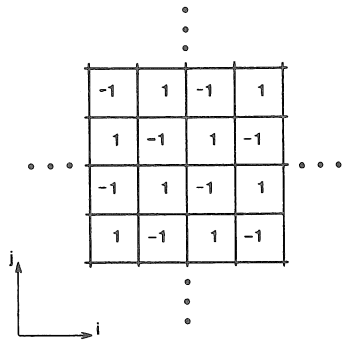
Följande iterationsformel erhålls:

$$T_{i,j,n+1} = -\epsilon \cdot T_{i,j,n} + \frac{1+\epsilon}{4}(T_{i-1,j,n} + T_{i+1,j,n} + T_{i,j-1,n} + T_{i,j+1,n}) \tag{5.3.3}$$

Vid tidpunkten $n = 0$ väljs begynnelsetemperaturer enligt figur 5.3.1. Gittret har oändlig utsträckning. Temperaturen i en cell (i, j) ges av $T_{i,j,0} = (-1)^i(-1)^j$.
Vid tidpunkten $n = 1$ erhålls:

$$\text{'1'-cell:} \quad T_{i,j,1} = -\epsilon \cdot 1 + \frac{1+\epsilon}{4}(-1-1-1-1) = -1 - 2\epsilon = (-(1+2\epsilon))^1 T_{i,j,0}$$

$$\text{'0'-cell:} \quad T_{i,j,1} = -\epsilon \cdot (-1) + \frac{1+\epsilon}{4}(1+1+1+1) = 1 + 2\epsilon = (-(1+2\epsilon))^1 T_{i,j,0}$$



Figur 5.3.1. Begynnelsetemperaturer.

Efter den första iterationen har man:

$$T_{i,j,1} = (-1)^i \cdot (-1)^j \cdot (-(1+2\epsilon))^1$$

Temperaturen i samtliga celler har samma absolutvärde, men tecknet är olika i celler med gemensam rand. Man erhåller följande uttryck för temperaturen i en cell (i, j) vid tidpunkten n:

$$T_{i,j,n} = T_{i,j,0}(-(1+2\epsilon))^n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.3.4}$$

Om $\epsilon > 0$, dvs om $\Delta t > \Delta t_{stab}$, växer beloppet av temperaturen i en gittercell obegränsat med antalet iterationer. Temperaturen byter tecken för varje iteration. Om $\epsilon = 0$, dvs. om $\Delta t = \Delta t_{stab}$, ges temperaturen i en gittercell av:

$$T_{i,j,n} = (-1)^n T_{i,j,0} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.3.5}$$

Den erhållna lösningen varken konvergerar eller divergerar. Om $\epsilon < 0$, dvs. $\Delta t < \Delta t_{stab}$, blir lösningen ovillkorligt stabil.

Den numeriska lösningens karaktär vid olika val av Δt skall belysas av två fall. I det första fallet väljs en tvådimensionell gitterstruktur så att uttrycket (5.3.1) kan användas vid iterationen. Tidssteget Δt väljs enligt $\Delta t = 2\Delta t_{stab}$. Man erhåller:

$$T_{i,j,n+1} = -T_{i,j,n} + \frac{1}{2}(T_{i-1,j,n} + T_{i+1,j,n} + T_{i,j-1,n} + T_{i,j+1,n}) \tag{5.3.6}$$

Temperaturen i cellstrukturen följs i figur 5.3.2 under tre tidssteg. Begynnelsetemperaturen i området ges i figuren av $n = 0$. I det oändliga gittret har alla celler starttemperaturen 0 utom en enda cell, som har värdet 1. Då temperaturfältet är symmetriskt runt denna punkt, återges i figuren en representativ fjärdedel för $n = 1$, 2 och 3.

0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	
0	0	1	0	0	$n = 0$
0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	

0	0	0	
0.5	0	0	
-1	0.5	0	$n = 1$

0	0	0	0	
0.25	0	0	0	
-1	0.5	0	0	
2	-1	0.25	0	$n = 2$

0.125	0	0	0	
-0.75	0.375	0	0	
2.625	-1.5	0.375	0	
-4	2.625	-0.75	0.125	$n = 3$

Figur 5.3.2. Iteration med $\Delta t = 2\Delta t_{stab}$.

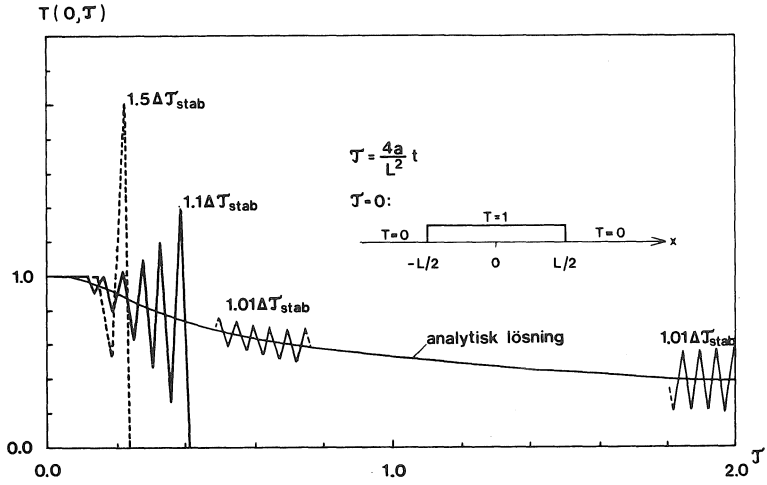
Exemplet visar hur temperaturen i en cell oscillerar med varje iteration. Oscillationens amplitud växer snabbt med antalet iterationer. Med det valda tidssteget erhålls redan efter få iterationer en karakteristisk felaktig temperaturfördelning i området. Trots den felaktiga temperaturfördelningen är det totala energiinnehållet oförändrat genom varje iteration.

Som fall två väljs följande endimensionella värmeledningsproblem. Begynnelsevillkoret är:

$$T(x,0) = \begin{cases} 1 & -L/2 \leq x \leq L/2 \\ 0 & |x| > L/2 \end{cases} \tag{5.3.7}$$

En analytisk lösning för $x = 0$ ges i avsnitt 10.4.2. Man har:

$$T(0,t) = \operatorname{erf}\left(\frac{L}{2\sqrt{4at}}\right) \tag{5.3.8}$$



Figur 5.3.3. Jämförelse mellan analytisk lösning och numerisk lösning med $\Delta t > \Delta t_{stab}$.

I figur 5.3.3 ges den analytiska lösningen med heldragen linje. Tiderna är skalade till dimensionslös form enligt:

$$\tau = \frac{4a}{L^2} t \tag{5.3.9}$$

Figuren ger även några numeriskt erhållna lösningar till problemet. Vid beräkningen av dessa har x-axeln indelats i en gitterstruktur med konstant cellstorlek Δx. Denna har valts så att längden L indelas i 9 celler. Resultatet ges från lösningar med tre olika tidsstegslängder. Dessa utgörs av stabilitetstidssteget $\Delta\tau_{stab}$ multiplicerat med faktorerna 1.5, 1.1 och 1.01.

Det framgår att temperatursvängningarna i lösningen mycket snabbt blir kraftiga för de två längre tidsstegen med faktorerna 1.5 respektive 1.1. Med faktorn 1.01 är utvecklingen av instabiliteten förhållandevis långsam. Den erhållna lösningen för den betraktade punkten har samma karakteristiska utseende som beskrivs av uttrycket (5.3.4).

iteration	f 0.90	0.99	1.00	1.01
4	0.018	0.024	0.024	0.25
5	-0.003	-0.016	-0.018	-0.021
6	0.014	0.032	0.035	0.039
7	-0.006	-0.032	-0.036	-0.041
8	0.009	0.036	0.042	0.047
9	-0.006	-0.038	-0.046	-0.054
$\vdots$				
$\tau \geq 1.90$				
n	-0.001	0.008	-0.041	-0.184
$n+1$	-0.001	-0.009	-0.038	0.185
$n+2$	-0.001	0.007	-0.040	-0.191
$n+3$	-0.001	-0.009	0.039	0.192
$n+4$	-0.001	0.006	-0.040	-0.196

Tabell 5.3.1. $T_{num}(0,\tau) - T_{anal}(0,\tau)$ vid olika tidsstegs längder $f \cdot \Delta\tau_{stab}$.

I tabell 5.3.1 ges avvikelsen mellan den numeriska och den analytiska lösningen vid användning av olika tidsstegslängder. Resultat ges för ett antal konsekutiva tidssteg efter tidpunkterna $t = 0$ (beräkningsstarten) och $t = 1.90$. Stabilitetstidssteget är $\Delta t_{stab} = 0.025$. Då området $|x| < L$ omfattar nio celler är cellen $x = 0$ vid beräkningsstarten på varje sida omgiven av 4 celler med temperaturen ett. Därför ändras temperaturen i punkten $x = 0$ först under det femte tidssteget. Tabellen visar hur felets belopp ökar när $\Delta t > \Delta t_{stab}$. Med $\Delta t = 0.99\Delta t_{stab}$ avtar felet långsamt och med $\Delta t = 0.90\Delta t_{stab}$ avtar det snabbt. När $\Delta t = \Delta t_{stab}$ är felets belopp ungefär oförändrat genom beräkningen. Se även avsnitt 6.1.

Kapitel 6

VAL AV GITTER OCH TIDSSTEG

Avsnittet belyser hur valet av gitterstruktur och tidsstegslängd påverkar den erhållna lösningen vid ett antal grundläggande problemställningar.

6.1 Några karakteristiska egenskaper hos lösningsmetoden

Några karakteristiska egenskaper hos lösningsmetoden skall studeras för ett endimensionellt fall som avser temperaturutjämning i en stav med obegränsad utsträckning. I startögonblicket har staven temperaturen 0 utom inom en begränsad delsträcka där temperaturen är 1. Problemet definieras i avsnitt 10.4.2 med $T_1 = 1$ och $L = 1$.

Lösningen är:

$$T'(x',\tau) = 0.5\left\{\mathrm{erf}\left(\frac{0.5-x'}{\sqrt{\tau}}\right) + \mathrm{erf}\left(\frac{0.5+x'}{\sqrt{\tau}}\right)\right\}$$
$$\tau = \frac{4at}{L^2} \tag{6.1.1}$$

Beräkningsresultatet skall jämföras med den exakta lösningen för de tidpunkter som representeras av de sex första tidsstegen .

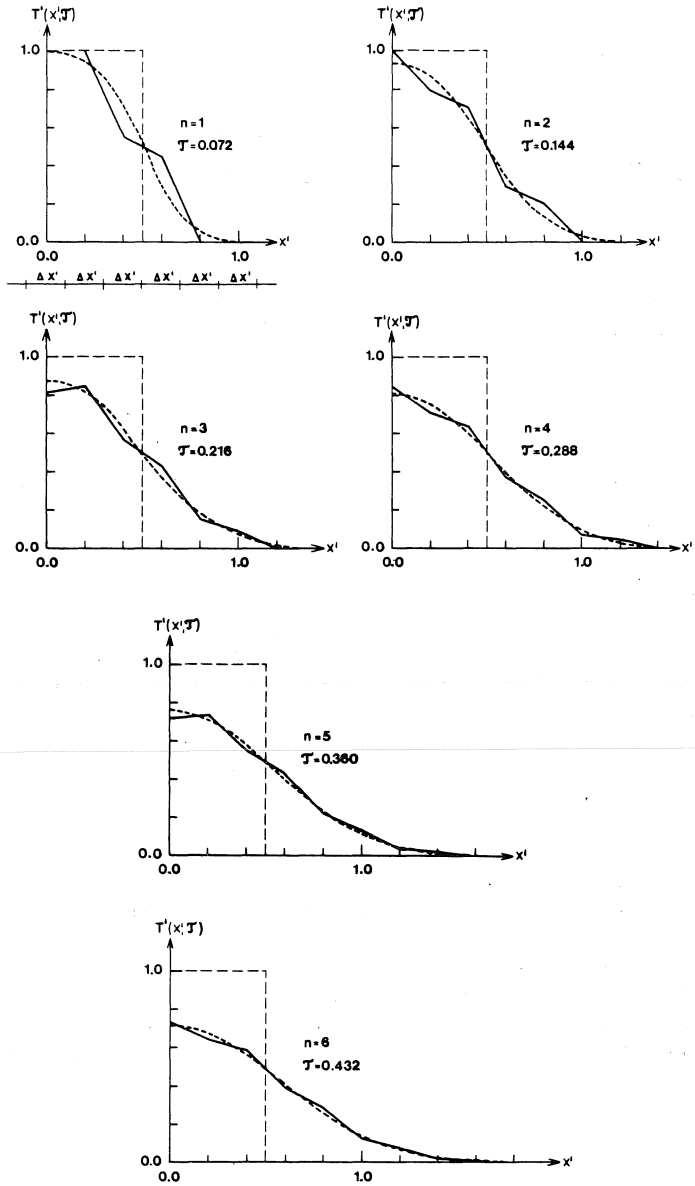
Koordinataxeln delas in i en cellstruktur med den konstanta cellstorleken $\Delta x' = 0.2$. Det vid tidpunkten $t = 0$ uppvärmda området omfattar fem celler. Cellstrukturen är grov men ger ändå kvalitativ information om lösningsmetodens egenskaper.

Enligt formel (5.2.2) är stabilitetstidssteget Δt_{stab} (s) vid plan, endimensionell värmeledning:

$$\Delta t_{stab} = \frac{\Delta x^2}{2a}$$
$$a = \frac{\lambda}{C} \tag{6.1.2}$$

Vid skalning till dimensionslös form enligt (6.1.1) är stabilitetstidssteget:

$$\Delta\tau_{stab} = \frac{4a}{L^2}\Delta t_{stab} = 2\left(\frac{\Delta x}{L}\right)^2 = 2\left(\Delta x'\right)^2 = 0.08 \tag{6.1.3}$$



Figur 6.1.1. Analytisk och numerisk lösning vid temperaturavklingning. (Fem celler).

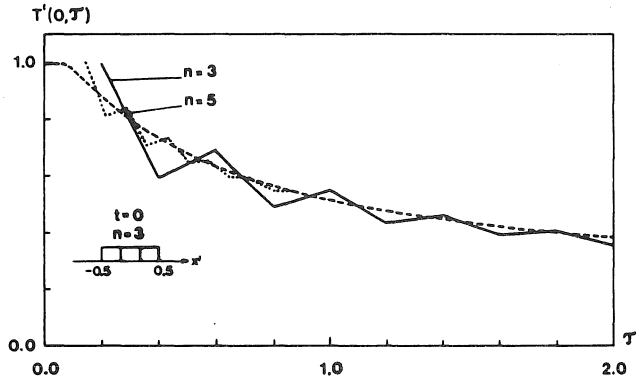
Beräkningstidssteget $\Delta\tau$ väljs till:

$$\Delta\tau = 0.9\Delta\tau_{stab} = 0.072 \tag{6.1.4}$$

I figur 6.1.1 visas den exakta och den numeriska lösningen för de sex första tidsstegen. Starttemperaturen är markerad med streckad linje.

Vid varje tidpunkt har varannan cell för hög och varannan cell för låg temperatur. Temperaturen i en godtycklig cell varierar för varje tidssteg mellan för högt och för lågt värde. På grund av den grova cellstrukturen är det maximala absoluta felet i den numeriska lösningen under de första tidsstegen ganska stort, cirka 0.15. Därefter minskar felet för varje tidssteg. Efter det sjätte tidssteget är felet mindre är 0.05.

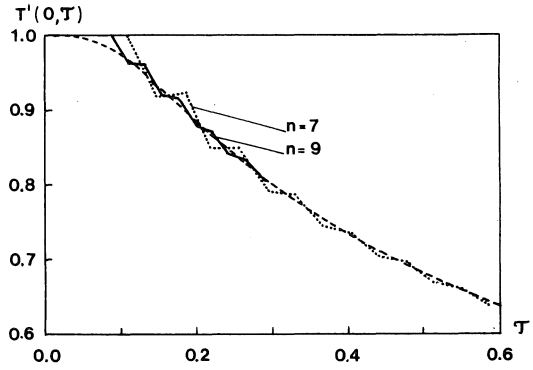
Värmeflödet genom en cellrand är proportionellt mot temperaturgradienten, dvs mot temperaturkurvans lutning, vid cellranden. Figur 6.1.1 illustrerar hur det numeriskt beräknade värmeflödet genom t ex cellranden vid $x' = 0.5$ för varje tidssteg alternerar mellan ett för högt och ett för lågt värde. Avvikelser från det korrekta värdet minskar med tiden.



Figur 6.1.2. Analytisk och numerisk lösning för centrumpunktens temperatur. (3 och 5 celler).

I figur 6.1.2-3 visas temperaturen i punkten $x' = 0$ som funktion av tiden. Vid den numeriska beräkningen har den konstanta cellstorleken $\Delta x'$ valts så att området $|x'| < 0.5$ delats in i 3, 5, 7 och 9 celler. För varje cellstruktur har beräkningen genomförts så att tidssteget Δt är 90% av stabilitetstidssteget för den aktuella gitterstrukturen.

Figurerna visar att precisionen i beräkningarna snabbt ökar med antalet celler. Med 7 celler är det största absoluta felet 0.03. För en given cellstruktur avtar det absoluta felet med antalet genomräknade tidssteg. Figurerna visar även att den numeriskt beräknade centrumtemperaturen med tiden sjunker under det korrekta värdet. Fenomenet beror på så kallad dispersion, vilket är en effekt av den diskreta beskrivningen av värmeledningsprocessen. Resultatet kan ses som en fiktiv ökning av värmeledningsförmågan.



Figur 6.1.3. Analytisk och numerisk lösning för centrumpunktens temperatur. (7 och 9 celler).

I det betraktade fallet erhålls således en något förhöjd värmetransport ut från det varma området, $|x'| < 0.5$. Vid beräkning med fem celler ligger centrumcellens temperatur hela tiden under det analytiska värdet för tider $\tau > 0.90$. För den näst yttersta och yttersta cellen inträffar detta efter $\tau = 1.00$ respektive $\tau = 1.08$. Temperaturen i cellerna i området $|x'| > 0.5$ erhåller på motsvarande sätt för höga värden (fig. 6.1.1). Medelfelet i centrumcellen är vid tiden $\tau \approx 0.9$ av storleksordningen 0.01.

τ	$T'(0,\tau)$		$\bar{T}'(\tau)$		
	an.	num.	an.	num.	
1.00	0.520	0.551	0.486	0.466	3 celler
2.00	0.383	0.365	0.369	0.369	
4.00	0.276	0.273	0.271	0.270	
5.80	0.231	0.230	0.228	0.227	
1.080	0.504	0.496	0.472	0.470	5 celler
2.088	0.375	0.373	0.362	0.361	
4.248	0.268	0.268	0.263	0.263	
5.688	0.233	0.233	0.230	0.230	
1.065	0.507	0.504	0.475	0.474	7 celler
2.167	0.368	0.369	0.356	0.356	
4.004	0.276	0.276	0.271	0.270	
5.841	0.230	0.230	0.227	0.227	
1.089	0.502	0.501	0.471	0.470	9 celler
2.200	0.366	0.366	0.354	0.354	
4.200	0.270	0.270	0.265	0.265	

Tabell 6.1.1. Analytisk och numerisk lösning vid olika cellindelning.

I tabell 6.1.1 visas $T'(0,\tau)$ och $\bar{T}'(\tau)$ (medeltemperatur inom området $|x'| < 0.5$).

Av tabellen framgår att felet avtar med ökande τ. Den för snabba värmetransporten vid tiden $\tau \leq 1.0$ medför att hela temperaturprofilen "slätas ut" för snabbt. Därmed blir värmetransporten mindre än enligt den analytiska lösningen, och den "numeriska processen" går långsammare. Avvikelsen från den analytiska lösningen blir i viss utsträckning självkorrigerande.

I tabell 6.1.3 ges kvoten mellan den numeriskt beräknade temperaturen och det analytiska värdet. Kvoten ges för varje tidssteg. Eftersom tidssteget $\Delta\tau = 0.9\Delta\tau_{stab}$ är olika långt för de olika cellstrukturerna betyder till exempel tidpunkten efter tidssteg 3 olika tider för de olika strukturerna. Tabell 6.1.2 ger tidsstegets längd för de olika fallen.

cell-antal	$\Delta\tau = 0.9\Delta\tau_{stab}$
3	0.200
5	0.072
7	0.037
9	0.022

Tabell 6.1.2. Tidsstegets längd för de olika cellindelningarna.

	cellantal				
tidssteg	3	5	7	9	
1	1.129	1.108	1.000	1.000	
2	0.808	1.066	1.009	1.001	
3	1.089	0.938	1.034	1.006	
4	0.863	1.041	0.982	1.018	$\frac{T'(0,\tau)}{T'_{an}(0,\tau)}$
5	1.060	0.945	1.023	0.997	
6	0.906	1.024	0.978	1.015	
7	1.036	0.957	1.013	0.994	
8	0.934	1.011	0.981	1.010	
9	1.020	0.969	1.008	0.993	
10	0.953	1.005	0.984	1.006	

Tabell 6.1.3. Kvot mellan numeriskt beräknad temperatur och analytiskt värde, $T'(0,\tau)$.

Det maximala felet i punkten $x' = 0$ är för de första tio tidsstegen 19, 11, 3 och 2 procent för indelningarna med 3, 5, 7 respektive 9 celler i området $|x'| < 0.5$. Det momentana felet avtar snabbt med cellantalet.

Det är karakteristiskt att de numeriskt beräknade temperaturerna för varje tidssteg pendlar runt det korrekta värdet. Detta gäller även för till exempel värmeflödet i punkterna $x' = -0.5$ och $x' = 0.5$. Man kan därför förvänta sig att det från beräkningsstarten ackumulerade värmeflödet genom dessa punkter skall ha större precision

än de momentana värdena. Som mått på det ackumulerade värmeflödet från området $|x'| < 0.5$ tas medeltemperaturen inom området. Kvoten mellan den numeriskt beräknade och den korrekta medeltemperaturen ges i tabell 6.1.4.

	cellantal			
tidssteg	3	5	7	9
1	0.936	0.966	0.976	0.983
2	1.036	1.020	1.013	1.010
3	0.944	0.985	0.990	0.993
4	1.019	1.010	1.006	1.005
5	0.959	0.989	0.996	0.996
6	1.009	1.005	1.004	1.003
7	0.970	0.990	0.997	0.997
8	1.002	1.000	1.003	1.003
9	0.977	0.991	0.999	0.999
10	1.000	0.998	1.000	1.001

$$\frac{\bar{T}'(\tau)}{\bar{T}'_{an}(\tau)}$$

Tabell 6.1.4. Kvot mellan beräknat och korrekt värde på medeltemperaturen i området $|x'| < 0.5$.

Av tabellen framgår att felet i medeltemperaturen, dvs i energibalansen för området $|x'| < 0.5$, är klart mindre än felet i de momentana värdena i enskilda punkter.

I tabell 6.1.5 visas hur kvoten mellan beräknad och korrekt temperatur i punkten $x' = 0$ är beroende av det använda tidssteget. Detta har varierats mellan värdena 20.0 och 99.9 procent av stabilitetstidssteget. För de olika fallen ges felet för två på varandra följande tidssteg vid de skalade tidpunkterna $\tau = 0.2$, 0.6 och 1.0. Vid tiden $\tau = 1.0$ har temperaturen i punkten $x' = 0$ fallit till ungefär hälften av begynnelsetemperaturen. Koordinataxeln är indelad i en cellstruktur med konstant cellstorlek så att området $|x'| < 0.5$ indelas i nio celler.

	f $(\Delta\tau = f \cdot \Delta\tau_{stab})$							
τ	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.95	0.99	0.999
0.2	1.002	1.002	1.001	1.001	0.993	1.021	1.040	1.046
$0.2 + \Delta\tau$	1.002	1.002	1.001	1.000	1.005	0.979	0.955	0.948
$\vdots$								
0.6	1.002	1.001	0.999	0.997	0.996	0.990	1.047	1.075
$0.6 + \Delta\tau$	1.002	1.001	0.999	0.997	0.997	1.001	0.945	0.915
$\vdots$								
1.0	1.002	1.000	0.999	0.998	0.997	0.998	1.038	1.083
$1.0 + \Delta\tau$	1.002	1.000	0.999	0.998	0.997	0.996	0.956	0.910

Tabell 6.1.5. Kvot mellan beräknad och korrekt temperatur i punkten $x' = 0.0$ (9 celler).

Den bästa precisionen erhålls i intervallet:

$$0.4\Delta\tau_{stab} < \Delta\tau \leq 0.6\Delta\tau_{stab}$$

Felkurvan är flack upp till $\Delta\tau = 0.95\Delta\tau_{stab}$. Precisionen i de momentana värdena sjunker avsevärt när tidssteget väljs i närheten av stabilitetsgränsen. I tabell 6.1.6 visas på motsvarande sätt felet i medeltemperaturen inom området $|x'| < 0.5$.

τ	0.9	0.95	0.99	0.999
0.2	0.999	1.004	1.009	1.010
	1.001	0.996	0.991	0.990
0.6	0.999	0.998	1.004	1.007
	0.999	0.999	0.993	0.989
1.0	0.999	0.999	1.003	1.007
	0.999	0.998	0.994	0.989

$$\frac{\bar{T}'(\tau)}{\bar{T}'_{an}(\tau)}$$

Tabell 6.1.6. Kvot mellan beräknad och korrekt temperatur inom området $|x'| < 0.5$.

I analogi med tidigare resonemang är felet avsevärt mindre i medelvärdena än i de enskilda punkterna. Felet är här litet även i närheten av stabilitetsgränsen.

6.2 Grundläggande delprocess. Temperatursteg vid rand

En i tiden godtycklig varierande randtemperatur kan med önskad precision beskrivas som en i tiden sträckvis konstant funktion. Enligt superpositionsprincipen, avsnitt 3.7, kan ett sådant problem lösas som summan av ett antal delproblem, där varje delproblem omfattar ett temperatursteg vid randen. Beräkning av den resulterande temperaturfördelningen efter ett temperatursteg vid randen är därför av grundläggande betydelse.

6.2.1 Gitterstruktur och tidsskala

I en cellstruktur representerar varje cell ett delområde i den studerade geometriska volymen. Varje cell bör vara anpassad till det temperaturförlopp som cellens temperaturpunkt skall representera (se avsnitt 5.1.1-2).

Betrakta ett endimensionellt halvoändligt plant fall ($x \geq 0$) där randtemperaturen ($x = 0$) varierar enligt någon tidsberoende funktion. Denna randtemperatur kan med önskad precision beskrivas som en summa av temperatursteg.

Problemet definieras i skalad form av:

$$T'(x,0) = 0 \qquad x > 0$$
$$T'(0,t) = 1 \qquad t > 0 \tag{6.2.1}$$

Lösningen ges enligt (10.1.3) av:

$$T'(x,t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4at}}\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{4at}}} e^{-\xi^2}\,d\xi \tag{6.2.2}$$

Temperaturfördelningens förändringshastighet i en punkt ges av:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{4a\pi}} \cdot \frac{x}{t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4at}} \tag{6.2.3}$$

Tidpunkten för extremvärde i en punkt ges av:

$$t = \frac{x^2}{6a} \tag{6.2.4}$$

Den snabbaste temperaturförändringen (1/s) i en punkt ges av:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{max} = \frac{a}{x^2}\sqrt{\frac{54}{\pi}} \cdot e^{-3/2} \approx 0.9251\frac{a}{x^2} \tag{6.2.5}$$

Enligt avsnitt 5.1 är stabilitetstidssteget för en cell i en gitterstruktur ett mått på hur snabbt cellens temperatur kan följa förändringar i de omgivande temperaturerna. Betrakta en gitterstruktur av följande konstruktion:

$$\Delta x_i = 2^{i-2}\Delta x_1 \qquad i \geq 2 \tag{6.2.6}$$

Gitterstrukturen har egenskapen att för varje cell som adderas fördubblas strukturens utsträckning. Koordinaten x_i för temperaturpunkten i cell i ges av:

$$x_i = 3 \cdot 2^{i-3}\Delta x_1 \tag{6.2.7}$$

Stabilitetstidssteget för cell i ges av:

$$\Delta t_{stab,i} = 2^{2i-5} \cdot \frac{\Delta x_1^2}{a} \tag{6.2.8}$$

Av avsnitt 5.1 framgår att förändringshastigheten för en cell, med den använda beskrivningen, ges av den streckade linjen i figur 5.1.3. Med en skalad temperaturbeskrivning, $T_0 - T_{ekv} = 1$, ges förändringshastigheten (1/s) för cell i av:

$$\frac{1}{\Delta t_{stab,i}} = \frac{a}{2^{2i-5} \cdot \Delta x_1^2} = \frac{4.5a}{(x_i)^2} \tag{6.2.9}$$

Varje cell i cellstrukturen har en tidsskala som medför att dess förändringshastighet är direkt proportionell mot den enligt (6.2.5) analytiskt funna maximala förändringshastigheten. Proportionalitetskonstanten har för samtliga celler samma värde för den punkt som representerar cellens temperatur. Den föreslagna typen av cellstruktur inne-

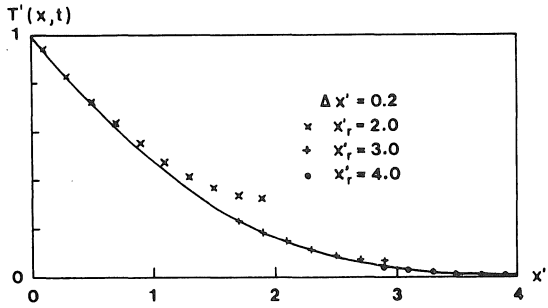
bär en anpassning till varje transient förlopp vid en plan yta.

Gitterstrukturens inre rand skall placeras så långt in i området att tillräckligt stor del av temperaturfallet täcks. Randplaceringen blir beroende av under hur lång tid temperaturprocessen skall följas.

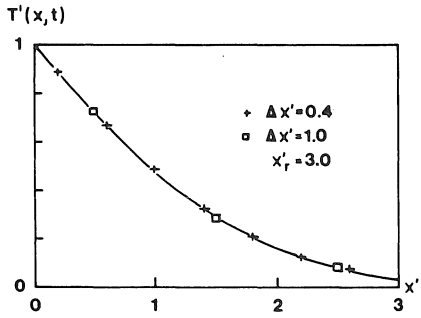
6.2.2 Plant fall

Problemet definieras i avsnitt 10.1.1. Med $T_m = 1$ erhålls lösningen:

$$T'(x,t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x'}{2}\right)$$
$$x' = \frac{x}{\sqrt{at}} \tag{6.2.10}$$



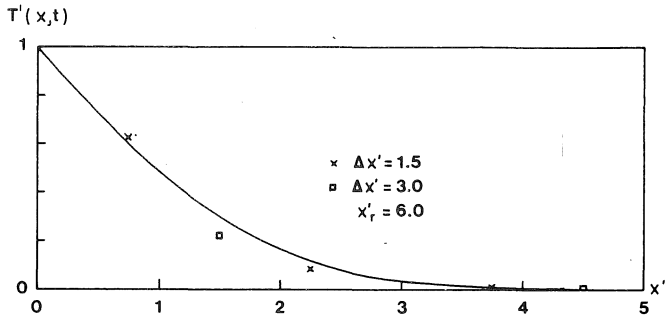
Figur 6.2.1. Numerisk lösning vid olika placering av den inre randen samt analytisk lösning.



Figur 6.2.2. Numerisk lösning med cellstorlekarna $\Delta x' = 0.4$ och 1.0.

I figur 6.2.1 visas resultat från beräkningar där den konstanta cellstrukturen är $\Delta x' = 0.2$. Den inre randens koordinat, x'_r, har i tre olika beräkningar haft värdena $x'_r = 2$, 3 och 4. Randvillkoret vid den inre randen är valt som $\partial u/\partial x' = 0$, vilket motsvarar total värmeisolering. Av figuren framgår att den inre randens koordinat bör väljas så att $x'_r \geq 3$.

Figur 6.2.2 visar resultatet från beräkningar med större cellstorlekar. För den inre randen gäller $x'_r = 3$. Beräkningsprecisionen är god även med så grov cellstruktur som $\Delta x' = 1$. Hela beräkningsområdet omfattar då endast 3 celler.



Figur 6.2.3. Numerisk lösning med cellstorlekarna $\Delta x' = 1.5$ och 3.0.

Figur 6.2.3 visar resultat från räkningar med $\Delta x' = 1.5$ och 3.0. Den inre randens koordinat är $x'_r = 6$. Felet ökar markant när cellstorleken väljs enligt $\Delta x' \geq 1.5$.

För att i ett icke skalat fall erhålla en temperaturprofil enligt figur 6.2.2 vid en tidpunkt t_1 efter ett temperatursteg med $\Delta x' = 1$ skall området delas in i celler med storleken $\Delta x = \sqrt{at_1}$. Stabilitetstidssteget ges enligt (5.2.1) av:

$$\Delta t_{stab} = \frac{C}{\frac{\lambda}{\Delta x/2} + \frac{\lambda}{\Delta x}} = \frac{\Delta x^2}{3a} = \frac{t_1}{3} \tag{6.2.11}$$

För att erhålla den önskade temperaturprofilen räcker det att indela området i tre gitterceller och att genomföra fyra tidsstegsiterationer, dvs tre tidssteg med $\Delta t = 0.9\Delta t_{stab}$ och ett avslutande tidssteg med $\Delta t = 0.3\Delta t_{stab}$.

Beräkningsinsatsen är således densamma antingen man vill bestämma temperaturprofilen i något material en minut efter ett temperatursprång vid dess randyta eller den temperaturpåverkan som erhållits i marken tiotusen år efter inlandsisens bortsmältande, då temperaturen vid markytan grovt beskrivet ändrades som en stegfunktion.

Låt ett temperatursteg inträffa vid randen vid tiden $t = 0$. Man vill beräkna temperaturfördelningen vid några tidpunkter under tidsintervallet $t_1 \leq t \leq t_s$. För att vid tidpunkten t_1 uppnå den beräkningsprecision som erhålls med $\Delta x' = 1.0$ måste cellstrukturen inom området $x < 3\sqrt{at_1}$ uppfylla $\Delta x \leq \sqrt{at_1}$.

För att erhålla motsvarande beräkningsprecision vid tidpunkten t_s räcker det att cellerna uppfyller $\Delta x \leq \sqrt{at_s}$ inom beräkningsområdet $x < 3\sqrt{at_s}$. Beräkningsområdets inre rand måste ha koordinaten $x_r \geq 3\sqrt{at_s}$. Om cellstorleken $\Delta x = \sqrt{at_1}$ används i hela cellstrukturen kommer därför cellerna att vara onödigt små i området $3\sqrt{at_1} < x < 3\sqrt{at_s}$.

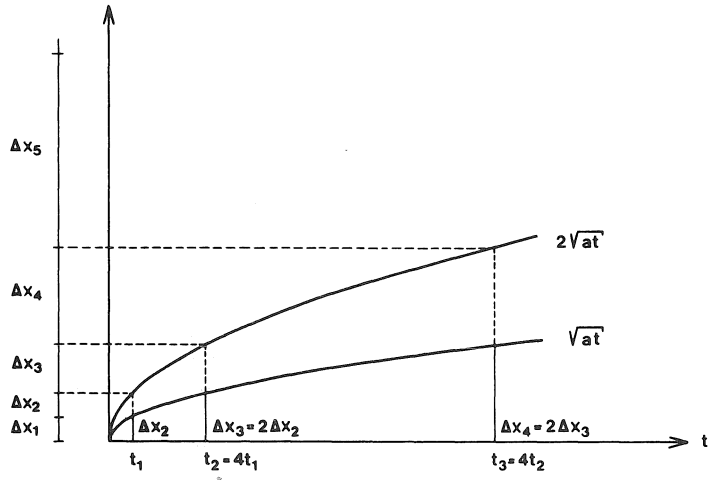
Cellantalet kan reduceras genom val av en expansiv cellstruktur enligt (6.2.6):

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= \Delta x_2 = k\sqrt{at_1} \qquad k \leq 1 \\ \Delta x_i &= 2\Delta x_{i-1} \qquad i > 2 \end{aligned} \tag{6.2.12}$$

Här är k en konstant som bestämmer cellernas dimensionslösa storlek. I cellstrukturen medtas så många celler att det för den inre randen x_r gäller:

$$x_r \geq 3\sqrt{at_s} \tag{6.2.13}$$

För varje cell som adderas till strukturen fördubblas cellstrukturens geometriska utsträckning. Principen för det valda gittret framgår av figur 6.2.4.



Figur 6.2.4. Konstruktion av ett expansivt gitter ($k = 1$).

I figuren är de två funktionerna $\sqrt{at}$ och $2\sqrt{at}$ inritade. Vid den första utskriftstidpunkten t_1 är storleken för de två första cellerna markerade. För dessa gäller:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = k\sqrt{at_1} \tag{6.2.14}$$

Tidpunkten t_2 i figuren definierar den punkt där:

$$\Delta x_3 = k\sqrt{at_2} = 2\Delta x_2 = 2k\sqrt{at_1}$$
$$t_2 = 4t_1 \tag{6.2.15}$$

På samma sätt erhålls för tidpunkten t_3:

$$\Delta x_4 = k\sqrt{at_3} = 2\Delta x_3 = 2k\sqrt{at_2}$$
$$t_3 = 4t_2 \tag{6.2.16}$$

Den valda cellstrukturen har egenskapen att vid varje tidpunkt t_i, $i = 1, 2, 3 \ldots$ inom intervallet $t_1 \leq t_i \leq t_s$ gäller:

$$\Delta x \leq \sqrt{at_i} \qquad \text{inom området } x \leq 2\sqrt{at_i} \tag{6.2.17}$$

Sluttidpunkten t_s för det tidsintervall inom vilket gitterstrukturen uppfyller villkoret (6.2.13) ökas med faktorn 4 för varje cell som adderas till strukturen.

Den beräkningsnoggrannhet som erhålls med den föreslagna expansiva gitterstrukturen belyses av följande exempel. Temperaturledningstalet har värdet $a = 10^{-6}$ m^2/s. Vid tiden $t = 0$ stiger randtemperaturen 1°C. Temperaturfördelningen skall beräknas för tidpunkterna $t = 1 \cdot 10^6$, $4 \cdot 10^6$ och $16 \cdot 10^6$ s, dvs efter ungefär 12, 48 och 190 dygn.

Den yttersta cellens storlek Δx_1 (m) är, med $k = 1$:

$$\Delta x_1 = \sqrt{10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^6} = 1.0$$

Gitterstrukturens cellstorlekar blir 1, 1, 2, 4 och 8 m. Den inre randens koordinat är 16 m, vilket uppfyller villkoret (6.2.13).

x (m)	0.5	1.5	3.0	6.0	12.0		
T (°C)							
an	0.724	0.289	0.034	0.000	0.000	$t = 1 \cdot 10^6$	(s)
num	0.733	0.313	0.027	0.000	0.000		
num-an	0.009	0.024	-0.007	0.000	0.000		
an	0.860	0.596	0.289	0.034	0.000	$t = 4 \cdot 10^6$	(s)
num	0.865	0.611	0.292	0.035	0.000		
num-an	0.005	0.015	0.003	0.001	0.000		
an	0.930	0.791	0.596	0.289	0.034	$t = 16 \cdot 10^6$	(s)
num	0.932	0.798	0.605	0.286	0.036		
num-an	0.002	0.007	0.009	-0.003	0.002		

Tabell 6.2.1. Analytiska och numeriskt beräknade värden för temperatursteg vid plan rand.

Av tabell 6.2.1 framgår att vid den första tidpunkten är det största absoluta felet 0.024 °C, dvs 2.4 % av temperatursteget vid randen. Felet uppträder i det område där temperaturgradienten är störst.

Felet avtar tidpunkt för tidpunkt. Detta beror på att hela temperaturfallet vid den första tidpunkten $t = 1 \cdot 10^6$ s beskrivs av tre gitterpunkter, medan vid tiderna $t = 4 \cdot 10^6$ och $16 \cdot 10^6$ temperaturfallet beskrivs av fyra respektive fem gitterpunkter.

Den använda cellstrukturens skalade storlek vid de olika tidpunkterna t_1, t_2 och t_3 är:

$$
\begin{aligned}
t_1 &= 1 \cdot 10^6 \quad \text{(s)} & \Delta x_1' &= \frac{1.0}{\sqrt{at_1}} = 1.0 \\
t_2 &= 4 \cdot 10^6 \quad \text{(s)} & \Delta x_1' &= \frac{1.0}{\sqrt{at_2}} = 0.5 \\
t_3 &= 16 \cdot 10^6 \quad \text{(s)} & \Delta x_1' &= \frac{1.0}{\sqrt{at_3}} = 0.25
\end{aligned}
\tag{6.2.18}
$$

De i tabell 6.2.1 angivna felen beskriver således beräkningsprecisionen vid beräkning av temperaturfördelningen vid en tidpunkt t_1, när man använder ett gitter enligt (6.2.12-13) och väljer $k = 1$, 0.5 eller 0.25. Ju lägre värde på k desto högre blir precisionen.

Av tabellen framgår att sluttidpunkten för ett givet gitters användbarhet enligt den angivna beräkningsprecisionen är nådd när temperaturen i den innersta cellen ökat med cirka 5 % av temperatursteget vid randen. Temperaturförändringar i denna cell kan således användas som kontroll på att simuleringen ej drivits för långt i tiden med det använda gittret.

Vid valet av randvillkor vid den inre randen kan man välja mellan $\partial T/\partial x = 0$ (total värmeisolering) eller konstant temperatur. Den senare typen av villkor dämpar emellertid temperaturförändringen i randcellen. I allmänhet är därför randvillkoret $\partial T/\partial x = 0$ att föredra.

I en gitterstruktur som definieras enligt (6.2.12-13) har cellerna olika storlek och därmed olika långa stabilitetstidssteg (se kapitel 5). Längden av tidssteget vid iterationen bestäms av cellen med det kortaste stabilitetstidssteget, dvs av den minsta cellen, randcellen. För denna gäller enligt (5.2.1):

$$
\Delta t_{stab} = \frac{C\Delta x_1}{\dfrac{\lambda}{\Delta x_1/2} + \dfrac{\lambda}{\Delta x_1}} = \frac{(\Delta x_1)^2}{3} \cdot \frac{1}{a} \tag{6.2.19}
$$

Med $\Delta x_1 = \sqrt{at_1}$, där t_1 är den första tidpunkt vid vilken temperaturer skall beräknas, erhålls:

$$
\Delta t_{stab} = \frac{t_1}{3} \tag{6.2.20}
$$

Beräkningsprecisionen kan enligt tabell 6.2.1 höjas genom att i gitterbeskrivningen (6.2.12) ändra k's värde från 1 till 0.5. Detta innebär, som enda förändring, att den första gittercellen delas i två lika stora delar. Den första cellens storlek blir $\Delta x_1 = 0.5\sqrt{at}$. Man erhåller:

$$
\Delta t_{stab} = \frac{t_1}{4 \cdot 3} \tag{6.2.21}
$$

Antalet iterationer som behöver genomföras för att uppnå tidpunkten t_1 ökar med en faktor 4. Antalet genomräknade celler kan reduceras så att varje cell genomräknas i en takt som är anpassad till dess tidsskala. Se avsnitt 6.5.

6.2.3 Hörn

Ett fall med ett temperatursteg vid ett *tvådimensionellt* hörn definieras i avsnitt 10.5. En skalad lösning ges av:

$$T'(x,y,t) = 1 - \mathrm{erf}(x') \cdot \mathrm{erf}(y')$$

$$x' = \frac{x}{\sqrt{4at}} \qquad (6.2.22)$$

$$y' = \frac{y}{\sqrt{4at}}$$

Beräkningsresultat skall ges för ett fall som är analogt med exemplet i avsnitt 6.2.2. Temperaturledningstalet är $a = 10^{-6}$ m^2/s. Temperaturfördelningen beräknas för tidpunkterna $t = 1$, 4 och $16 \cdot 10^6$ s. Ett expansivt gitter konstrueras enligt (6.2.12). Cellstrukturen i x- och y-led väljs till 0.5, 0.5, 1, 2, 4 och 8 (m). Exakta och beräknade värden längs linjen $x = y$ ges i tabell 6.2.2. Det största absoluta felet inträffar vid den första tidpunkten för $x = y = 0.75$ m. Felet är 1 % av temperatursteget vid randen.

$x = y$ (m)	0.25	0.75	1.5	3.0	6.0	12.0		
T (°C)								
an	0.980	0.837	0.494	0.067	0.000	0.000	$t = 1 \cdot 10^6$	(s)
num	0.982	0.847	0.495	0.070	0.002	0.000		
num-an	0.002	0.010	0.001	0.003	0.002	0.000		
an	0.995	0.956	0.837	0.494	0.067	0.000	$t = 4 \cdot 10^6$	(s)
num	0.995	0.959	0.844	0.490	0.072	0.002		
num-an	0.000	0.003	0.007	-0.004	0.005	0.002		
an	0.999	0.989	0.956	0.837	0.494	0.067	$t = 16 \cdot 10^6$	(s)
num	0.999	0.990	0.959	0.843	0.489	0.073		
num-an	0.000	0.001	0.003	0.006	-0.005	0.006		

Tabell 6.2.2. Exakta och beräknade värden vid tvådimensionellt hörn.

$x = y = z$ (m)	0.25	0.75	1.5	3.0	6.0	12.0		
T (°C)								
an	0.997	0.934	0.640	0.098	0.000	0.000	$t = 1 \cdot 10^6$	(s)
num	0.998	0.940	0.640	0.105	0.003	0.000		
num-an	0.001	0.006	0.000	0.007	0.003	0.000		
an	1.000	0.991	0.934	0.640	0.098	0.000	$t = 4 \cdot 10^6$	(s)
num	1.000	0.992	0.938	0.635	0.107	0.003		
num-an	0.000	0.001	0.004	-0.005	0.009	0.003		
an	1.000	0.999	0.991	0.934	0.640	0.098	$t = 16 \cdot 10^6$	(s)
num	1.000	0.999	0.992	0.938	0.634	0.107		
num-an	0.000	0.000	0.001	0.004	-0.006	0.009		

Tabell 6.2.3. Exakta och beräknade värden vid tredimensionellt hörn.

Ett motsvarande *tredimensionellt* fall definieras i avsnitt 10.5. Lösningen ges av:

$$T'(x,y,z,t) = 1 - \mathrm{erf}(x') \cdot \mathrm{erf}(y') \cdot \mathrm{erf}(z')$$
$$x' = \frac{x}{\sqrt{4at}} \qquad y' = \frac{y}{\sqrt{4at}} \qquad z' = \frac{z}{\sqrt{4at}} \tag{6.2.23}$$

I tabell 6.2.3 ges exakta och beräknade värden för ett fall som är analogt med det som ges i tabell 6.2.2. Värdena är givna för linjen $x = y = z$. Det största absoluta felet är 0.9 % av temperatursteget vid randen.

En jämförelse mellan lösningarna för de en-, två- och tredimensionella fallen visar att, med samma gitterindelning, felet är störst i det endimensionella fallet och minst i det tredimensionella. Detta beror på att temperaturprofilen är flackast i det tredimensionella fallet. Därmed används fler gitterpunkter vid beskrivningen av den del av temperaturfördelningen där temperaturgradienten är störst.

6.3 Grundläggande delprocess. Periodisk randtemperatur

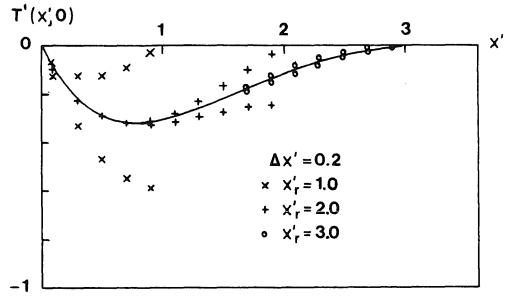
En godtyckligt varierande periodisk randtemperatur kan genom Fourieranalys beskrivas som en summa av sinusvariationer med olika amplitud och periodlängd. Beräkning av den temperaturfördelning som erhålls vid en sinusvarierande randtemperatur är därför av grundläggande betydelse.

6.3.1 Gitterstruktur

Ett fall med halvoändlig plan geometri definieras i avsnitt 10.1.2. En skalad lösning ges av:

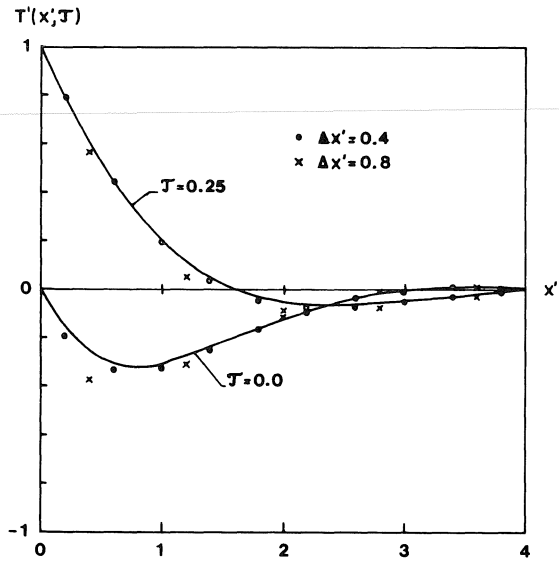
$$T'(x',\tau) = e^{-x'} \cdot \sin(2\pi\tau - x')$$
$$x' = \frac{x}{d_p} \qquad d_p = \sqrt{\frac{at_p}{\pi}} \qquad \tau = \frac{t}{t_p} \tag{6.3.1}$$

I figur 6.3.1 ges den analytiska lösningen och värden från numeriska beräkningar med konstant cellstorlek. I dessa har randvillkor och koordinat varierats för den inre randen. Beräkningsområdet har indelats i celler med storleken $\Delta x' = 0.2$. Vid de numeriska beräkningarna är starttemperaturen $T'(x',0) = 0$. De i figuren givna värdena har tagits från den femte beräkningsperioden.



Figur 6.3.1. Numerisk lösning vid varierande randplacering och randvillkor.

I figur 6.3.2 visas beräknade temperaturer under den femte perioden för två fall med cellstorlekarna $\Delta x' = 0.4$ respektive 0.8. Värdena är givna för $\tau = 0$ och 0.25. Den inre randens koordinat är $x'_r = 4$.



Figur 6.3.2. Numerisk lösning vid varierande cellstorlekar.

Av figurerna 6.3.1-2 framgår att cellstorleken bör väljas så att $\Delta x' \leq 0.4$. Vidare

bör den inre randens koordinat uppfylla $x'_r \geq 4$. Enligt (10.1.10) dämpas såväl temperatur som värmeflöde exponentiellt med avståndet från randen $x' = 0$. I punkterna $x' = 3$ och $x' = 4$ är dämpningsfaktorn $e^{-3} \approx 0.050$ respektive $e^{-4} \approx 0.018$. I områden där $x' > 4$ är amplituden mindre än 1.8 % av amplituden vid randen $x' = 0$.

I tabell 6.3.1 följs den numeriska lösningen under de tio första perioderna. Begynnelsetemperaturen är $T'(x', 0) = 0$. Värden ges vid tidpunkterna $\tau = 0 + n \cdot 2\pi$ och $\tau = 0.25 + n \cdot 2\pi$. Cellstorleken är $\Delta x' = 0.4$.

x'	0.2	0.6	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6	3.0
T'_{an}	-0.163	-0.310	-0.310	-0.243	-0.161	-0.090	-0.038	-0.007
						$\tau = 0 + n \cdot 2\pi$		
$T'_{num} - T'_{an}$								
$n = 1$	-0.030	-0.011	0.005	0.017	0.025	0.027	0.023	0.016
2	-0.033	-0.022	-0.011	-0.003	0.003	0.005	0.003	0.000
3	-0.034	-0.023	-0.013	-0.005	0.000	0.002	0.000	-0.003
4	-0.034	-0.023	-0.013	-0.006	-0.001	0.001	0.000	-0.003
⋮								
9	-0.034	-0.023	-0.013	-0.006	-0.001	0.001	0.000	-0.003
T'_{an}	0.802	0.453	0.199	0.042	-0.038	-0.065	-0.064	-0.049
						$\tau = 0.25 + n \cdot 2\pi$		
$T'_{num} - T'_{an}$								
$n = 1$	0.020	0.058	0.088	0.104	0.105	0.093	0.074	0.052
2	-0.003	-0.005	-0.004	-0.001	0.003	0.004	0.006	0.006
3	-0.005	-0.011	-0.014	-0.013	-0.011	-0.009	-0.006	-0.004
4	-0.005	-0.012	-0.015	-0.015	-0.013	-0.011	-0.008	-0.005
⋮								
9	-0.005	-0.012	-0.015	-0.015	-0.013	-0.011	-0.008	-0.005

Tabell 6.3.1. Insvängning till periodisk lösning.

Temperaturen konvergerar snabbt mot den periodiska, insvängda fördelningen. Efter genomräkning av tre perioder avviker temperaturerna endast obetydligt från insvängda förhållanden. För $\tau = 0$ och $n = 9$ är det största absoluta felet 0.034 vid $x' = 0.2$. För $\tau = 0.25$ t$n = 9$) är det största felet 0.015.

x'	0.1	0.5	0.9	1.3	1.7	2.1	2.5	2.9
				$\tau = 0$				
T'_{an}	-0.090	-0.291	-0.319	-0.263	-0.181	-0.106	-0.049	-0.013
T'_{num}	-0.100	-0.297	-0.322	-0.264	-0.181	-0.106	-0.051	-0.018
$T'_{num} - T'_{an}$	-0.010	-0.006	-0.003	-0.001	0.000	0.000	-0.002	-0.005
				$\tau = 0.25$				
T'_{an}	0.900	0.532	0.253	0.073	-0.024	-0.062	-0.066	-0.053
T'_{num}	0.900	0.529	0.249	0.068	-0.028	-0.066	-0.070	-0.057
$T'_{num} - T'_{an}$	0.000	-0.003	-0.004	-0.005	-0.006	-0.004	-0.004	-0.004

Tabell 6.3.2. Jämförelse mellan exakt och numerisk lösning med $\Delta x' = 0.2$.

I tabell 6.3.2 jämförs exakta och numeriska värden från den femte perioden ($n = 4$). Cellstorleken är $\Delta x' = 0.2$. Vid tidpunkten $t = 0$ är det största absoluta felet inom beräkningsområdet 1 % av amplituden vid randen. Felets storlek avtar med avståndet från ytan. Vid tidpunkten $t = 0.25$ är det största felet 0.6 % av randens amplitud.

Antalet celler i beräkningsområdet kan reduceras genom användning av ett expansivt gitter av den typ som ges av (6.2.12). Cellstrukturen blir då likartad oavsett om randtemperaturen är ett temperatursteg eller en periodisk variation. Låt den expansiva gitterstrukturen definieras av:

$$\begin{aligned} &\Delta x_1 = \Delta x_2 = k \cdot d_p && (k \leq 0.2) \\ &\Delta x_i = 2\Delta x_{i-1} && i > 2 \\ &x_r \geq 4d_p \\ &\text{där} \quad d_p = \sqrt{\frac{at_p}{\pi}} \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

I tabell 6.3.3 ges felet i den numeriska lösningen vid expansivt gitter med minsta cellen $\Delta x = 0.2d_p$. Lösningen avser femte perioden. Vid tiden $\tau = 0$ är det största absoluta felet 0.017. Vid $\tau = 0.25$ är felet 0.011. Inom avståndet $1.2d_p$ från ytan är det absoluta felet mindre än 0.012.

x'	0.1	0.3	0.6	1.2	2.4	4.8
			$\tau = 0$			
T'_{an}	-0.090	-0.219	-0.310	-0.281	-0.061	0.008
T'_{num}	-0.098	-0.221	-0.319	-0.293	-0.044	0.007
$T'_{num} - T'_{an}$	-0.008	-0.002	-0.009	-0.012	0.017	-0.001
			$\tau = 0.25$			
T'_{an}	0.900	0.708	0.453	0.109	-0.067	0.001
T'_{num}	0.903	0.716	0.461	0.108	-0.056	-0.001
$T'_{num} - T'_{an}$	0.003	0.008	0.008	-0.001	0.011	-0.002

Tabell 6.3.3. Jämförelse mellan exakt och numerisk lösning vid expansivt gitter med minsta cellen $\Delta x' = 0.2$.

x'	0.2	0.6	1.2	2.4	4.8
			$\tau = 0$		
T'_{an}	-0.163	-0.310	-0.281	-0.061	0.008
T'_{num}	-0.196	-0.329	-0.301	-0.039	0.014
$T'_{num} - T'_{an}$	-0.033	-0.019	-0.020	0.022	0.006
			$\tau = 0.25$		
T'_{an}	0.802	0.453	0.109	-0.067	0.001
T'_{num}	0.803	0.461	0.097	-0.057	0.006
$T'_{num} - T'_{an}$	0.001	0.008	-0.012	0.010	0.005

Tabell 6.3.4. Jämförelse mellan exakt och numerisk lösning vid expansivt gitter med minsta cellen $\Delta x' = 0.4$.

I tabell 6.3.4 ges felet i den numeriska lösningen vid expansivt gitter med minsta cellen $\Delta x = 0.4d_p$. Den nya strukturen erhålls genom att de två första cellerna i den gamla strukturen slås ihop. Vid tiden $t = 0$ är det största absoluta felet 0.033. Vid tiden $t = 0.25$ är största felet 0.012.

I den gitterstruktur som definieras av (6.3.2) har randcellen det kortaste stabilitetstidssteget. Detta är enligt (5.1.7):

$$\Delta t_{stab} = \frac{C\Delta x}{\frac{\lambda}{\Delta x/2} + \frac{\lambda}{\Delta x}} = \frac{\Delta x^2}{3a} \tag{6.3.3}$$

Med $\Delta x = 0.2d_p$ erhålls:

$$\Delta t_{stab} = \frac{0.04}{3\pi} t_p \approx 0.0042 t_p \tag{6.3.4}$$

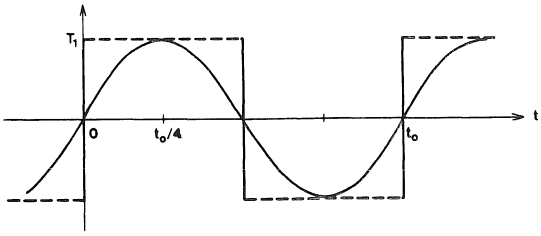
I det definierade gittret utgör randcellens stabilitetstidssteg ungefär fyra tusendelar av den aktuella periodtiden. Simulering av en period omfattar ungefär 250 tidssteg oberoende av periodens längd. Om de två minsta cellerna väljs enligt $\Delta x = 0.4d_p$ erhålls

$$\Delta t_{stab} = \frac{0.16}{3\pi} t_p \approx 0.017 t_p \tag{6.3.5}$$

Med denna gitterstruktur omfattar simuleringen av en period ungefär 60 tidssteg. Beräkningsarbetet reduceras till en fjärdedel jämfört med den finare strukturen.

En cells stabilitetstidssteg är ett mått på dess tidskonstant, dvs vilken tid cellen behöver för att följa en temperaturförändring i dess omgivning. Förhållandet skall belysas genom jämförelse mellan två fall med sinusformad respektive stegvis ändrad randtemperatur.

Vid den sinusformade lösningen väljs enligt ovan en cellstruktur vars randcell har ett stabilitetstidssteg av storleksordningen $0.0042t_p$ till $0.017t_p$. Detta skall jämföras med stabilitetstidssteget för den cellstruktur som behövs om sinusvariationen i stället beskrivs som en följd av temperatursteg.



Figur 6.3.3. En sinusformad randtemperatur approximativt beskriven som en följd av temperatursteg.

Figur 6.3.3 visar hur en sinusvariation approximativt kan beskrivas som en följd av temperatursteg. Vid tidpunkterna $t = n \cdot (t_p/2)$, där $n = \ldots -1, 0, 1, 2 \ldots$, ändras temperaturen stegvis.

I avsnitt 6.2 visas att valet av cellstruktur vid beräkning av temperaturer efter en stegändring bestäms av vid vilken tidpunkt t_1 man önskar få resultat med den angivna precisionen. En cellstruktur enligt (6.2.12-13), som uppfyller $t_1 = t_p/16$, har en randcell vars storlek Δx ges av:

$$0.5\sqrt{at_p/16} \leq \Delta x \leq \sqrt{at_p/16}$$

Randcellens stabilitetstidssteg ligger enligt (6.2.19) i intervallet $0.0052t_p$ till $0.021t_p$. Detta stämmer väl överens med det tidigare erhållna stabilitetstidssteget $0.0042t_p$ till $0.017t_p$ för den periodiska lösningen.

Exemplet illustrerar att problemets tidsskala och cellstrukturens dimensioner har en likartad koppling oavsett hur tidsvariationen är beskriven.

6.4 Stationär temperaturfördelning

Temperaturprocesser, som beskrivs av i tiden konstanta randvillkor, går i många fall mot en stationär, slutlig temperaturfördelning. Avsnittet belyser några olika problemställningar.

6.4.1 Platta på mark. Given randtemperatur

Ett *tvådimensionellt* fall definieras i avsnitt 10.6.1. En skalad lösningen ges av:

$$T'(x', z') = -\frac{1}{\pi}\left\{\arctan\left(\frac{1+x'}{z'}\right) + \arctan\left(\frac{1-x'}{z'}\right)\right\} \tag{6.4.1}$$

Värmeflödet genom randen $z' = 0$ är proportionellt mot $\partial T'/\partial z'$. Man har:

$$\left.\frac{\partial T'}{\partial z'}\right|_{z'=0} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+x'} + \frac{1}{1-x'}\right) \qquad |x'| < 1 \tag{6.4.2}$$

Värmeflödet växer obegränsat nära de punkter som ges av $|x'| = 1$, $z' = 0$.

Vid den numeriska lösningen kan problemets symmetri runt z-axeln utnyttjas. Som beräkningsområde väljs kvadranten $x' \geq 0$, $z' \geq 0$. Området har indelats i en expansiv cellstruktur med minst cellstorlek i området där temperaturgradienten är störst, dvs omkring punkten $x' = 1$, $z' = 0$.

Vid den numeriska bearbetningen av problemet har beräkningsområdet ändlig utsträckning. Vid beräkningsområdets yttre ränder kommer därför att råda förhållanden som ej överensstämmer med problemformuleringen. Ett fel introduceras i lösningen. Felets storlek belyses av tabell 6.4.1 i vilken resultat ges från räkningar med tre olika

områdesstorlekar.

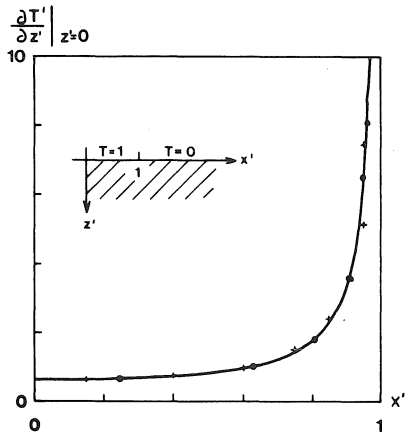
x'	$\frac{\partial T'}{\partial z'}\Big\|_{z'=0}$ analytisk lösning	Relativt fel i den numeriska lösningen (%)		
		$x', z' < 91$	$x', z' < 11$	$x', z' < 6$
0.15	0.651	-1.4	-2.0	-3.8
0.40	0.758	-0.39	-0.9	-2.3
0.60	0.995	-0.40	-0.8	-2.0
0.75	1.46	4.7	4.7	3.4
0.85	2.29	6.6	6.1	5.7
0.95	6.53	-21	-21	-21

Tabell 6.4.1. Analytisk lösning av $\partial T'/\partial z'|_{z'=0}$ samt relativt fel i den numeriska lösningen vid tre olika områdesstorlekar.

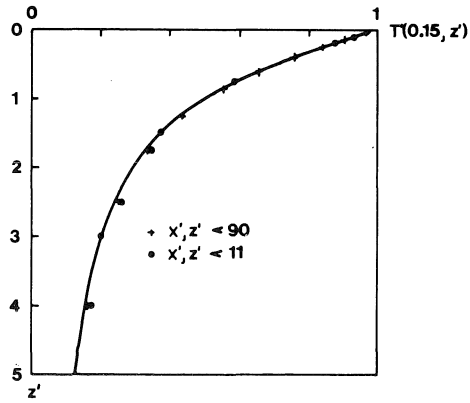
I tabellen ges exakta och beräknade värden för $\partial T'/\partial z'$, $z' = 0$, $0 < x' < 1$. Felet i de beräknade värdena ökar kraftigt i närheten av punkten $x' = 1$, $z' = 0$. Detta är rimligt då temperaturgradienten här växer obegränsat. I området $x' \leq 0.60$ är det relativa felet mindre än 2.0 % för de två större beräkningsområdena. För det minsta beräkningsområdet är motsvarande fel mindre än 3.8 %.

Av tabell 6.4.1 framgår att beräkningsområdets storlek huvudsakligen påverkar beräkningsresultatet i plattans centrala delar. Felet vid plattans kant är ett lokalt problem som berörs försumbart av randvillkoren vid stora x och z.

I figur 6.4.1 och 6.4.2 visas analytisk lösning och beräknade värden för $\partial T'/\partial z'|_{z'=0}$ respektive $T'(0.15, z')$.



Figur 6.4.1. $\partial T'/\partial z'|_{z'=0}$. Analytisk lösning och beräknade värden.



Figur 6.4.2. $T'(0.15, z')$. Analytisk lösning och beräknade värden. Två områdesstorlekar.

Av figur 6.4.2 framgår hur de beräknade värdena $T'(0.15, z')$ vid $z' = 1.5$ glider isär för de två områdesstorlekarna. Felet växer snabbare med ökande z' i det lilla beräkningsområdet där felet vid de yttre ränderna har ett starkare inflytande. Felet är dock litet.

I den fortsatta framställningen väljs området $x', z' < 11$ som beräkningsområde, dvs de yttre ränderna placeras på ett avstånd som är cirka 10 gånger den för problemet karakteristiska längden. I det aktuella fallet utgörs denna av längden av randdelen med temperaturen 1. Beräkningarna för den valda storleken på beräkningsområdet gav som resultat att det relativa felet av $\partial T'/\partial z'$ i punkterna $x' = 0.85$ och $x' = 0.95$ är 6 respektive 21 %.

I de redovisade beräkningarna var cellstorlekarna:

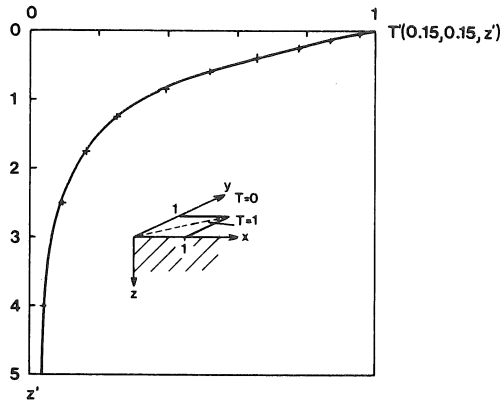
<u>x'-led</u>	$x' \leq 1.0$:	$0.3, 2 \times 0.2, 3 \times 0.1$	
	$x' > 1.0$:	$3 \times 0.1, 2 \times 0.2, 0.3, 2 \times 0.5, 1., 2., 5.$	(6.4.3)
<u>z'-led</u>		$3 \times 0.1, 2 \times 0.2, 0.3, 2 \times 0.5, 1., 2., 5.$	

I tabell 6.4.2 ges resultat från en räkning där cellerna närmast punkten $x' = 1$, $z' = 0$ halverats. Av tabellen framgår att, vid den finare cellindelningen, området med fel mindre än 2 % har vuxit till $0 < x' < 0.85$. Felet i de två cellerna närmast $x' = 1$ är i stort sett oförändrat med 7.7 respektive -21 %. Detta understryker att det stora felet i närheten av punkten $x' = 1$, $z' = 0$ är av lokal karaktär.

x'	0.15	0.40	0.60	0.75	0.85	0.925	0.975
$\frac{\partial T'}{\partial z'}\Big\|_{z'=0}$							
Analytisk lösning	0.651	0.758	0.995	1.46	2.29	4.41	12.9
Relativt fel (%) i numerisk lösning	-2.7	-1.2	-2.0	0.0	0.4	7.7	-21

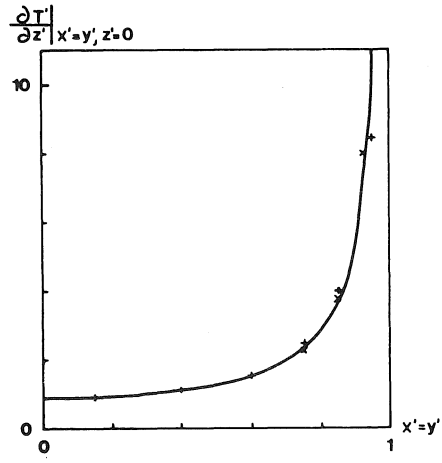
Tabell 6.4.2. $\partial T'/\partial z'|_{z'=0}$. Analytisk lösning och relativt fel i den numeriska lösningen.

Motsvarande *tredimensionella fall* definieras av (10.6.5-7). Den resulterande temperaturfördelningen ges av (10.6.8). Funktionens derivata i z'-led ges av (10.6.9). Beräkningsnoggrannheten har testats för fallet $L/B = 1$. Den använda cellstrukturen är analog med den som används i det tvådimensionella fallet.



Figur 6.4.3. $T'(0.15, 0.15, z')$. Analytisk lösning och beräknade värden.

I figur 6.4.3 ges exakta och beräknade värden för $T'(0.15, 0.15, z')$. I figur 6.4.4 ges värden för $\partial T'/\partial z'|_{z'=0}$ inom området $0 < x' = y' < 1.0$. Två beräkningsresultat visas. I det ena fallet har en med (6.4.3) analog cellstruktur använts. I det andra fallet har cellerna närmast plattans ränder halverats.



Figur 6.4.4. $\partial T'/\partial z'|_{z'=0}$. Analytisk lösning och beräknade värden. Två cellstrukturer.

$x' = y'$	0.15	0.40	0.60	0.75	0.85	0.925	0.95	0.975
T'_{an}	0.926	1.11	1.52	2.32	3.75	7.37	11.0	21.2
Rel. fel (%)								
grovt gitter	-1.1	0.90	0.66	6.5	7.5	—	-23	—
fint gitter	-1.2	0.0	-1.3	1.3	1.1	8.8	—	-21

Tabell 6.4.3. $\partial T'/\partial z'|_{x'=y',z'=0}$. Analytisk lösning och relativt fel i beräknade värden.

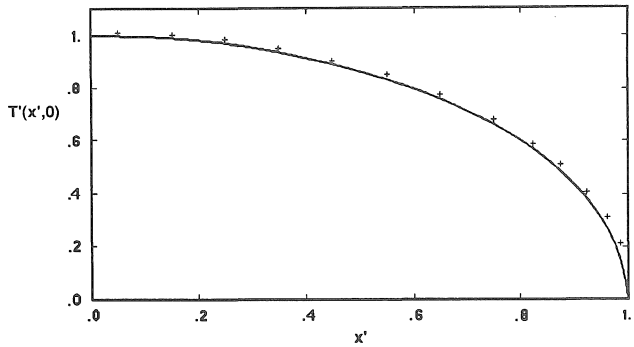
I tabell 6.4.3 ges de relativa felen i de beräknade värdena av $\partial T'/\partial z'|_{z'=0}$. Liksom i det tvådimensionella fallet avtar noggrannheten kraftigt nära randpunkten $x' = 1$, $y' = 1$, $z' = 0$. Med den grova strukturen är det relativa felet mindre än 1.1 % för $x' = y' < 0.60$. Med den finare strukturen är det relativa felet mindre än 1.3 % i området $x' = y' < 0.85$.

6.4.2 Platta på mark. Givet randvärmeflöde

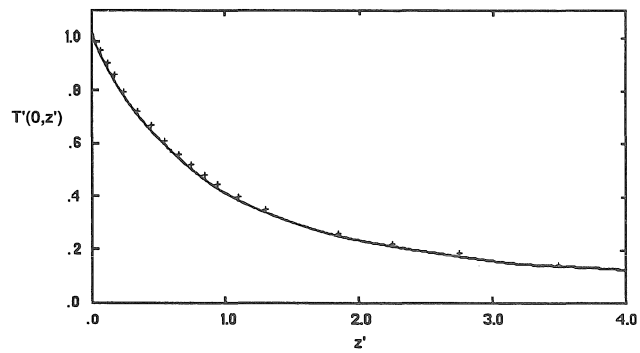
Det plana, tvådimensionella stationära problemet definieras i avsnitt 10.6.2. En lösning i skalad form ges av:

$$T'(x',z') = \sqrt{\sqrt{f^2 + (x'z')^2} + f} + z'$$
$$f = \frac{1+(z')^2-(x')^2}{2} \tag{6.4.4}$$

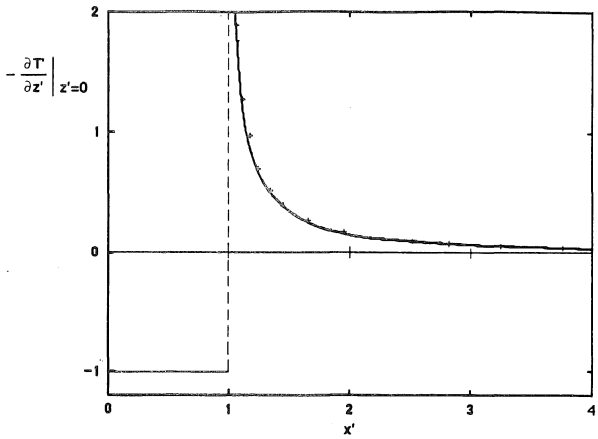
Problemets symmetri runt z'-axeln kan utnyttjas vid lösningen. Som beräkningsområde väljs kvadranten $x' \geq 0$, $z' \geq 0$. Området indelas i en expansiv cellstruktur med minst cellstorlek i området där temperaturgradienten är störst.



Figur 6.4.5. Funktionen $T'(x',0)$. Analytisk lösning och beräknade värden.



Figur 6.4.6. Funktionen $T'(0,z')$. Analytisk lösning och beräknade värden.



Figur 6.4.7. Funktionen $\partial T'/\partial z'|_{z'=0}$. Analytisk lösning och beräknade värden.

De i figurerna redovisade beräkningarna har använts vid en analys där den beräknade medeltemperaturen T'_m är väsentlig [*Claesson, Eftring, 1980*]. Man har:

$$T'_m = \int_0^1 T'(x',0)dx' = \pi/4 \tag{6.4.5}$$

Felet i det sökta värdet T'_m är beroende av felet längs hela sträckan $0 \leq x' \leq 1$. Den använda cellstrukturen omfattar 39x26 celler. Området $x' \leq 1$ täcks av 13 celler. De använda cellstorlekarna framgår av figurerna. De yttre rändernas koordinater är $x' = 10$ och $z' = 10$. Lösningen påverkas endast försumbart om ränderna flyttas längre ut.

I tabell 6.4.4 ges det relativa felet i T'_m för några olika gitterstrukturer.

Totalt cellantal	39x26	19x13	17x12	15x11
Cellantal längs $0 \leq x \leq 1$	13	6	5	4
Relativt fel i T'_m (%)	2.6	6	8	16

Tabell 6.4.4. Relativt fel i T'_m för olika cellstrukturer.

Det relativa felet är stort vid plattans kant för alla gitterstrukturerna. I likhet med

fallet i avsnitt 6.4.1 växer temperaturgradienten obegränsat i närheten av punkten $x' = 1$, $z' = 0$. Felets betydelse för T'_m avtar när cellerna nära $x = 1$ görs små.

6.5 Beräkning där varje gittercell följer sin egen tidsskala

Vid genomförandet av lösningen för ett problem är bearbetningstiden direkt proportionell mot det antal iterationer som behöver genomföras för att önskad tidpunkt skall uppnås. Antalet iterationer bestäms av längden på det använda tidssteget. Det längsta möjliga tidssteget under iterationen bestäms av cellen med det kortaste stabilitetstidssteget. Genomförandet av en iteration innebär beräkning av ny temperatur i samtliga celler.

Metoden innebär att endast de minsta cellerna bearbetas i en takt som överensstämmer med deras tidsskala. Övriga celler bearbetas onödigt ofta i jämförelse med sina egna stabilitetstidssteg. Detta innebär att antalet cellbearbetningar kan reduceras genom att man i beräkningsområdet definierar delområden med olika tidsstegslängder vid iterationen.

I det enklaste fallet har man endast två delområden med olika iterationstidssteg. Denna situation kan hanteras på följande sätt. Vid en tidpunkt t är temperaturen känd i samtliga temperaturpunkter. Innan en iteration genomförs för området med det längsta tidssteget Δt_l utförs iterationer för det andra området så att dettas temperaturer vid tidpunkten $t + \Delta t_l$ är kända. Vid genomförandet av dessa iterationer ackumuleras randflödet mellan de två områdena på sådant sätt att, för varje randcell i det trögare området, randflödet under tiden t till $t + \Delta t_l$ blir känt. Därmed kan en iteration för det trögare området genomföras. Förfarandet upprepas till önskad tidpunkt. Den beskrivna metoden är utnyttjad bland annat vid simulering av ett bergrumsvärmelagers termiska funktion (kapitel 13).

I en längsta utveckling av tekniken kan man tidsstegsmässigt behandla varje cell i enlighet med dess egen tidsskala. Cellen med det längsta stabilitetstidssteget bestämmer då ett globalt tidssteg Δt_{gl} vid iterationen. Om samtliga cellers temperaturer är kända vid en given starttidpunkt t_{start} kommer, efter en global iteration, samtliga celler att vara genomräknade vid tidpunkten $t_{start} + \Delta t_{gl}$. För celler med kort stabilitetstidssteg innebär en global iteration många genomräkningar medan cellen med det längsta stabilitetstidssteget endast bearbetas en gång. Genomräkningen för hela området kan systematiseras på följande sätt.

För varje enskild cell bestäms ett beräkningstidssteg Δt_{cell}. Detta är, med utgångspunkt från cellens stabilitetstidssteg $\Delta t_{stab,\,cell}$, valt så att följande villkorsuttryck gäller med så lågt värde på n som möjligt:

$$\Delta t_{cell} = \frac{\Delta t_{gl}}{2^n} < \Delta t_{stab,\,cell} \qquad n \geq 0 \tag{6.5.1}$$

Man får ett antal grupper av celler, där samtliga celler inom en grupp har samma beräkningstidssteg. Grupperna numreras i ordning med växande Δt_{cell} så att gruppen med det kortaste tidssteget kommer först. Genom vanlig iterativ beräkning förs den första gruppens celler fram till den tidpunkt som motsvaras av den andra gruppens tidssteg. Under dessa beräkningar ackumuleras samtliga randvärmeflöden genom rän-

der till celler som hör till grupper med högre nummer (> 1). Randvärmeflödet genom ränder mellan celler i grupp 1 och 2 är nu kända inför en iteration gällande cellerna i grupp 2. Vid denna iteration ackumuleras åter värmeflödet genom ränder till celler i grupper med högre ordningsnummer (> 2). Efter denna iteration har samtliga celler i grupp ett och två förts fram till den tidpunkt som motsvarar ett beräkningstidssteg för grupp två.

Förfarandet upprepas för grupp 1 och grupp 2 till den tidpunkt som motsvaras av ett beräkningstidssteg enligt grupp tre. Därefter genomförs en iteration för cellerna i grupp tre. Därmed har samtliga celler i grupp ett, två och tre förts fram till den tidpunkt som motsvaras av ett tidssteg i grupp tre. Det hela upprepas gång efter gång där allt trögare grupper blir inblandade. Till sist blir även gruppen med det längsta tidssteget genomräknad. Då har beräkningar för ett globalt tidssteg Δt_{gl} genomförts och samtliga cellers temperaturer vid tidpunkten $t_{start} + \Delta t_{gl}$ är kända. Vid denna beräkning har varje enskild cell behandlats med ett tidssteg som är anpassat till cellens egen tidsskala.

Den redovisade beräkningsstrategin kan säkerligen i olika situationer optimeras i syfte att minimera antalet nödvändiga cellräkningar. Detta ligger dock utom ramen för framställningen. Syftet här är endast att visa en princip.

6.6 Exempel på gitterval

Som standardvärden för givna exempel gäller att materialets värmeledningsförmåga är $\lambda = 2$ W/mK och att dess värmekapacitet är $C = 2 \cdot 10^6$ J/m^{3}K. Temperaturledningstalet är $a = \lambda/C = 10^{-6}$ m^2/s. Med hjälp av (6.2.12-13) och (6.3.2) skall gitter konstrueras för några enkla men illustrativa fall.

Temperatursteg vid endimensionell plan geometri

Temperaturen skall beräknas vid tidpunkten t_1 (s) efter ett inträffat temperatursteg vid områdets rand. För beräkningens sluttidpunkt t_s gäller $t_s = t_1$. Formlerna (6.2.12-13) definierar gitterstrukturen. Formel (9.1.2) anger direkt cellernas stabilitetstidssteg för ett endimensionellt gitter. Randcellen har det kortaste stabilitetstidssteget $\Delta t_{stab} = k^2 t_1/3$ (s). Beräkningstidssteget Δt skall enligt avsnitt 6.1 uppfylla $\Delta t \leq 0.95 \Delta t_{stab}$.

Exempel 1.

Det betraktade området är halvoändligt. Med $t_1 = 1$ s erhålls $\Delta x_1 = \sqrt{at_1} = 0.001$ m. Gittrets inre rand x_r skall uppfylla $x_r \geq 3\sqrt{at_1} = 0.003$ m. De tre nödvändiga gittercellernas storlekar är 0.001, 0.001 och 0.002 m.

Om $t_1 = 10000$ år erhålls $\Delta x_1 = \sqrt{at_1} \approx 560$ m. De tre nödvändiga gittercellernas storlekar är 560, 560 och 1120 m.

Exempel 2.

Det betraktade området utgör en vägg med tjockleken 0.1 m. Starttemperaturen i väggen är 0 °C. Vid tider $t \geq 0$ är temperaturen på väggens två sidor T_1 respektive T_2. Väggens temperaturfördelning skall beräknas

vid de två tidpunkterna 100 och 400 s efter temperatursprången vid de två sidorna. Man har $t_1 = 100$ och $t_s = 400$ s.

För ett gitter som skall kunna hantera temperatursteget vid en väggyta erhålls, med $t_1 = 100$ s, den första cellens dimension till $\Delta x_1 = \sqrt{at_1} = 0.01$ m. Den inre randen för den betraktade gitterstrukturen bestäms enligt (6.2.13) till $x_r \geq 3\sqrt{at_s}$ =0.06 m. Den nödvändiga gitterstrukturen ges av 0.01, 0.01, 0.02 och 0.04 m, vilket placerar den inre randen på avståndet 0.08 m från den betraktade väggytan.

Gittret skall kunna hantera ett temperatursteg vid varje yta. Det väljs därför symmetriskt och man erhåller gitteruppdelningen 0.01, 0.01, 0.02, 0.03, 0.02, 0.01 och 0.01 m, vilket täcker hela väggen. Den fjärde cellen från varje väggyta har då krympts från 0.04 till 0.03 cm, vilket endast höjer precisionen vid beräkningen. Den sålunda definierade gitterstrukturen kan användas för beräkning vid varje tidpunkt $t \geq t_1$ eftersom cellerna för den gitterstruktur som börjar vid en väggyta är mindre än de storlekar som bestäms av (6.2.12).

Exempel 3.

Detta fall är identiskt med Exempel 3, men temperatursprånget är lika stort vid väggens båda ytor. Man erhåller ett symmetriplan mitt i väggen. Värmeflödet genom denna yta är, på grund av symmetrin, noll. Gitterstrukturen ges av 0.01, 0.01, 0.02 och 0.01 m, vilket täcker området mellan väggens yta och symmetriplanet. Värmeflödet genom den innersta cellens rand mot symmetriplanet hålls totalisolerad så att värmeflödet genom den är noll. Den ovan definierade gitterstrukturen kan sorteras om till 0.01, 0.01, 0.01 och 0.02 m. Samtliga cellers dimension är lika med eller mindre än vad som bestäms av (6.2.12).

Periodisk temperatur vid endimensionell plan geometri

Exempel.

Temperaturen i ett halvoändligt område skall beräknas vid en sinusvarierande randtemperatur med periodlängden t_p (s), medeltemperaturen T_m och amplituden T_a (°C). Formel (6.3.2) definierar gitterstrukturen. Formel (9.1.3) anger direkt cellernas stabilitetstidssteg för ett endimensionellt gitter. Randcellen har det kortaste stabilitetstidssteget $\Delta t_{stab} = k^2 t_p / 3\pi$ (s). Beräkningstidssteget Δt skall enligt avsnitt 6.1 uppfylla $\Delta t \leq 0.95 \Delta t_{stab}$.

Med $t_p = 1$ dygn = 86400 s erhålls $\Delta x_1 = 0.2 d_p = 0.2\sqrt{at_p/\pi} \approx 0.033$ m. Gittercellernas storlekar är 0.033, 0.033, 0.066, 0.132, 0.264 och 0.528 m. Med dessa sex gitterceller täcker gittret sträckan 1.056 m, vilket uppfyller kravet från (6.3.2) att gittret skall täcka minst $4d_p = 0.66$ m.

Vid beräkningen används medeltemperaturen T_m som starttemperatur i beräkningsområdet. Som slutresultat kan de värden användas som erhålls under den fjärde beräknade perioden. Se avsnitt 6.3.1.

Blandade exempel

Exempel 1.

I ett halvoändligt plant område är temperaturen 0 °C vid tidpunkten $t = 0$. Vid tider $t \geq 0$ ges randtemperaturen av $T_1 + T_{a1} \sin((2\pi/t_p)t)$. Man vill kunna följa temperaturförloppet för tider $t \geq 400$ s. För temperaturvariationens periodlängd t_p gäller $t_p = 86400$ s. Beräkningens sluttid är $t_s = 1$ vecka $= 604800$ s.

För att kunna beräkna *temperaturstegets* resulterande temperaturer erhålls, med $t_1 = 400$ s, $\Delta x_1 = \sqrt{at_1} = 0.02$ m. Gittrets inre rand skall ha koordinaten $x_r \geq 3\sqrt{at_s} \approx 2.4$ m. Gittercellernas storlekar är 0.02, 0.02, 0.04, 0.08 ,0.16, 0.32, 0.64 och 1.28 m.

För att erhålla den *periodiska* lösningen med $t_p = 86400$ s skall den första cellens dimension enligt föregående avsnitt vara 0.033 m.

Vid beräkning av totalförloppet för tider $t \geq 400$ s måste den cellstruktur som definieras för temperatursteget användas, eftersom den periodiska lösningens cellstruktur ej uppfyller kravet (6.2.12) vid beräkningen av förloppet från temperatursteget.

Om förloppet efter det första dygnet skall följas ($t \geq 86400$ s) blir situationen annorlunda. Med $t_1 = 86400$ erhålls $\Delta x_1 = \sqrt{at_1} \approx 0.29$ m. Ett sådant gitter är för grovt för den periodiska lösningen. Följaktligen måste det gitter användas som är dimensionerat för den periodiska lösningen även om detta gitter är onödigt finstrukturerat för att beräkna svaret på stegtemperaturen.

Exempel 2.

Det betraktade området utgör en vägg med tjockleken 0.15 m. Värmeledningsförmågan $\lambda = 0.2$ W/mK och dess värmekapacitet är $C = 2 \cdot 10^6$ J/m^{3}K. Temperaturledningstalet är $a = \lambda/C = 10^{-7}$ m^2/s. Begynnelsetemperaturen i väggen är 0 °C. Vid tider $t \geq 0$ är temperaturen på väggens randytor $T_1 + T_{a1}$ respektive $T_2 + T_{a2}$. Här står T_{a1} och T_{a2} för amplituder vid periodiskt varierande temperaturer med periodlängden 1 dygn respektive 1 timme.

Temperaturen skall beräknas i det område som ligger inom 0.05 m från väggen med dygnsvariationen. Man är endast intresserad av det insvängda förloppet. Enligt avsnitt 6.3 kan, vid periodiskt varierande randtemperatur, beräknade värden efter 3 perioders variation användas.

Det gitter som behövs för dygnsvariationen skall enligt (6.3.2) ha en inre rand x_r som uppfyller $x_r \geq 4d_p \approx 0.21$ m. Detta gitter omfattar hela väggen. Med $\Delta x_1 = 0.2d_p \approx 0.01$ m erhålls gittret 0.01, 0.01, 0.02, 0.04 och 0.07 m.

Det gitter som behövs för timsvariationen skall enligt (6.3.2) ha en inre rand x_r som uppfyller $x_r \geq 4d_p \approx 0.04$ m. Detta gitter når inte fram till det vid beräkningen intressanta området. Den periodiska variationen med periodlängden 1 timme behöver inte beaktas vid den givna problemställningen.

Det återstår att beakta nödvändigt gitter för de två temperatursprång som åstadkoms vid tiden $t = 0$ av de två randtemperaturerna T_1 och T_2. Enligt

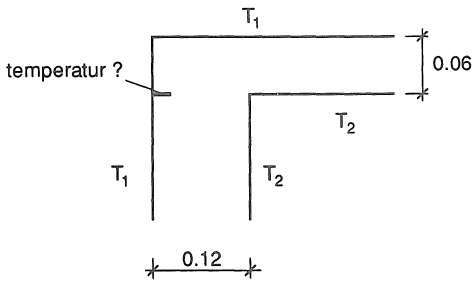
ovan är endast beräknade temperaturer efter 3 dygns variation intressanta. Med $t_1 = 3$ dygn ger (6.2.12) $\Delta x_1 = \sqrt{at_1} \approx 0.16$ m. Det för den periodiska erforderliga gittret har bättre upplösning än vad som krävs för beräkning av de förlopp som orsakas av stegtemperaturerna.

Vidare är endast det insvängda förloppet intressant. Formel (10.4.5) ger ett mått på hur snabbt det transienta förlopp som åstadkoms av de två temperaturstegen avklingar. Exponentialfaktorn ger värdet 0.000012 för tiden $t = 3$ dygn, vilket markerar att förloppet är nära den stationära slutfördelningen. Detta indikeras också av att den första cellen i gittret för temperatursteget är 0.16 m, vilket är större än hela väggens tjocklek.

Erforderligt gitter för den önskade beräkningen ges av gittret för dygnsvariationen.

Exempel 3.

Det betraktade området utgör ett hörn där två väggar möts. Väggarnas tjocklek är 0.06 respektive 0.12 m. Se figur 6.6.1.



Figur 6.6.1. Temperaturer vid hörn där två väggar möts.

Temperaturledningstalet för materialet i väggarna är $a = 10^{-7}$ m^2/s. Temperaturen längs den i figuren markerade linjen skall beräknas. Linjen sträcker sig från ytan och 0.03 m in i väggen. Linjen ligger i förlängningen av den ena väggens insida. Begynnelsetemperaturen i området är 0 °C. Vid tider $t \geq 0$ är väggarnas randtemperatur T_1 och T_2 enligt figuren.

Avståndet från det intressanta området till den ena väggytan med temperaturen T_1 är 0.06 m. Formel (10.1.4) anger att 1 % av temperatursprånget nått sträckan 0.06 m vid tiden $t \approx 2800$ s. Den enda rand som under denna tid påverkar det intressanta området är den rand från vilket området utgår. Före tidpunkten 2800 s kan, inom det angivna felet, de termiska förhållandena beskrivas som endimensionella i ett halvoändligt plant område. Ett endimensionellt gitter enligt (6.2.12-13) kan användas vid beräkning av temperaturen.

Kortaste avståndet från det intressanta området till ränderna med temperaturen T_2 är 0.09 m. Med samma beskrivning som ovan tar det 6250 s innan det intressanta området påverkas av dessa ränder. I tidsintervallet $2800 < t < 6250$ s kan beräkningsområdet beskrivas som ett tvådimensionellt hörn utan influens av ränderna med temperaturen T_2. Fallet blir analogt med det som beskrivs i avsnitt 10.5.

Vid tider $t \geq 6250$ s har ränderna med temperaturen T_2 betydelse för temperaturen i det intressanta området. Beräkningsområdet kan inte ges en förenklad beskrivning utan den fullständiga geometrin måste återges.

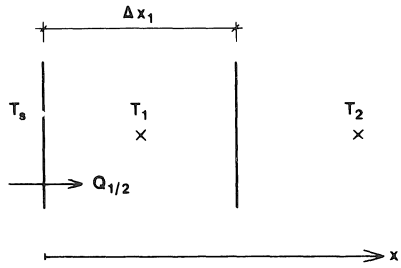
Kapitel 7

BEHANDLING AV RANDVILLKOR

Det har i tidigare avsnitt visats hur värmetransporten i ett beräkningsområde kan följas tidssteg för tidssteg med den redovisade lösningsmetoden. Förändringen av en beräkningscells temperatur under ett tidssteg bestäms av värmeflödet genom dess ränder. Dessa flöden bestäms i sin tur av temperaturen i de temperaturpunkter som omger cellen. Hela förloppet styrs således ytterst av de termiska förhållandena längs beräkningsområdets randytor.

7.1 Given temperatur eller givet värmeflöde

En grundläggande situation visas i figur 7.1.1.

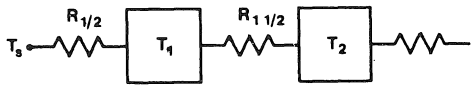


Figur 7.1.1. Randcell.

Yttemperaturen är känd i början av ett tidssteg. Den analytiska formuleringen av värmeflödet $q(x)$ (W/m^2) genom randen $x = 0$ är:

$$q(0) = -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} \tag{7.1.1}$$

Låt den betraktade cellens randyta ha arean A (m^2). I figur 7.1.2 visas en schematisk bild av situationen.



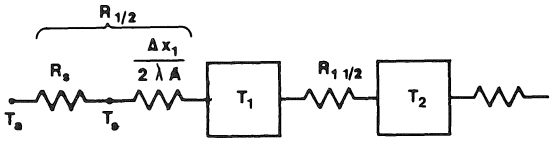
Figur 7.1.2. Schematisk bild av randcell.

Det totala värmeflödet $Q_{1/2}$ (W) genom randen kan i analogi med (4.3.2) skrivas:

$$Q_{1/2} = \frac{1}{R_{1/2}}(T_s - T_1) = \frac{2\lambda A}{\Delta x_1}(T_s - T_1) \tag{7.1.2}$$

Detta värde på värmeflödet genom den betraktade cellranden används vid iterationsförfarandet enligt avsnitt 4.2.1, punkt 3. Om randvillkoret i stället utgörs av ett föreskrivet värmeflöde q_s (W/m^2) tilldelas $Q_{1/2}$ det föreskrivna värdet Aq_s (W).

I vissa fall är den kända temperaturen inte yttemperatur till beräkningsområdet. Detta är fallet vid t ex en vägg där man känner den ostörda luftens temperatur T_a ett stycke från väggytan. I ett gränsskikt varierar lufttemperaturen mellan den kända lufttemperaturen och väggytans temperatur. Betrakta en delyta av väggen med arean A (m^2). Gränsskiktet kan då tillskrivas ett värmemotstånd R_s (K/W). Situationen visas schematiskt i figur 7.1.3.



Figur 7.1.3. Randyta med värmeövergångsmotstånd.

Yttemperaturen T_s bestäms av en värmebalansekvation. Man har:

$$\frac{T_a - T_s}{R_s} + \frac{2\lambda A}{\Delta x_1}(T_1 - T_s) = 0 \tag{7.1.3}$$

Man erhåller:

$$T_s = \frac{\frac{1}{R_s}T_a + \frac{2\lambda A}{\Delta x_1}T_1}{\frac{1}{R_s} + \frac{2\lambda A}{\Delta x_1}} \tag{7.1.4}$$

Det totala värmeflödet $Q_{1/2}$ (W) genom randen kan skrivas:

$$Q_{1/2} = \frac{1}{R_s + \frac{\Delta x_1}{2\lambda A}}(T_a - T_1) \tag{7.1.5}$$

Ibland definieras gränsskiktets termiska egenskaper som ett värmeövergångstal α (W/m^{2}K). Man har:

$$R_s = \frac{1}{\alpha A} \tag{7.1.6}$$

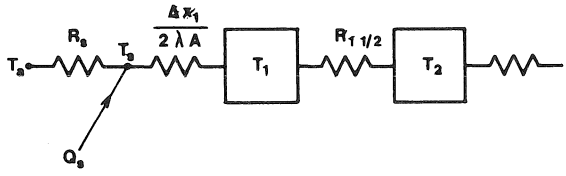
$$Q_{1/2} = \frac{A}{\frac{1}{\alpha} + \frac{\Delta x_1}{2\lambda}}(T_a - T_1) \tag{7.1.7}$$

Man kan i överensstämmelse med (4.3.4) och (7.1.2) definiera värmemotståndet $R_{1/2}$ (K/W) så att även R_s omfattas:

$$R_{1/2} = R_s + \frac{\Delta x_1}{2\lambda A} \tag{7.1.8}$$

7.2 Värmekälla i randytan. Ekvivalent omgivningstemperatur

Låt väggytan i föregående avsnitt träffas av värmestrålning, till exempel solstrålning. En del, q_s (W/m^2), absorberas av ytan. Betrakta arean A (m^2) av väggytan. En schematisk bild av situationen visas i figur 7.2.1.



Figur 7.2.1. Absorption av strålning i en yta.

Yttemperaturen T_s bestäms av en värmebalansekvation där $Q_s = Aq_s$:

$$\frac{1}{R_s}(T_a - T_s) + Q_s + \frac{2\lambda A}{\Delta x_1}(T_1 - T_s) = 0 \tag{7.2.1}$$

Man får:

$$T_s = \frac{\frac{1}{R_s}T_a + \frac{2\lambda A}{\Delta x_1}T_1 + Q_s}{\frac{1}{R_s} + \frac{2\lambda A}{\Delta x_1}} \tag{7.2.2}$$

Med $R_s = 1/(A\alpha)$ erhålls:

$$T_s = \frac{\alpha T_a + \frac{2\lambda}{\Delta x_1}T_1 + q_s}{\alpha + \frac{2\lambda}{\Delta x_1}} \tag{7.2.3}$$

Det totala värmeflödet $Q_{1/2}$ (W) genom cellranden blir:

$$Q_{1/2} = \frac{A}{\frac{1}{\alpha} + \frac{\Delta x_1}{2\lambda}}\left(T_a + \frac{q_s}{\alpha} - T_1\right) \tag{7.2.4}$$

Jämförelse med (7.1.7) visar att inflytandet av den absorberade strålningen kan beskrivas med en förändrad, ekvivalent lufttemperatur T_{ekv}, där:

$$T_{ekv} = T_a + \frac{q_s}{\alpha} \tag{7.2.5}$$

Värmeflödet $Q_{1/2}$ (W) kan då skrivas:

$$Q_{1/2} = \frac{1}{R_{1/2}}(T_{ekv} - T_1) \tag{7.2.6}$$

Ett förändrat värde på q_s påverkar endast värdet av T_{ekv} i uttrycket (7.2.6). Termen q_s kan omfatta såväl kortvågig som långvågig värmetransport till eller från den betraktade ytan. Termen kan även omfatta den värmekälla eller värmesänka som uppstår om till exempel vattenånga kondenserar på ytan eller vatten avdunstar från den.

7.3 Långvågigt strålningsutbyte vid randyta

I föregående avsnitt visas hur en i randytan absorberad eller avgiven värmeeffekt påverkar randvillkoren. I den beskrivna situationen hade den absorberade effekten ett föreskrivet värde. En yta med en temperatur som överstiger absoluta nollpunkten avger emellertid en temperaturberoende värmestrålning till omgivningen. Värmestrålningen Q (W) från en yta ges av:

$$Q = A\epsilon\sigma T_K^4 \tag{7.3.1}$$

A ytans area (m^2)

ϵ ytans emissionsfaktor $0 \leq \epsilon \leq 1$

σ Stefan Boltzmanns konstant ($5.7 \cdot 10^{-8}$ W/m^2K^4)

T_K ytans absoluta temperatur i Kelvin (K)

Emissionsfaktorn ϵ är i allmänhet beroende av ytans temperatur och av strålningens våglängd och riktning. För en ideal svart kropp gäller $\epsilon = 1$. All strålning som träffar en svart kropp absorberas. Två ytor 1 och 2, vilka är synliga för varandra, kommer strålningsmässigt att påverka varandra. Deras areor är A_1 och A_2. Yta 1 avger strålningseffekten Q_1 (W) enligt (7.3.1). Av Q_1 kommer $Q_{1\to 2}$ (W) att träffa yta 2. Under förutsättning att båda ytorna uppfyller $\epsilon = 1$ bestäms storleken av $Q_{1\to 2}$ av synfaktorn (vinkelfaktorn) $F_{1\to 2}$ mellan yta 1 och 2. Synfaktorns belopp bestäms av en dubbelintegral över de båda berörda ytorna. Se till exempel [*Brown*], [*Claesson et al., Värme, kap 6*] eller [*Siegel, kap 7-10*]. Man erhåller:

$$Q_{1\to 2} = \sigma T_{K,1}^4 A_1 F_{1\to 2} \tag{7.3.2}$$

All denna strålningseffekt absorberas av yta 2. Man har en analog strålningseffekt $Q_{2\to 1}$ som lämnar yta 2 och som helt absorberas av yta 1. Man kan visa följande samband:

$$A_1 F_{1\to 2} = A_2 F_{2\to 1} \tag{7.3.3}$$

För nettovärmeflödet Q_{12} (W) från yta 1 till yta 2 erhålls:

$$Q_{12} = Q_{1\to 2} - Q_{2\to 1} = \sigma A_1 F_{1\to 2}\left(T_{K,1}^4 - T_{K,2}^4\right) \tag{7.3.4}$$

Situationen blir mer komplicerad om emissionsfaktorn för den ena eller båda ytorna är mindre än ett. Då absorberar inte yta 2 hela den avgivna strålningseffekten $Q_{1\to 2}$ från yta 1, utan en del reflekteras från yta 2. Av denna reflekterade strålning träffar en viss del yta 1. Storleken av denna del bestäms av synfaktorn $F_{2\to 1}$ mellan yta 2 och yta 1. Utstrålningen $Q_{1\to 2}$ ger upphov till en oändlig serie av strålningseffekter mellan de två ytorna. På samma sätt erhåller man en serie strålningseffekter mellan ytorna med upphov i utstrålningen $Q_{2\to 1}$ från yta 2.

Om ytorna har samma area, är parallella och nästan täcker varandra (till exempel rutorna i ett tvåglasfönster) gäller $F_{1\to 2} \approx F_{2\to 1} \approx 1$. Man kan visa att nettostrålningen Q_{12} (W) från yta 1 till yta 2 ges av:

$$Q_{12} = A_1 \frac{\sigma}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}\left(T_{K,1}^4 - T_{K,2}^4\right) \tag{7.3.5}$$

Uttrycket (7.3.5) kan omformuleras till:

$$Q_{12} = K_{12}(T_{K,1} - T_{K,2}) \tag{7.3.6}$$

Här ges strålningskonduktansen K_{12} (W/K) av:

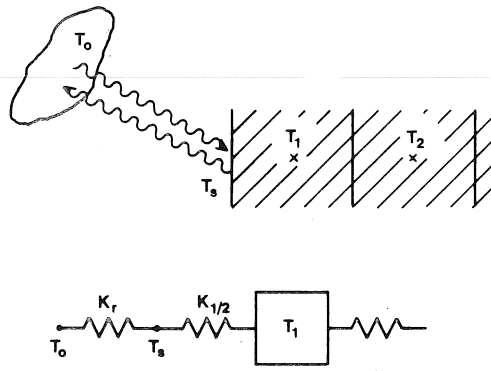
$$K_{12} = \frac{A_1\sigma}{\frac{1}{\epsilon_1}+\frac{1}{\epsilon_2}-1}(T_{K,1}+T_{K,2})\left(T_{K,1}^2+T_{K,2}^2\right) \approx \frac{4A_1\sigma}{\frac{1}{\epsilon_1}+\frac{1}{\epsilon_2}-1}T_m^3 \qquad (7.3.7)$$

$$T_m = \frac{T_{K,1}+T_{K,2}}{2}$$

Nettovärmeflödet från yta 1 till yta 2 kan således ges samma beskrivning som i tidigare kapitel använts för konduktiva värmeflöden mellan temperaturpunkter. Se till exempel (4.3.2). Den enda skillnaden är att konduktansen i (7.3.6) är temperaturberoende.

I ett allmänt fall med många ytor blir situationen mer komplicerad. Man har en blandning av emission, absorbtion och reflexion vid samtliga ytor. Diffus respektive riktad strålning måste behandlas olika. En ytas egenskaper beträffande nämnda processer kan vara temperaturberoende. Vid beskrivning av det resulterande strålningsutbytet mellan ytor kan man använda fördelningsfaktorer $F_{i,j}$ där $F_{i,j}$ anger andelen av från yta i totalt emitterad strålning som direkt eller via ett antal reflexioner absorberas i yta j. Genom lösning av ett ekvationssystem, i vilket vinkelfaktorer och emissionstal för enskilda ytor ingår, kan fördelningsfaktorernas värden bestämmas. Det gäller alltid att $\sum_j F_{i,j} = 1$ och i allmänhet att $F_{i,i} \neq 0$.

Uttryck för nettovärmeflödet mellan ytor kan ställas upp i analogi med (7.3.4).



Figur 7.3.1. Strålningsutbyte mellan två ytor.

Figur (7.3.1) visar schematiskt en randyta som har ett långvågigt strålningsutbyte med en yta med den kända temperaturen T_0. Strålningskonduktansen K_r mellan de två ytorna är temperaturberoende. Temperaturen i den första cellen är T_1. Randtemperaturen T_s kan bestämmas ur följande värmebalansekvation för yttemperaturpunkten:

$$K_r(T_0 - T_s) + K_{1/2}(T_1 - T_s) = 0 \qquad (7.3.8)$$

Detta ger:

$$T_s = \frac{K_r T_0 + K_{1/2} T_1}{K_r + K_{1/2}} \tag{7.3.9}$$

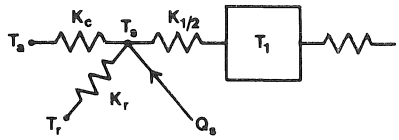
I uttrycket (7.3.9) erhåller $K_{1/2}$ och K_r värden från uttryck av typ (4.3.4) respektive (7.3.7). Eftersom K_r har ett värde som beror av den från början okända temperaturen T_s måste (7.3.9) lösas med till exempel en iterativ metod. Man ansätter ett värde för T_s och beräknar ett K_r. Därmed ger (7.3.9) ett nytt värde på T_s, vilket kan användas för en ny beräkning av K_r osv. Förfarandet avbryts när önskad precision uppnåtts.

Om man har ett extra värmetillskott Q_s i randytan förändras (7.3.9) i analogi med (7.2.2), dvs Q_s adderas till täljaren av (7.3.9).

7.3.1 Bakgrundsstrålning vid randyta

Randytan, vars emissionstal är ϵ_s, är exponerad mot oskymd himmel. Ytan kan t ex vara markytan eller en horisontell byggnadsyta. Vinkelfaktorn mellan ytan och rymden har då värdet ett. Ytan har ett långvågigt strålningsutbyte med rymden som betraktas som en svart kropp ($\epsilon_r = 1$). Rymdens strålningstemperatur är T_r (°C). I ytan absorberas dessutom effekten q_s (W/m^2) från till exempel solstrålning. Ytan är vidare termiskt kopplad till den omgivande luften med en konvektiv värmeövergångskoefficient α_c (W/m^{2}K).

En delyta av randen har arean A (m^2). En schematisk bild av situationen visas i figur 7.3.2. Man har $K_c = A\alpha_c$. I bilden återges även den första cellen, temperatur T_1, i materialet innanför den betraktade ytan.



Figur 7.3.2. Värmeströmningskrets för en yta som är exponerad mot rymden.

En värmebalansekvation ger ett uttryck för yttemperaturen T_s.

$$(T_a - T_s)K_c + (T_r - T_s)K_r + (T_1 - T_s)K_{1/2} + Aq_s = 0 \tag{7.3.10}$$

Man får:

$$T_s = \frac{K_c T_a + K_r T_r + K_{1/2} T_1 + Aq_s}{K_c + K_r + K_{1/2}} \tag{7.3.11}$$

$$K_r = A\epsilon_s\sigma\left(T_{K,s} + T_{K,r}\right)\left(T_{K,s}^2 + T_{K,r}^2\right) \approx 4A\epsilon_s\sigma T_m^3$$

$$T_m = \frac{T_{K,1} + T_{K,2}}{2}$$

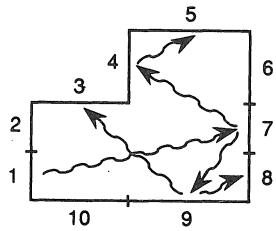
ϵ_s	emissionstal för ytan
$T_{K,s}$	ytans temperatur (K)
$T_{K,r}$	rymdens strålningstemperatur (K)
K_r	ytans strålningskonduktans mot rymden (W/K)

I likhet med (7.3.9) ger (7.3.11) ett implicit uttryck för T_s, vilket kan lösas med en iterativ metod. När T_s är beräknad med önskad noggrannhet kan det totala värmeflödet (W) genom randen in till den första cellens temperaturpunkt beräknas enligt:

$$Q_{1/2} = K_{1/2}(T_s - T_1) \tag{7.3.12}$$

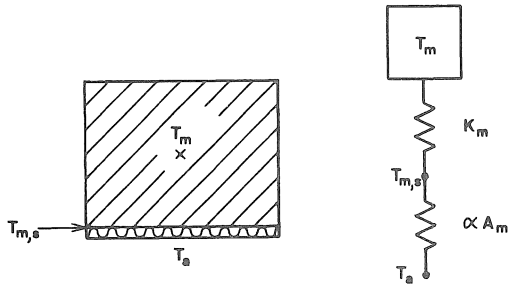
7.3.2 Slutet hålrum

I ett luftfyllt, slutet hålrum antas luften vara så väl blandad att dess temperatur kan representeras med ett värde, T_a. Detta gäller dock ej inom det tunna gränsskiktet vid hålrummets ytor. Den inneslutna luften antas vidare ha så kort tidskonstant jämfört med beräkningscellerna runt hålrummet att luftens värmekapacitet kan försummas.



Figur 7.3.3. Tvärsnitt genom slutet hålrum. Några strålningsvägar är markerade.

Figur 7.3.3 visar schematiskt ett tvärsnitt genom hålrummet. Hålrummets omslutningsyta har delats in i ett antal delytor vilka utgör randytor till celler i den omgivande cellstrukturen. Ytorna har numrerats från 1 till $N = 10$.



Figur 7.3.4. Randyta till cell nummer m. Fysisk och schematisk beskrivning.

I figur 7.3.4 ges beteckningar för storheter vid randytan till cell nummer m. Värmeövergångskoefficienten mellan luften och ytan är α_m. Cellens yttemperatur är $T_{m,s}$. Randytans area är A_m. Strålningskonduktansen mellan två ytor m och n betecknas $K_{m,n}$. Se till exempel specialfallet som ges av (7.3.6-7). Värmebalans för randyta nummer m ger:

$$(T_a - T_{m,s})\alpha_m A_m + (T_m - T_{m,s})K_m + \sum_{n=1}^{N}(T_{n,s} - T_{m,s})K_{m,n} = 0 \quad (7.3.13)$$

Värmebalans för luften ger:

$$\sum_{n=1}^{N}(T_{n,s} - T_a)\alpha_n A_n = 0 \quad (7.3.14)$$

Uttrycket (7.3.13) ger en ekvation för varje delytas yttemperatur. Uttrycket (7.3.14) ger den extra ekvation, som behövs för att de okända yttemperaturerna och lufttemperaturen i hålrummet skall kunna beräknas. Ekvationssystemet löses med någon standardmetod.

7.4 Beräkningsområde med obegränsad utsträckning

I avsnitt 7.1-3 behandlas randvillkor vid ytor med väldefinierad rumslig position. Många problem omfattar emellertid ett geometriskt område med i princip oändlig utsträckning. Ett exempel på detta är värmeförluster till marken från ett hus där marken enkelt uttryckt har "oändlig utsträckning" i såväl vertikal som horisontell led.

Vid den numeriska lösningen beskrivs beräkningsområdet med en cellstruktur där varje enskild cell har begränsad utsträckning. Då antalet celler är ändligt blir även beräkningsområdets utsträckning ändligt. Det felaktiga randvillkoret introducerar fel i

lösningen. Två problemställningar uppstår. Var skall områdets yttre gränser förläggas? Vilket randvillkor skall dessa ränder ges?

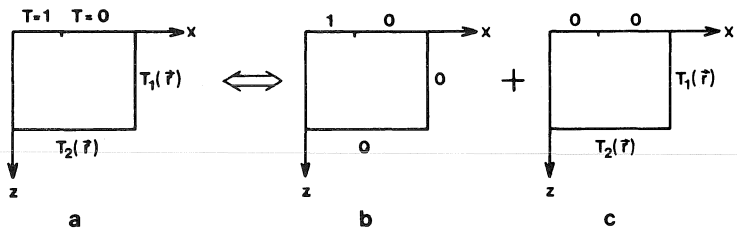
En lämplig placering av de yttre gränserna bestäms av det betraktade problemets tidsskala och av dess geometri. Tidsskalan avgör hur långt in i området en termisk störning vid en randyta har nått under den intressanta tiden. Problemets geometri ger ytterligare information till exempel om maximal temperaturförändring som funktion av avståndet från randytan.

Valet av randvillkor vid den yttre randen står mellan given temperatur och givet värmeflöde. Problemställningarna är belysta i kapitel 6 och 10. Typen av fel som introduceras kan belysas på följande sätt.

Antag att den stationära temperaturfördelningen runt en platta på mark skall beräknas (se avsnitt 6.4.1). Vid lösningen är randvillkoret $T = 0$ ansatt vid de yttre ränderna. Detta villkor introducerar ett fel i beskrivningen av problemet.

Figur 7.4.1a visar en korrekt formulering av det givna problemet om det skall lösas numeriskt inom ett begränsat område. Längs de yttre ränderna ansätts temperaturvariationerna $T_1(\vec{r})$ och $T_2(\vec{r})$, vilka skall överensstämma med den analytiska lösningens variation längs ränderna.

Figuren visar hur detta problem genom tillämpning av superpositionsprincipen kan delas upp i två delar. Den ena delen (b) är det numeriskt lösta problemet. Den andra delen (c) är ett nytt problem som visar (b)'s avvikelse från det korrekta problemet.



Figur 7.4.1. Ändlig beskrivning av ett beräkningsområde med obegränsad utsträckning.

Av figuren framgår att ju längre ut beräkningsområdets gränser flyttas desto mindre absolutvärde får randtemperaturerna T_1 och T_2 i fall c. Felet i den numeriska lösningen enligt b minskar således vid utflyttning av ränderna dels för att randtemperaturerna i avvikelseproblemet c minskar och dels för att de yttre ränderna kommer längre ifrån det intressanta området vid plattan på markytan.

Det förda resonemanget är relevant även för transienta problem. Randtemperaturerna T_1 och T_2 är då tidsberoende funktioner vilka ger tidsberoende störningar som tränger in i beräkningsområdet från de yttre ränderna. Inträngningsdjupet beror på problemets tidsskala.

7.5 Tidsberoende randvillkor

Under ett tidssteg representeras varje randvillkor av ett konstant värde. Avsnittet belyser hur detta värde skall väljas när det verkliga randvillkoret varierar med tiden.

7.5.1 Given temperatur eller givet värmeflöde

Problemet skall belysas med ett exempel där temperaturfördelningen i marken skall bestämmas. Exemplet avser endast att illustrera ett principiellt problem, varför bland annat frysningsprocessen i marken försummas. Randvillkoret vid markytan ges av den tidsberoende lufttemperaturen som finns tillgänglig i form av ett mätvärde i timmen under ett år. Den uppmätta temperaturvariationen antas återkomma år efter år. Med hjälp av Fourieranalys kan lufttemperaturen T_a ges följande beskrivning:

$$T_a = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} T_n \sin\left(\frac{2\pi}{1\ \text{år} \cdot n} + \Phi_n\right) \tag{7.5.1}$$

$$T_m = \frac{1}{1\ \text{år}} \int_0^{1\ \text{år}} T_a\, dt$$

Man är endast intresserad av temperaturförloppet så långt nere i marken att bara lufttemperaturens årsvariation behöver beaktas. Se avsnitt 10.1.2. Formel (6.3.2) anvisar en cellstruktur för beräkningen. Tabell 6.3.3 ger den erhållna beräkningsprecisionen. Vid beräkningen skall lufttemperaturen beskrivas enligt:

$$T_a = T_m + T_1 \sin\left(\frac{2\pi}{1\ \text{år}} t + \Phi_1\right) \tag{7.5.2}$$

Storheterna T_1 och Φ_1 definieras av (7.5.1).

Att använda de timvis uppmätta värdena i stället för (7.5.2) kan ge upphov till stora felaktigheter. Med den valda cellstrukturen följer en viss tidsstegslängd Δt (se avsnitt 5.2.1 och kapitel 5). I det aktuella fallet är tidssteget av storleksordningen 2 till 6 dygn. Ur den uppmätta lufttemperaturen kommer således endast enstaka värden från vissa dygn att användas. Dessa värden behöver inte alls vara representativa för årsvariationen enligt (7.5.2). Man kan till exempel råka få den högsta temperaturen från varje använt dygn varvid årsmedeltemperaturen för luften blir felaktig.

Problemet kan lösas genom att man vid beräkningen använder en lufttemperaturfunktion enligt (7.5.2) eller att man använder de timvis uppmätta värdena, men "jämnar ut dem". Därmed kan man få ett användbart värde T_b för lufttemperaturen i början på varje tidssteg. Man har till exempel:

$$T_b = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\beta\Delta t}^{t+(1-\beta)\Delta t} T_a(t)\, dt \tag{7.5.3}$$

$$\text{där} \qquad 0 \le \beta \le 1$$

Här kan β väljas på olika sätt. Om $\beta = 0.5$ är T_b medeltemperaturen under ett tidsintervall Δt vilket är centrerat runt början av det betraktade tidssteget.

Om randvillkoret i stället är ett givet randflöde $q(t)$ (W/m^2) genom randen kan det vara lämpligt att välja $\beta = 0$. Då ges det använda randflödet q_b av:

$$q_b = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} q(t)\, dt \tag{7.5.4}$$

Storheten q_b ger då exakt rätt värmetillskott till randcellen under det aktuella tidssteget.

Den väsentliga egenskapen hos den valda representationen av det tidsberoende randvillkoret är medelvärdesriktigheten. Detta innebär att tidsintegralen av de använda randvärdena och de verkliga skall vara lika.

7.5.2 Övergångsmotstånd mellan fluid och fast yta

När en fluid strömmar längs en fast yta med från fluiden avvikande temperatur erhålls en temperaturvariation i fluiden i normalriktningen mot den fasta ytan. I allmänhet uppträder den största delen av temperaturvariationen inom ett begränsat avstånd från den fasta ytan. Man har ett så kallat gränsskikt i strömningen.

Vid bestämning av värmeflödet mellan fluiden och den fasta ytan kan effekten av gränsskiktet beskrivas som ett värmemotstånd. Värmemotståndets storlek beror bland annat av fluidens värmeledningsförmåga, dess hastighet, ytans skrovlighet och den betraktade konstruktionens geometri. Förändring av till exempel fluidhastigheten under beräkningens gång medför således att gränsskiktets värmemotstånd ändras.

Det aktuella problemets art avgör hur noggrannt gränsskiktet behöver beskrivas. Det varierande övergångsmotståndet $R(t)$ K/(W/m^2) kan omskrivas till en ekvivalent skikttjocklek d_{ekv} (m) av det fasta materialet. Man har:

$$d_{ekv} = \lambda_{fast} \cdot R(t) \tag{7.5.5}$$

Betrakta till exempel värmeövergångsmotståndet mellan markyta och luft. Låt jordens värmeledningsförmåga vara $\lambda = 1$ (W/mK) och värmeövergångsmotståndet R variera i intervallet 0.05-0.2 K/(W/m^2), vilket svarar mot värmeövergångstalet 5-20 (W/m^{2}K). Den ekvivalenta marktjockleken blir då 0.05-0.2 m. Det angivna värmeövergångsmotståndet motsvarar således ett extra skikt jord vars tjocklek varierar i intervallet 0.05-0.2 m. Det är uppenbart att gränsskiktet måste beskrivas noggrannt om temperaturfördelningen nära markytan är intressant.

Det betraktade gränsskiktet saknar emellertid praktisk betydelse för temperaturförhållandena på större avstånd från markytan, till exempel runt ett bergrumsvärmelager som ligger på djupet 30 m under markytan. Om markens värmeledningsförmåga varit $\lambda = 3.5$ W/mK (granit) hade den ekvivalenta marktjockleken i stället varit 0.2-0.7 m.

Man får i varje enskilt fall bedöma om motståndets storlek har betydelse eller ej för problemet. Om det har betydelse kan man överväga om det kan beskrivas som ett konstant motstånd eller om dess tidsvariation är väsentlig.

7.6 Fluidströmning längs en kanal

I många tillämpningar har man en överföring av värme mellan en strömmande fluid och en omgivning bestående av fast material. Detta är en vanlig överföringsmetod i många markvärmesystem.

7.6.1 Endimensionell strömning längs en kanal. Stationär beskrivning

En fluid strömmar längs ett rör. Inloppstemperaturen är T_{in}. Volymflödet ges av V_f (m^3/s) och fluidens värmekapacitet är C_f (J/m^3K).

Låt röret ha radiell symmetri. Det omgivande materialet är indelat i ett gitter med radiell symmetri. Övergångsmotståndet mellan fluiden och den första cellens temperaturpunkt är R (K/(W/m)). Celltemperaturen är T_{cell}. Fluidtemperaturen längs röret ges av $T_f(x)$, där inloppet ges av $x = 0$.

Man erhåller ett transient förlopp i fluiden. Vid oförändrad celltemperatur går detta förlopp mot en stationär temperaturfördelning längs röret utanför cellen. Värmebalans för fluiden ger:

$$V_f C_f \frac{dT_f}{dx} = \frac{T_{cell} - T_f}{R} \tag{7.6.1}$$

Man erhåller för fluidtemperaturen:

$$T_f(x) = T_{cell} + (T_{in} - T_{cell})e^{-\frac{x}{RC_f V_f}} \tag{7.6.2}$$

I en tidsskala när det transienta förloppet i fluiden kan försummas kan randvärmeflödet till gittercellerna bestämmas med hjälp av (7.6.1). Låt $x = 0$ vara den punkt där en bestämd cells rand mot röret börjar. Cellens längd i fluidens flödesriktning är Δx. Låt $T_f(0)$ vara känt. Fluidens temperatur vid cellens slut är $T_f(\Delta x)$ enligt (7.6.2). Det totala randflödet Q_{cell} (W) in till cellen ges av:

$$Q_{cell} = (T_f(0) - T_f(\Delta x))\, C_f V_f \tag{7.6.3}$$

Inloppstemperaturen för nästa randcell är nu känd och förfarandet kan upprepas för varje cell längs hela röret. Därmed är det klart hur rörets randflöden kan behandlas när inloppstemperaturen till röret är känd.

Situationen blir annorlunda om den totala effektöverföringen Q_{tot} via hela röret är given och nödvändig inloppstemperatur skall bestämmas. Med hjälp av det ovan beskrivna stegvisa följandet av fluidtemperaturen längs röret ger en analys följande linjära samband mellan rörets in- och utloppstemperatur [*Eskilson, 1986, s 27*]:

$$T_{ut} = aT_{in} + b \tag{7.6.4}$$

Konstanterna a och b är bildade av ingående konduktanser mellan fluid och de olika cellerna samt dessas respektive temperaturer. Konstanten a är oberoende av temperaturen utanför borrhålet. Dess värde är därför i allmänhet konstant under simuleringen.

Detta gäller ej för b som behöver beräknas på nytt vid ändrade temperaturer utanför borrhålet.

Den sökta inloppstemperaturen kan bestämmas på följande sätt. Den totala effektöverföringen kan med hjälp av (7.6.4) skrivas:

$$Q_{tot} = C_f V_f (T_{in} - T_{ut}) = C_f V_f \left((1-a)T_{in} - b\right) \tag{7.6.5}$$

Den totala effekten Q^0 som skulle erhållas med $T_{in} = 0$ kan bestämmas genom en stegvis genomräkning enligt ovan. Formel (7.6.5) ger även direkt ett uttryck för Q^0:

$$Q^0 = -C_f V_f b \tag{7.6.6}$$

Genom att subtrahera (7.6.6) från (7.6.5) elimineras b och följande uttryck för den sökta inloppstemperaturen erhålls:

$$T_{in} = \frac{Q_{tot} - Q^0}{C_f V_f (1-a)} \tag{7.6.7}$$

Därmed kan randflödet till de olika cellerna beräknas på samma sätt som tidigare.

7.6.2 Transient beskrivning

I föregående sektioner gavs beskrivningar på fluidtemperatur och värmeöverföring mellan fluid och omgivning där det transienta förloppet i fluiden försummats. I vissa situationer duger inte denna förenkling utan man behöver en korrekt beskrivning även för korttidsvariationer. Detta är till exempel fallet när solfångare skall arbeta tillsammans med ett borrhålslager. Solfångarnas termiska funktion är starkt beroende av temperaturen på fluiden som kommer till dem. Vidare måste man kunna ta hänsyn till solintensitetsvariationer med varaktighet given i storleksordningen minuter. För att klara detta måste fluidtransporten genom lagret beskrivas med motsvarande tidsupplösning.

Beräkningarna för fluiden måste genomföras med tidssteg som är anpassade till fluidcellernas aktuella tidsskala (kapitel 5 och 6). Man kan emellertid ha olika tidsstegslängder i fluiden och i den omgivande marken varför denna kortare tidsskala inte behöver påverka markberäkningarna.

Med hänsyn taget till det aktuella volymflödet förflyttas fluiden framåt i flödesriktningen. Denna process medför samma typ av problem med numerisk dispersion som redovisas i avsnitt 13.4. Se även [*Hellström, Thesis*].

Kapitel 8

ANPASSNING MELLAN GITTER OCH OMRÅDES-RÄNDER

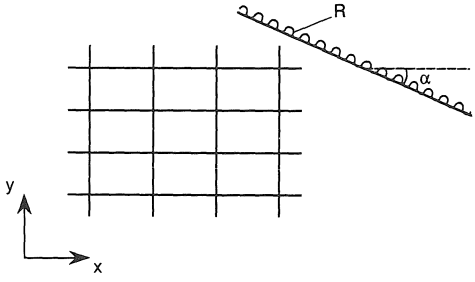
Problem kan uppstå när geometrin i ett beräkningsområde skall beskrivas med en ortogonal cellstruktur. Några olika metoder att överbrygga problemen redovisas i de följande avsnitten.

8.1 Sned rand i en Cartesisk cellstruktur

I avsnitt 3.6 visades att det är väsentligt att sammanbindningslinjen mellan två intilliggande cellers temperaturpunkter skär den gemensamma randen under rät vinkel. Ortogonala cellstrukturer uppfyller detta krav. Problem kan bland annat uppstå vid beskrivning av oregelbundna beräkningsområden med hjälp av Cartesiska cellstrukturer.

8.1.1 Yttre områdesrand

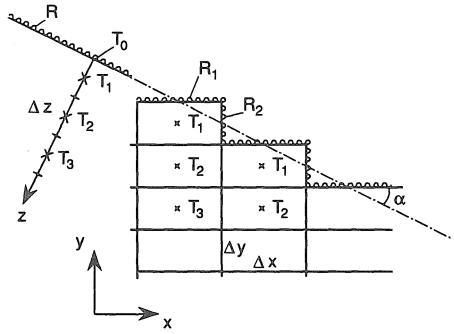
Figur 8.1.1 visar ett fall där ett beräkningsområdes rand ej är parallell med någon av axlarna i det valda koordinatsystemet.



Figur 8.1.1. Sned rand i en rätvinklig cellstruktur.

Beräkningsområdet begränsas av en plan randyta som är täckt av ett tunt skikt med värmemotståndet R (K/(W/m^2)). Randen har så stor utsträckning att temperaturfördelningen kan betraktas som endimensionell innanför randytan.

Beräkningsområdet skall beskrivas med två olika gitterstrukturer. Den ena strukturen är endimensionell i ytans normalriktning och den andra är tvådimensionell enligt figur 8.1.2. För de två strukturerna skall uttryck ges för de nya temperaturer som erhålls efter ett tidssteg. Vid korrekt tvådimensionell representation skall de beräknade temperaturerna vara lika.



Figur 8.1.2. Cellindelning vid sned rand.

Den tvådimensionella cellstrukturen anpassas så att den plana randen skär randcellernas randytor i dessas mittpunkter. Därmed överensstämmer materialvolymen i cellstrukturen med volymen i beräkningsområdet. Vid randytorna ansätts värmemotstånden R_1 och R_2 (K/(W/m^2)) enligt figuren. Cellernas kantlängder är Δx och Δy.

I den endimensionella gitterstrukturen är cellstorleken Δz vald så att avståndet från cellernas mittpunkter till den plana randytan överensstämmer med motsvarande avstånd i den tvådimensionella cellstrukturen. Följande samband erhålls:

$$\Delta y = \frac{\Delta z}{\cos \alpha} \tag{8.1.1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha \tag{8.1.2}$$

I ett givet ögonblick är temperaturen i den endimensionella cellstrukturen T_0, T_1, $T_2 \ldots$. Med hjälp av dessa starttemperaturer skall temperaturen i randcellerna efter ett tidssteg Δt bestämmas för de två definierade cellstrukturerna. Uttrycken ställs upp på samma sätt som ekvationen (5.1.10).

I den endimensionella strukturen erhåller randcellen den nya temperaturen $T_{1,ny}$:

$$T_{1,ny} = \left(1 - \left(\frac{1}{R + \frac{\Delta z}{2\lambda}} + \frac{\lambda}{\Delta z}\right)\frac{\Delta t}{C\Delta z}\right) T_1 \tag{8.1.3}$$
$$+ \frac{1}{R + \frac{\Delta z}{2\lambda}} \cdot \frac{\Delta t}{C\Delta z} \cdot T_0 + \frac{\lambda}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta t}{C\Delta z} \cdot T_2$$

För den tvådimensionella strukturen blir motsvarande uttryck:

$$T_{1,ny} = \left(1 - \left(\frac{\Delta x}{R_1 + \frac{\Delta y}{2\lambda}} + \frac{\Delta y}{R_2 + \frac{\Delta x}{2\lambda}} + \frac{\lambda\Delta x}{\Delta y} + \frac{\lambda\Delta y}{\Delta x}\right)\frac{\Delta t}{C\Delta x\Delta y}\right) T_1 \tag{8.1.4}$$
$$+ \left(\frac{\Delta x}{R_1 + \frac{\Delta y}{2\lambda}} + \frac{\Delta y}{R_2 + \frac{\Delta x}{2\lambda}}\right)\frac{\Delta t}{C\Delta x\Delta y} T_0 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\frac{\lambda\Delta t}{C\Delta x\Delta y} T_2$$

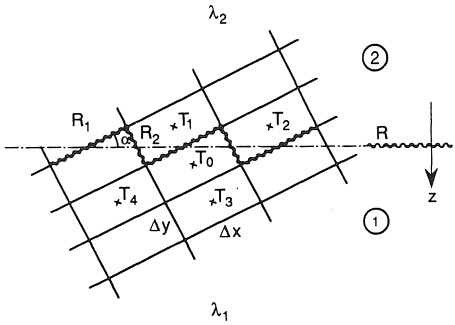
De båda uttrycken (8.1.3-4) för den nya temperaturen $T_{1,ny}$ skall vara identiska. Detta medför:

$$R_1 = \frac{R}{\cos\alpha} \tag{8.1.5}$$

$$R_2 = \frac{R}{\sin\alpha} \tag{8.1.6}$$

Den konstruerade tvådimensionella gitterstrukturen ger exakt samma lösning som den mot randen vinkelräta endimensionella strukturen.

Den fysikaliska bakgrunden till de förändrade motståndsvärdena kan beskrivas på följande sätt.



Figur 8.1.3. Värmemotstånd vid en i förhållande till koordinatsystemet sned rand.

Den verkliga, plana randen ges en artificiell sågtandformad geometri enligt figur 8.1.3. En given temperaturdifferens ΔT över motståndsskiktet skall för den artificiella randen

ge korrekt värmeflöde in i beräkningsområdet. Värmeflödet q (W/m) genom sträckan Δx längs den artificiella randen är:

$$q = \Delta T \frac{\cos\alpha}{R} \Delta x = \Delta T \frac{\ell_1}{R} \tag{8.1.7}$$

Uttrycket (8.1.7) beskriver även det korrekta värmeflödet genom längden ℓ_1 av den verkliga randen. Motsvarande gäller för längden ℓ_2.

En plan rand kan beskrivas med en sågtandformad rand enligt figur 8.1.3. Om den verkliga randen har ett ytmotstånd skall dettas värde korrigeras för varje linjesegment av den sågtandformade randen. Det korrigerade värdet skall väljas så att konduktansen per ytenhet verklig rand blir korrekt.

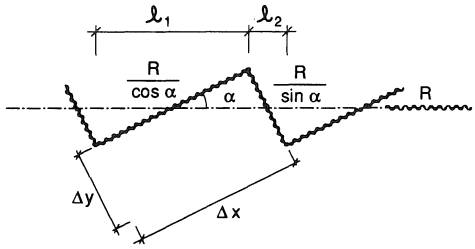
8.1.2 Inre rand mellan delområden

Under stationära förhållanden uppfyller temperaturfördelningen i ett plant område ekvation (3.2.13):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) = 0 \tag{8.1.8}$$

Ekvationen uttrycker att nettovärmeflödet till varje punkt är noll. Den gäller oavsett koordinatsystemets orientering i planet. I en diskret approximation motsvaras ekvationen av att nettovärmeflödet till en gittercell är noll. Detta skall gälla oavsett gitterstrukturens orientering i planet.

Följande situation skall studeras. Två plana områden har en gemensam rätlinjig rand. Värmeledningsförmågan i de två områdena är λ_1 och λ_2. Längs randen har man ett tunt skikt med värmemotståndet R (K/(W/m^2)). Beräkningsområdet indelas i en rektangulär gitterstruktur med cellsidorna Δx och Δy. Vinkeln mellan cellstrukturen och randen är α. Se figur 8.1.4.



Figur 8.1.4. Rand mellan två delområden.

För att uppnå volymkonservation för de två delområdena anpassas cellstrukturen till den räta områdesranden så att berörda randcellers sidoytor delas på mitten. Den räta randen representeras av en sågtandformad rand. Värmemotståndet längs randen har de sträckvis konstanta värdena R_1 och R_2. Man har:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha \tag{8.1.9}$$

Enligt metoden att följa det termiska förloppet betraktas, vid beräkning av värmeflödet genom en cellrand, temperaturfördelningen som stationär mellan berörda temperaturpunkter.

Värmebalansen för en randcell i den betraktade situationen skall därför undersökas vid stationära förhållanden. På grund av superpositionsprincipen räcker det att studera förhållanden för två endimensionella fall i vilka värmeflödet är parallellt respektive vinkelrätt mot randen. Om dessa fall är korrekta kan varje annan flödesriktning beskrivas genom en kombination av de betraktade fallen.

En randcells temperatur är T_0 enligt figur 8.1.4. Dess temperaturpunkt är via konduktanserna K_i kopplad till de fyra omgivande cellerna. Se figur 5.1.1. Nettoflödet Q (W) till randcellen ges av:

$$Q = K_1(T_1 - T_0) + K_2(T_2 - T_0) + K_3(T_3 - T_0) + K_4(T_4 - T_0) \tag{8.1.10}$$

Enligt ekvation (4.3.3) gäller:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{\Delta x}{\frac{\Delta y}{2\lambda_1} + R_1 + \frac{\Delta y}{2\lambda_2}} \\ K_2 &= \frac{\Delta y}{\frac{\Delta x}{2\lambda_1} + R_2 + \frac{\Delta x}{2\lambda_2}} \\ K_3 &= \frac{\lambda_1}{\Delta y}\Delta x \\ K_4 &= \frac{\lambda_1}{\Delta x}\Delta y \end{aligned} \tag{8.1.11}$$

Fall 1. Värmeflöde vinkelrätt mot randen

En z-axel i rät vinkel mot områdesranden har sitt origo i randen. Axeln är riktad från område 2 in i område 1. Värmeflödet i z-riktningen är q_z (W/m^2).

Den endimensionella temperaturfördelningen i z-led definieras av:

Område 1.

$$\begin{aligned} T(+0) &= 0 \\ T(z) &= -\frac{q_z}{\lambda_1} z \qquad z > 0 \end{aligned} \tag{8.1.12}$$

Område 2.

$$T(-0) = Rq_z$$
$$T(z) = -\frac{q_z}{\lambda_2}z + Rq_z \qquad z < 0 \tag{8.1.13}$$

Man erhåller:

$$T_1 - T_0 = -\frac{q_z}{\lambda_2}\left(-\frac{\Delta y \cos\alpha}{2}\right) + Rq_z + \frac{q_z}{\lambda_1} \cdot \frac{\Delta y \cos\alpha}{2}$$

$$T_2 - T_0 = T_1 - T_0$$

$$T_3 - T_0 = -\frac{q_z}{\lambda_1}\Delta y \cos\alpha$$

$$T_4 - T_0 = T_3 - T_0$$

Insättning i (8.1.10) ger:

$$Q = \frac{\Delta x q_z \left(\frac{\Delta y \cos\alpha}{2\lambda_2} + R + \frac{\Delta y \cos\alpha}{2\lambda_1}\right)}{\frac{\Delta y}{2\lambda_1} + R_1 + \frac{\Delta y}{2\lambda_2}} + \frac{\Delta y q_z \left(\frac{\Delta y \cos\alpha}{2\lambda_2} + R + \frac{\Delta y \cos\alpha}{2\lambda_1}\right)}{\frac{\Delta x}{2\lambda_1} + R_2 + \frac{\Delta x}{2\lambda_2}} + \lambda_1 \frac{\Delta x}{\Delta y}\left(-\frac{q_z}{\lambda_1}\right)\Delta y \cos\alpha + \lambda_1\left(-\frac{q_z}{\lambda_1}\right)\Delta y \cos\alpha \tag{8.1.14}$$

I analogi med (8.1.5-6) ansätts:

$$R_1 = \frac{R}{\cos\alpha}$$
$$R_2 = \frac{R}{\sin\alpha} \tag{8.1.15}$$

Med hjälp av (8.1.9), $\Delta y \cos\alpha = \Delta x \sin\alpha$, blir summan av term ett och tre liksom av term två och fyra i ekvation (8.1.14) noll. Nettovärmeflödet till den betraktade cellen är noll vid endimensionellt, stationärt värmeflöde vinkelrätt mot områdesranden.

Fall 2. Värmeflöde parallellt med randen

Motsvarande värmebalans skall uppställas för ett fall med en lineär temperaturfördelning parallellt med områdesranden. Den tidigare definierade z-axeln vrids 90° i positiv riktning. Dess origo definieras i höjd med temperaturpunkten T_4. Se figur 8.1.4. Temperaturen i område 1 och 2 ges av:

$$T(z) = az \tag{8.1.16}$$

Konstanten a har valfritt värde. Man erhåller:

$$
\begin{aligned}
T_1 - T_0 &= -a\Delta y \sin\alpha \\
T_2 - T_0 &= a\Delta x \cos\alpha \\
T_3 - T_0 &= a\Delta y \sin\alpha \\
T_4 - T_0 &= -a\Delta x \cos\alpha
\end{aligned}
\tag{8.1.17}
$$

Insättning i (8.1.10) ger:

$$
\begin{aligned}
Q = {} & \frac{\Delta x(-a\Delta y \sin\alpha)}{\frac{\Delta y}{2\lambda_1} + R_1 + \frac{\Delta y}{2\lambda_2}} + \frac{\Delta y\, a\Delta x \cos\alpha}{\frac{\Delta x}{2\lambda_1} + R_2 + \frac{\Delta x}{2\lambda_2}} + \\
& \lambda_1 \frac{\Delta x}{\Delta y} a\Delta y \sin\alpha + \lambda_1 \frac{\Delta y}{\Delta x}(-a\Delta x \cos\alpha)
\end{aligned}
\tag{8.1.18}
$$

Med hjälp av (8.1.9) och insättning enligt (8.1.15) erhålls:

$$
\begin{aligned}
Q = {} & \frac{-a\Delta x\Delta y \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\frac{\Delta y \cos\alpha}{2\lambda_1} + R + \frac{\Delta y \cos\alpha}{2\lambda_2}} + \\
& \frac{a\Delta x\Delta y \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\frac{\Delta x \sin\alpha}{2\lambda_1} + R + \frac{\Delta x \sin\alpha}{2\lambda_2}} = 0
\end{aligned}
\tag{8.1.19}
$$

Nettovärmeflödet till cellen är noll vid endimensionellt stationärt värmeflöde parallellt med områdesranden.

Med korrigering av det värmeisolerande skiktets motståndsvärde enligt (8.1.15) uppfyller den diskreta approximationen värmeledningsekvationen för varje stationär temperaturfördelning vid områdesranden oavsett gitterstrukturens vinkel α mot områdesranden.

8.2 Val av koordinatsystem

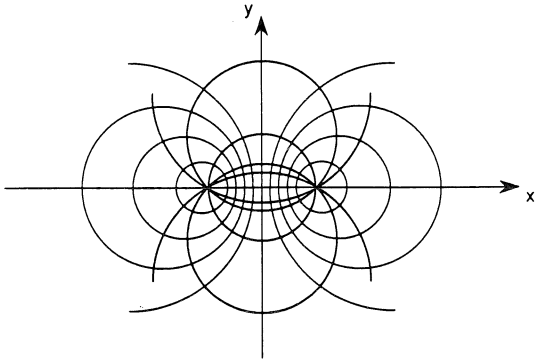
Beräkningsmetoden grundar sig på att ett betraktat problems geometri beskrivs med ett ortogonalt cellsystem där cellränderna definieras av att en koordinat har konstant värde.

8.2.1 Allmänna ortogonala koordinater

I avsnitt 3.4 uppställdes värmebalansekvationer för celler i ett allmänt ortogonalt ekvationssystem. Vid konstruktionen av en cellstruktur kan man välja den ortogonala cellstruktur som enklast beskriver det betraktade problemets beräkningsvolym. Det använda koordinatsystemet kan vara av Cartesisk, cylindersymmetrisk, sfärisk eller annan typ.

Syftet med valet av koordinatsystem kan vara att få en enkel geometrisk beskrivning av ett betraktat beräkningsområdes ränder. Antag till exempel att det termiska

förloppet mellan två rör i fast material skall beräknas. Låt problemet vara av sådan art att det kan betraktas som tvådimensionellt i ett plan vinkelrätt mot rören. Se figur 8.2.1.



Figur 8.2.1. Värmetransport mellan två parallella rör.

Figuren visar hur man med ett bipolärt koordinatsystem kan beskriva de två rörens cirkelformade ränder. För att kunna genomföra beräkningar måste konduktanser och värmekapaciteter bestämmas för den valda cellstrukturen.

8.2.2 Konform avbildning

Låt koordinaterna i ett allmänt 2-dimensionellt ortogonalt koordinatsystem ges av (u, v). Koordinaterna i ett Cartesiskt referenssystem är (x, y). Låt sambandet mellan de två systemen ges av följande en-entydiga avbildning:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \end{aligned} \tag{8.2.1}$$

Värmeledningsekvationen i det tvådimensionella (u, v)-systemet är i analogi med (3.4.13)

$$h_u h_v C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v}{h_u}\lambda\frac{\partial T}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_u}{h_v}\lambda\frac{\partial T}{\partial v}\right) \tag{8.2.2}$$

där:

$$h_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2}$$
$$h_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2} \tag{8.2.3}$$

Ett specialfall av avbildningar utgör den konforma avbildningen, vilken definieras med en analytisk funktion, dvs en funktion $f(z)$ som är deriverbar i den komplexa variabeln z [*Spiegel*]. Man har:

$$w = f(z) \qquad w = u + iv \qquad z = x + iy \qquad i^2 = -1 \tag{8.2.4}$$

Ekvationen beskriver en avbildning $w = f(z)$ mellan de komplexa talplanen z och w. För sådana avbildningar är vinkeln mellan två linjer i deras skärningspunkt oförändrad vid avbildningen. Vinkeln mellan sammanbindningslinjen mellan två cellers temperaturpunkter och cellranden mellan dem är således oförändrat rät. För en konform avbildning gäller:

$$h_u = h_v = h = \frac{1}{\left|\frac{dw}{dz}\right|} \tag{8.2.5}$$

Storheten h definieras av det inverterade beloppet av den avbildande funktionens derivata. Ekvationen (8.2.2) förenklas till:

$$h^2 C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial v}\right) \tag{8.2.6}$$

Ekvationen är identisk med den vanliga värmeledningsekvationen (3.2.9) så när som på faktorn h^2 framför värmekapaciteten C. Man kan således i (u, v)-planet arbeta med den vanliga värmeledningsekvationen om man ersätter den verkliga värmekapaciteten C med den fiktiva storheten h^2C, där storheten h varierar över beräkningsområdet enligt (8.2.3). Faktorn h^2 är en ytkorrigering på grund av transformationens ytförvrängning. Man har $h^2 du\, dv = dx\, dy$.

Med hjälp av konforma avbildningar kan man avbilda ett område med komplicerad geometri i (x, y)-planet till ett område med enkel geometri i (u, v)-planet. Problemet löses i (u, v)-planet och den funna temperaturfördelningen transformeras tillbaka till (x, y)-planet.

Den konforma avbildningen kan endast formuleras i det tvådimensionella fallet. Formuleringen kan emellertid utvidgas till tre dimensioner om den tredje dimensionen ej berörs av transformationen. Låt den tredje koordinaten betecknas med w respektive z i de två planen. Man har i analogi med (8.2.1):

$$x = x(u, v)$$
$$y = y(u, v) \tag{8.2.7}$$
$$z = w$$

Man har vidare:

$$h_u = h_v = h$$
$$h_w = 1 \tag{8.2.8}$$

Den allmänna värmeledningsekvationen i (u, v, w)-systemet ges enligt (3.4.13) av:

$$h^2 C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(h^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial w}\right) \tag{8.2.9}$$

I det tredimensionella fallet kommer ytkorrigeringsfaktorn h^2 in även i den term som beskriver det konduktiva värmeflödet vinkelrätt mot det transformerade (x, y)-planet.

Storheten h är i det betraktade fallet oberoende av koordinaten w varför den sista termen i (8.2.9) kan skrivas:

$$h^2 \frac{\partial}{\partial w}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial w}\right) \tag{8.2.10}$$

Denna typ av transformation kan användas vid till exempel beräkning av värmetransport i marken vid pumpning av vatten genom grundvattenförande skikt, vilket sker vid värmelagring i akviferer [*Hellström et al., 1986*]. Transformationen används för att omforma vattentransportens komplicerade flödesbild.

I [*Claesson, Bennet, 1987*] användes metoden för att beräkna värmemotståndet mellan två cirklar i kontakt med varandra och en omslutande större cirkel. De två inre cirklarna har samma temperatur. Geometrin ges av ett tvärsnitt genom en konstruktion av rör vilka transporterar en fluid. Problemställningen gäller värmeöverföringen mellan fluiden i de inre rören och det yttre rörets yta.

8.3 Triangulära celler

Ett beräkningsområde kan ha en sådan form att det ej kan beskrivas med en ortogonal cellstruktur. Detta problem kan vid t ex plan geometri lösas genom användning av triangulära celler. Områdets rand beskrivs approximativt med en lämplig följd av räta linjesegment. Med utgångspunkt från dessa linjesegment kan ett triangulärt cellsystem definieras i beräkningsområdet. Om cellerna genereras på lämpligt sätt kan samma beräkningsmetoder, som tidigare definierats för ortogonala cellstrukturer, tillämpas på det triangulära cellsystemet.

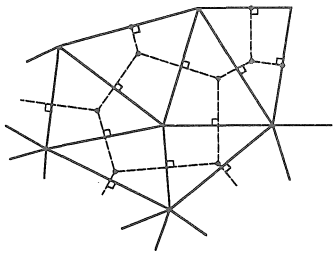
8.3.1 Triangulärt cellsystem

Basen för den beskrivna beräkningsmetoden är att sammanbindningslinjen mellan två angränsande cellers temperaturpunkter skär den gemensamma cellranden under rät vinkel. Det approximerat stationära temperaturfältet mellan punkterna utgörs då av ett plan vars lutning längs sammanbindningslinjen bestämmer värmeflödet genom randen. De båda temperaturerna representerar respektive cells värmeinnehåll.

Beräkningsmetoden kan användas även för triangulära cellsystem. I ett plant beräkningsområde med en oregelbunden rand beskrivs denna approximativt med ett

antal räta linjesegment. Området delas in i spetsvinkliga trianglar. I varje triangel definieras en temperaturpunkt i skärningen mellan triangelsidornas mittpunktsnormaler. På grund av den valda triangelformen kommer en triangels temperaturpunkt att vara belägen i triangelns inre. I vissa trianglar sammanfaller en eller flera sidor med randen till beräkningsområdet. Mitt på varje sådan triangelsida definieras en randtemperaturpunkt.

Varje triangels temperaturpunkt omges av tre temperaturpunkter. Förbindelselinjen mellan en triangels temperaturpunkt och de tre omgivande temperaturpunkterna skär triangelns sidor under rät vinkel. Sidorna delas på mitten. För varje sådan förbindelselinje definieras ett värmemotstånd på samma sätt som för de ortogonala cellstrukturerna. Se figur 8.3.1.



Figur 8.3.1. Termisk koppling mellan triangulära celler.

I [*MacNeal, 1953*] visas att det på detta vis definierade nätverket av värmemotstånd och temperaturpunkter kan användas för att lösa potentialproblem i området. Nätverket kan således användas för att lösa följande stationära värmeledningsproblem:

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) = 0 \tag{8.3.1}$$

Nätverket kan speciellt användas för att uttrycka stationära värmeflöden lokalt inom beräk- ningsområdet, till exempel mellan två temperaturpunkter. Triangelsystemet kan därmed även användas vid simulering av tidsberoende förlopp.

Vid beräkning av värmeflödet genom en cellrand används samma metod som i fallet med ortogonal cellstruktur. Se avsnitt 4.3. Vid beräkning av värmeflödet genom en cellrand betraktas temperaturfältet mellan de två omgivande temperaturpunkterna approximativt som stationärt.

Värmeflödet Q_{ij} (W) från triangel i till triangel j ges av:

$$Q_{ij} = K_{ij}(T_i - T_j) \tag{8.3.2}$$

Konduktansen K_{ij} (W/K) mellan två sammankopplade temperaturpunkter beräknas på samma sätt som vid plan geometri med Cartesiska koordinater.

Cellens värmeinnehåll definieras av temperaturen T_0 i mittpunktsnormalernas skärningspunkt. Låt det linjära temperaturfältet i en cell ges av (avsnitt 4.4):

$$T = T_0 + ax + by \tag{8.3.3}$$

Koordinatsystemets origo sammanfaller med cellens temperaturpunkt. Triangelns area är A. T_0 skall utgöra cellens medeltemperatur. Följande integral över triangelns yta ger ett uttryck för dess medeltemperatur:

$$T_0 = \frac{1}{A}\iint_S (T_0 + ax + by)\, dS = T_0 + \frac{1}{A}\iint_S (ax + by) dS \tag{8.3.4}$$

Den sista termens värde skall vara noll. Detta uppfylls oavsett värdet på a och b, det vill säga oavsett planets lutning, endast om koordinatsystemets origo sammanfaller med triangelns tyngdpunkt vilket sker om triangeln är liksidig. I en sådan triangel representeras temperaturfältet av ett plan med godtycklig lutning. Situationen är likartad den som erhålls med ortogonala celler.

För en allmän spetsvinklig triangel medför kravet att T_0 skall representera cellens medeltemperatur följande villkor enligt (8.3.4):

$$a = b = 0 \tag{8.3.5}$$

För en godtycklig spetsvinklig triangel utgörs den approximativt beskrivna temperaturfördelningen ett plan med lutningen noll.

Vid beräkning av det momentana värmeflödet genom en cellrand bestäms detta av de två temperaturerna på ömse sidor om randen. Dessa definierar en lutning på temperaturplanet. I en ortogonal cell påverkar denna lutning ej värmeflödet genom de randdelar som gränsar till den betraktade randdelen. Så sker emellertid i en triangulär cellstruktur.

Resonemanget markerar att den triangulära cellstrukturen inte till fullo utnyttjar den ortogonala karaktären i Fouriers lag:

$$\bar{q} = -\lambda \nabla T = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \right) \tag{8.3.6}$$

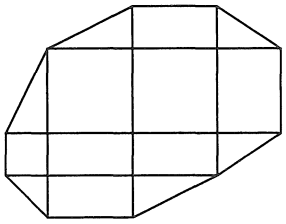
Formuleringen av Fouriers lag innebär att värmeflödet i två vinkelräta riktningar är helt oberoende av varandra. Den triangulära cellstrukturen medför större begränsningar vid den approximativa beskrivningen av det kontinuerliga temperaturfältet än vad som erhålls med en ortogonal cellstruktur.

8.3.2 Rektangulära och triangulära celler

Ett oregelbundet plant beräkningsområde kan enligt avsnitt 8.3.1 delas in i en triangulär cellstruktur. Detta förfarande medför emellertid några olika delproblem:

1. En lämplig spetsvinklig triangelstruktur skall genereras.
2. Triangelstrukturen är geometriskt oöverskådlig. Det finns ingen naturlig numreringsordning för cellerna. Det krävs extra organisation att bestämma vilka celler som är grannar.
3. Triangelstrukturen ger enligt avsnitt 8.3.1 en något sämre beskrivning av temperaturfältet än vad som erhålls med ett ortogonalt cellsystem, vilket kan förmodas ge en något försämrad beräkningsprecision.

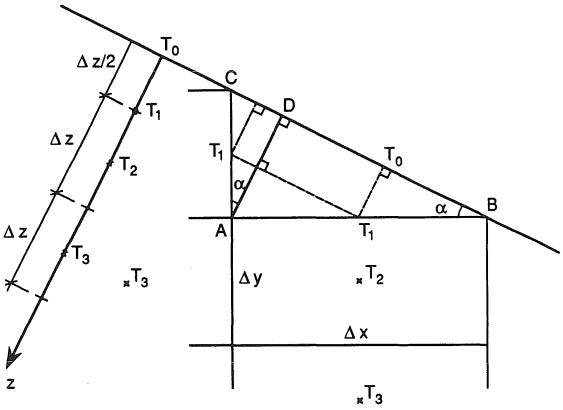
Det är därför attraktivt att även i ett oregelbundet område använda en ortogonal cellstruktur. Ränderna erhåller då en sågtandsstruktur av den typ som visas i avsnitt 8.1. Värdet på värmemotstånd längs den verkliga randen måste korrigeras på det visade sättet. En slätare rand kan åstadkommas med en blandad cellstruktur enligt figur 8.3.2.



Figur 8.3.2. Blandad cellstruktur i ett oregelbundet område.

Genom lämpligt val av cellstorlekar kan den räta randen anpassas till beräkningsområdet. Cellstrukturen i områdets inre utnyttjar värmeledningsekvationens enkla ortogonala karaktär. Den mer komplicerade beskrivningen används endast för att släta ut den oregelbundna randen.

Figur 8.3.3 visar en del av ett gittersystem vid en sned rand. En triangulär cell slätar ut randen mellan två rektangelceller.Vinkeln mellan det ortogonala systemets ena axelriktning och randen är α.



Figur 8.3.3. Triangulär cell vid sned rand.

Det skall visas att en blandad cellstruktur enligt ovan och en vanlig endimensionell struktur ger samma beräkningsresultat vid beräkning av värmetransport i randens normalriktning.

Den använda rektangeln ABC är rätvinklig, varför dess temperaturpunkt ligger mitt på hypotenusan BC. Därmed sammanfaller den med områdesranden och dess värde föreskrivs av randtemperaturen T_0. Energiinnehållet i triangeln ABC kan därmed inte beskrivas av dess temperaturpunkt.

Problemet kan lösas genom att triangeln ABC delas i de två rätvinkliga trianglarna ABD och ADC. För dessa trianglar ligger temperaturpunkterna på ränderna AC och AB i det ortogonala cellsystemet. Dessa punkter är ej låsta till någon föreskriven temperatur. De kan därmed representera energiinnehållet i respektive triangelcell även om de är placerade på triangelns rand.

En endimensionell cellstruktur läggs in vinkelrätt mot randen BC. Den första cellens storlek är $\Delta z/2$. Övriga celler har storleken Δz. Cellstorleken är vald så att randen mellan första och andra cellen skär de två hypotenusorna AB och AC på mitten. Den första cellens temperaturpunkt placeras på randen mot nästa cell. Övriga endimensionella cellers temperaturpunkter placeras i respektive cells mittpunkt. Den endimensionella strukturen har då temperaturpunkter som till sina avstånd från randen överensstämmer med den blandade strukturens temperaturpunkter.

I ett givet ögonblick är temperaturen i den endimensionella gitterstrukturen T_1, $T_2, T_3 \ldots$. Uttrycken för temperaturen i de yttersta lagren av celler efter tiden Δt skall ställas upp för de två cellstrukturerna.

För den *endimensionella* strukturen erhålls för de nya temperaturerna $T_{1,ny}$ och $T_{2,ny}$:

$$T_{1,ny} = \left(1 - \frac{2\lambda}{\Delta z}\frac{2\Delta t}{C\Delta z} - \frac{2\lambda}{\Delta z}\frac{2\Delta t}{C\Delta z}\right)T_1 + \frac{2\lambda}{\Delta z}\frac{2\Delta t}{C\Delta z}T_0 + \frac{2\lambda}{\Delta z}\frac{2\Delta t}{C\Delta z}T_2 \quad (8.3.7)$$

$$T_{2,ny} = \left(1 - \frac{2\lambda}{\Delta z}\frac{\Delta t}{C\Delta z} - \frac{\lambda}{\Delta z}\frac{\Delta t}{C\Delta z}\right)T_2 + \frac{2\lambda}{\Delta z}\frac{\Delta t}{C\Delta z}T_1 + \frac{\lambda}{\Delta z}\frac{\Delta t}{C\Delta z}T_3 \quad (8.3.8)$$

I *blandstrukturen* erhålls för triangel ABD:

$$T_{1,ny} = \left(1 - \frac{2\lambda}{\Delta z}\Delta x\cos\alpha\frac{2\Delta t}{C\Delta z\Delta x\cos\alpha} - \frac{2\lambda}{\Delta y}\Delta x\frac{2\Delta t}{C\Delta z\Delta x\cos\alpha}\right)T_1 +$$

$$\frac{2\lambda}{\Delta z}\Delta x\cos\alpha\frac{2\Delta t}{C\Delta z\Delta x\cos\alpha}T_0 + \frac{2\lambda}{\Delta y}\Delta x\frac{2\Delta t}{C\Delta z\Delta x\cos\alpha}T_2 \quad (8.3.9)$$

För triangel ADC erhålls:

$$T_{1,ny} = \left(1 - \frac{2\lambda}{\Delta z}\Delta y\sin\alpha\frac{2\Delta t}{C\Delta y\sin\alpha\Delta z} - \frac{2\lambda}{\Delta x}\Delta y\frac{2\Delta t}{C\Delta y\sin\alpha\Delta z}\right)T_1 +$$

$$\frac{2\lambda}{\Delta z}\Delta y\sin\alpha\frac{2\Delta t}{C\Delta y\sin\alpha\Delta z}T_0 + \frac{2\lambda}{\Delta x}\Delta y\frac{2\Delta t}{C\Delta y\sin\alpha\Delta z}T_2 \quad (8.3.10)$$

Vid uppställningen av (8.3.9-10) har värmeflödet genom randen AD ej tagits med eftersom temperaturen på båda sidor om randen enligt förutsättningen är lika. För den

yttersta ortogonala cellen erhålls:

$$T_{2,ny} = \left(1 - \frac{2\lambda}{\Delta y}\Delta x\frac{\Delta t}{C\Delta x\Delta y} - \frac{\lambda}{\Delta y}\Delta x\frac{\Delta t}{C\Delta x\Delta y} - \right. \tag{8.3.11}$$

$$\left. \frac{2\lambda}{\Delta x}\Delta y\frac{\Delta t}{C\Delta x\Delta y} - \frac{\lambda}{\Delta x}\Delta y\frac{\Delta t}{C\Delta x\Delta y}\right) T_2 +$$

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\frac{1}{\Delta x\Delta y}\frac{\lambda\Delta t}{C}T_1 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\frac{1}{\Delta x\Delta y}\frac{\lambda\Delta t}{C}T_3$$

Sambandet mellan cellstrukturerna ges av:

$$\Delta y = \frac{\Delta z}{\cos\alpha}, \qquad \Delta x = \frac{\Delta z}{\sin\alpha} \tag{8.3.12}$$

Det framgår att uttrycken för $T_{1,ny}$, (8.3.7), (8.3.9) och (8.3.10) är identiska liksom uttrycken (8.3.8) och (8.3.11) för $T_{2,ny}$. Den blandade strukturen ger samma beräkningsresultat som den endimensionella strukturen.

I avsnitt 6.2 undersöks noggrannheten vid beräkning av temperaturer i ett halvoändligt plant fall när ett temperatursprång inträffar vid randen. Ett expansivt gitter föreslås i (6.2.12). Tabell 6.2.1 ger avvikelsen mellan numerisk och exakt lösning.

I den ovan använda endimensionella cellstrukturen har temperaturpunkten i den yttersta cellen flyttats från cellens mittpunkt till dess rand mot nästa cell. Flyttningen av temperaturpunkten inom cellen medför att konduktanserna $K_{1/2}$ och $K_{1\,1/2}$ från den yttersta cellens temperaturpunkt ges annorlunda värden. Flyttningen medför vidare att temperaturfördelningen över randcellen representeras av ett konstant värde till skillnad från övriga celler där fördelningen kan vara en linjär funktion med godtycklig lutning. Se avsnitt 4.4. Cellstrukturen för det betraktade fallet är 0.5, 0.5, 1, 2, 4, 8 och 16 m.

x (m)	0.50	0.75	1.5	3.0	6.0	12.0	24.0		
T (°C)									
an	0.724	0.596	0.289	0.034	0.0	0.0	0.0	$t = 1 \cdot 10^6$	(s)
num-an	-0.015	-0.015	-0.020	-0.003	0.0	0.0	0.0		
an	0.860	0.791	0.596	0.289	0.034	0.0	0.0	$t = 4 \cdot 10^6$	(s)
num-an	0.000	0.001	0.002	-0.010	0.001	0.0	0.0		
an	0.930	0.895	0.791	0.596	0.289	0.034	0.0	$t = 16 \cdot 10^6$	(s)
num-an	0.001	0.002	0.004	0.006	-0.006	0.002	0.0		

Tabell 8.3.1. Beräkningsnoggrannhet vid expansivt gitter.

I tabell 8.3.1 jämförs analytiska och numeriskt beräknade värden som erhålls när den yttersta cellens temperaturpunkt är flyttad till cellens inre rand. En jämförelse av värdena för ($t = 1 \cdot 10^6$) med tabell 7.2.1 ($t = 4 \cdot 10^6$) visar att förflyttningen av temperaturpunkten i den yttersta cellen medför en ökning av det absoluta beräkningsfelet vid den första, känsligaste utskriftstidpunkten från 0.015 till 0.020. Se avsnitt 6.2.2. Vid de två senare tidpunkterna är felen mindre än 0.01.

Kapitel 9

RUMSLIGT VARIERANDE TERMISKA EGENSKAPER. GITTER

I kapitel 4 visas hur den beskrivna lösningsmetoden kan användas i en gitterstruktur där de termiska egenskaperna varierar från cell till cell. Mellan cellerna kan det finnas ett skikt med givet värmemotstånd. Skiktets tjocklek förutsätts vara försumbart. Dess värmekapacitet är noll.

I kapitel 6 visas hur en lämplig gitterindelning, anpassad efter ett aktuellt problems tidsskala, kan väljas vid homogena termiska egenskaper. Grunden för den använda lösningsmetoden är att den lokala temperaturfördelningen mellan två närliggande temperaturpunkter i gittret approximativt beskrivs som en stationär fördelning. Gitterstrukturen dimensioneras i förhållande till problemets tidsskala. Se formel (6.2.12) och (6.3.2).

I kapitlet redovisas hur detta betraktelsesätt kan användas vid val av gitterstruktur när de termiska egenskaperna ej är konstanta inom beräkningsområdet. Inför det slutliga valet av cellstruktur skall det påpekas att till exempel formel (6.2.12) endast ger en rekommendation om cellstorlekar för att en viss beräkningsprecision skall uppnås. Smärre förändringar av cellstorlekarna ger inga radikala förändringar av beräkningsprecisionen. Man kan därmed ofta välja dem så att önskad passning mellan cellstruktur och områden med olika termiska egenskaper erhålls.

9.1 Endimensionellt halvoändligt område

I avsnitt 6.2 visas hur man, i ett område med homogena termiska egenskaper, med hjälp av problemets tidsskala kan definiera en expansiv cellstruktur enligt (6.2.12). Tidsskalan definieras av att man är intresserad av beräkningsresultat i tidsintervallet $t_1 \leq t \leq t_s$ (s). De två första cellernas storlek är:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = k\sqrt{\frac{\lambda_1}{C_1}t_1} = k\sqrt{a_1 t_1} \qquad 0 < k \leq 1 \tag{9.1.1}$$

För varje cell som utökar cellstrukturen dubblas storleken. För beräkningsområdets inre rand x_r gäller $x_r \geq 3\sqrt{a_1 t_s}$.

En väsentlig egenskap hos den definierade gitterstrukturen är att den är anpassad till det betraktade problemets tidsskala (se avsnitt 6.2.1). Stabilitetstidsstegen för den

i (9.1.1) givna cellstrukturen kan beräknas enligt (5.2.1). Man erhåller:

$$\begin{aligned} &\text{cell 1: } \tfrac{1}{3}k^2t_1 \\ &\text{cell 2: } \tfrac{3}{5}k^2t_1 \\ &\text{cell i: } 2^{2i-5}k^2t_1 \qquad i \geq 3 \end{aligned} \tag{9.1.2}$$

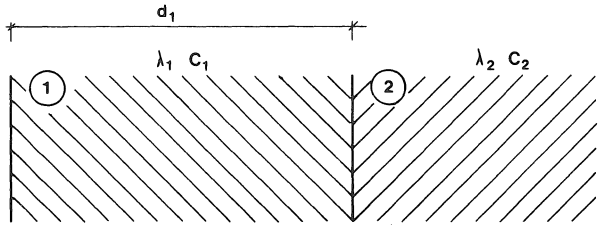
Dessa stabilitetstidssteg är mått på de tidsskonstanter som cellerna skall ha för att gitterstrukturen skall ge den i kapitel 6 redovisade precisionen.

Vid en periodisk randtemperatur med periodlängden t_p definierar formel (6.3.2) en cellstruktur. Tidskonstanterna för cellerna i denna gitterstruktur ges av deras respektive stabilitetstidssteg. Dessa är:

$$\begin{aligned} &\text{cell 1: } \tfrac{1}{3\pi}k^2t_p \\ &\text{cell 2: } \tfrac{3}{5\pi}k^2t_p \\ &\text{cell i: } \frac{2^{2i-5}}{\pi}k^2t_p \qquad i \geq 3 \end{aligned} \tag{9.1.3}$$

När beräkningsområdet omfattar flera delområden med olika termiska egenskaper kan den erforderliga cellstrukturen konstrueras cell för cell från randen och in i materialet. Cellernas stabilitetstidssteg skall överensstämma med de av (9.1.2-3) givna uttrycken.

I vissa situationer kan man genom lämpliga approximationer åstadkomma förenklade beskrivningar vilket belyses av följande enkla exempel. Temperaturfördelningen skall beräknas för ett halvoändligt område. De termiska egenskaperna varierar enligt figur 9.1.1.



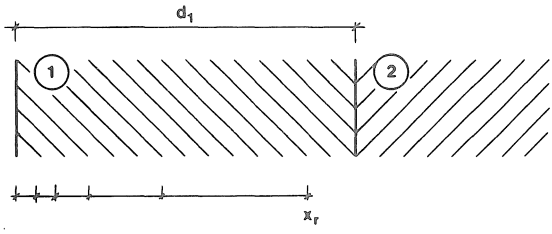
Figur 9.1.1. Varierande termiska egenskaper i ett halvoändligt område.

Värmeledningsförmågan och värmekapaciteten har värdet λ_2 respektive C_2 utom i området $x < d_1$ där de är λ_1 respektive C_1. Vid tidpunkten $t = 0$ inträffar ett temperatursteg vid randen. Den första tidpunkt vid vilken man vill få ett beräkningsresultat är t_1. Beräkningen skall föras fram till sluttidpunkten t_s.

Beroende på tidpunkten t_1 kan randen mellan område 1 och 2 komma på olika ställen i cellstrukturen. Några olika situationer och några därmed sammanhängande förenklingsmöjligheter skall beskrivas.

Fall 1. $x_r = 3\sqrt{a_1 t_s} \leq d_1$

Hela beräkningsområdet ligger i område 1. Se figur 9.1.2. Förutsättningarna om homogena termiska egenskaper enligt (6.2.12) är uppfyllda.



Figur 9.1.2. Cellstruktur om $x_r = 3\sqrt{a_1 t_s} \leq d_1$.

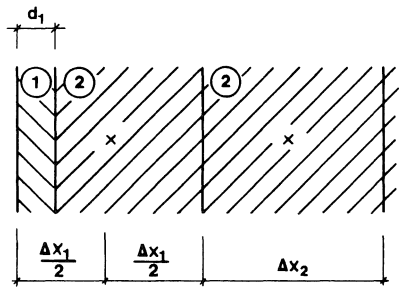
Fall 2. $3\sqrt{a_1 t_s} > d_1$

Cellstrukturen sträcker sig igenom hela område 1 och in i område 2. Strukturens celler skall konstrueras så att deras respektive stabilitetstidssteg stämmer överens med de ovan angivna värdena. Smärre avvikelser saknar betydelse. Beräkningen av cellernas stabilitetstidssteg sker enligt formel (5.2.1).

En cell som berörs av områdesranden kräver speciell behandling. En av dess konduktanser består av två seriekopplade skikt, vilket medför en beräkning av den resulterande konduktansen enligt avsnitt 2.3.1. Om områdesranden passerar genom cell i på avståndet x från cellranden blir dess värmekapacitet, om sträckan x ligger i område 1, $xC_1 + (\Delta x_i - x)C_2$ (J/m^{2}K).

Fall 3. $\sqrt{a_1 t_1} > d_1$ och $\frac{\Delta x_1}{2} > d_1$

I detta fall ligger randen mellan område 1 och 2 mellan den första cellens mittpunkt och den yttre områdesranden. Se figur 9.1.3.



Figur 9.1.3. Områdesrand i den första cellen.

Man har i analogi med (4.3.4) för den första cellens konduktanser $K_{1/2}$ och $K_{1\ 1/2}$ (W/K) med randytan A (m^2):

$$K_{1/2} = \frac{A}{\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{\frac{\Delta x_1}{2} - d_1}{\lambda_2}} \tag{9.1.4}$$

$$K_{1\ 1/2} = \frac{\lambda_2}{\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{2}} A \tag{9.1.5}$$

Den första cellens värmekapacitet (J/K) är:

$$C_{cell\ 1} = A\,(d_1 C_1 + (\Delta x_1 - d_1) C_2) = \tag{9.1.6}$$

$$A\,(\Delta x_1 C_2 - d_1 (C_2 - C_1))$$

Om $C_1 << C_2$ har man approximativt:

$$C_{cell\ 1} \approx A(\Delta x_1 - d_1) C_2 \tag{9.1.7}$$

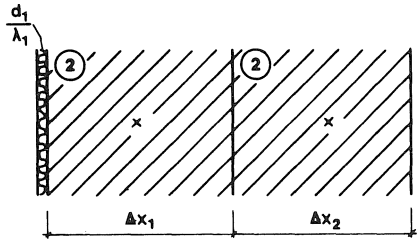
Fall 4. $\Delta x_1/2 >> d_1$

Område 1 utgör, i förhållande till cell 1, ett tunt skikt närmast den yttre randen. Uttrycken (9.1.4) och (9.1.7), där $C_1 << C_2$, kan approximativt skrivas:

$$K_{1/2} \approx \frac{A}{\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{\Delta x_1}{2\lambda_2}} \tag{9.1.8}$$

$$C_{cell\,1} \approx A\Delta x_1 C_2 \tag{9.1.9}$$

Denna formulering av uttrycken för den första cellen motsvaras av cellstrukturen i figur 9.1.4. Område 1 betraktas som ett isolerande skikt med försumbar tjocklek, varför skiktets värmekapacitet är noll. Skiktets värmemotstånd är d_1/λ_1.



Figur 9.1.4. Ett materialskikt representeras av ett värmemotstånd.

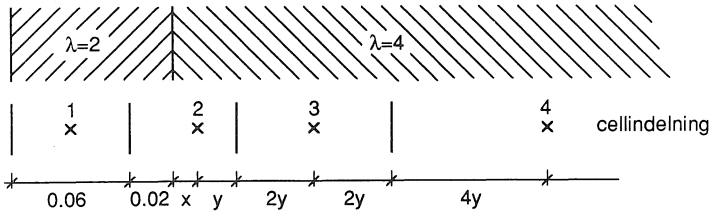
Den försummade värmekapaciteten i område 1 innebär att temperaturfördelningen inne i område 1 i varje ögonblick ges en stationär beskrivning. I den använda lösningsmetoden betraktas den lokala temperaturfördelningen mellan angränsande temperaturpunkter som approximativt stationär under ett tidssteg. Den gjorda förenklingen att, *i den betraktade tidsskalan*, försumma värmekapaciteten i område 1 ligger således i linje med lösningsmetodens principer.

Följande exempel får illustrera val av gitter för en situation enligt fall 2 ovan.

Exempel på gitterval enligt fall 2.

Området är halvoändligt. På större avstånd än 0.08 m från randen är värmeledningsförmågan $\lambda = 4$ W/mK. Med $t_1 = t_s = 100$ s erhålls $\Delta x_1 = \sqrt{at_1} = 0.01$ m. De tre nödvändiga gittercellernas storlekar är 0.01, 0.01 och 0.02 m. Cellerna ligger i ett område med homogena termiska egenskaper och problemet med varierande termiska egenskaper uppstår inte.

Om $t_1 = 3600$ erhålls $\Delta x_1 = \sqrt{at_1} = 0.06$ m. Cell nummer 2 kommer att beröra områden med olika termiska egenskaper. Avsnitt 9.1 anger hur den första intressanta tidpunkten t_1 bestämmer den tidsskala (det stabilitetstidssteg) de olika cellerna skall ha.



Figur 9.1.5. Gitterindelning.

Låt avståndet mellan områdesranden och den andra cellens mittpunkt vara x (m). Avståndet från cellens temperaturpunkt till cellranden mot cell 3 är y (m). Se figur 12.2.1. Den tredje cellens storlek sätts till 4y och den fjärde cellen blir 8y. Cellerna 3 och 4 följer formel (6.2.12) om dubblad cellstorlek. Detta gäller även den halva av cell 2 som gränsar mot cell 3 och som har samma termiska egenskaper som cellerna 3 och 4.

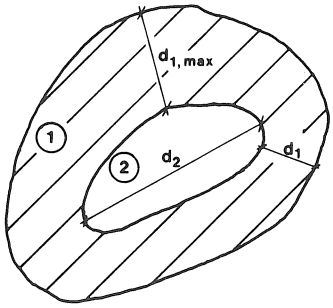
Formel (9.1.2) anger att stabilitetstidssteget för cell 3 ($i = 3$ och $k = 1$) skall vara $2t_1 = 7200$ s. För cell 3 erhålls $K_{2\,1/2} = 4/3y$, $K_{3\,1/2} = 4/6y$ W/m^{2}K och $C_3 = 8y \cdot 10^6$ J/m^{2}K. Man erhåller $\Delta t_{stab} = 4y^2 \cdot 10^6$ s och $y = 0.0424$ m.

För cell 2 erhålls $K_{1\,1/2} = 4/(x + 0.1)$, $K_{2\,1/2} = 4/3y$ W/m^{2}K och $C_2 = 2(x + y + 0.02) \cdot 10^6$ J/m^{2}K. Man erhåller med hjälp av (9.1.2) $x = 0.0105$ m.

Med den valda beskrivningen av cell 2 ligger dess temperaturpunkt inte i cellens geometriska mittpunkt. Detta har ingen avgörande betydelse för beräkningsnoggrannheten. Se till exempel tabell 8.3.1 som belyser hur felet påverkas av att temperaturpunkten i den första cellen flyttas från cellens mittpunkt till randen mot nästa cell.

9.2 Flerdimensionellt område

Den i avsnitt 9.1 redovisade principen för gitterval kan tillämpas på flerdimensionella områden. Betrakta ett tvådimensionellt område enligt figur 9.2.1.



Figur 9.2.1. Tvådimensionellt område med olika termiska egenskaper.

I figuren visas ett grundläggande fall med två områden med olika termiska egenskaper. För varje punkt mellan randen mellan de två områdena kan man bestämma det kortaste avståndet till den yttre randen. Låt d_1 och $d_{1,max}$ vara det minsta respektive största av dessa värden som erhålls för någon punkt längs randen. Låt d_2 betyda det största måttet för område 2.

Vid tidpunkten $t = 0$ inträffar ett temperatursprång vid den yttre randen. I analogi med de tidigare fallen i avsnitt 9.1 är tidpunkterna t_1 och t_s avgörande för gitterstrukturen. Följande uppspaltning i olika fall visar översiktligt hur ett problems tidsskala påverkar förenklingsmöjligheterna.

Fall A. $3\sqrt{a_1 t_s} < d_1$

Område 2 är vid tidpunkten t_1 endast försumbart påverkat av temperaturtidssteget vid den yttre randen. Beräkningen behöver endast omfatta lämplig del av område 1. Eventuellt kan problemet behandlas som endimensionellt i normalriktningen mot den yttre randen.

Fall B. $3\sqrt{a_1 t_s} > d_1$

I samtliga delfall B påverkas både område 1 och 2 av den ändrade randtemperaturen.

Fall B.1. $\sqrt{a_1 t_1} >> d_{1,max}$ och $\sqrt{a_2 t_1} >> d_2$

Det betraktade områdets tidsskala är så liten i förhållande till tidslängden t_1 att temperaturfördelningen approximativt har nått sitt stationära slutvärde i hela området redan vid den första intressanta tidpunkten.

Fall B.2. $\sqrt{a_1 t_1} >> d_{1,max}$

I detta fall har område 1 så liten tidsskala jämfört med den intressanta tidslängden t_1 att området kan behandlas som ett tunt skikt med försumbar

värmekapacitet. Jämför med fall 4 i avsnitt 9.1.

Fall B.3. $\sqrt{a_2 t_1} >> d_2$

I detta fall har område 2 så liten tidsskala att, för varje tidssteg i det dynamiska förloppet i område 1, temperaturen i område 2 approximativt beskrivs av en stationär temperaturfördelning. Denna fördelning bestäms vid varje diskret tidpunkt av den aktuella temperaturen i område 1's rand mot område 2.

Fall B.4. Övriga fall

Problemets tidsskala är sådan att temperaturfördelningen måste behandlas som tidsberoende i både område 1 och 2. Inga lättillgängliga förenklingar kan göras i den storskaliga delen av problemet.

Kapitel 10

INFORMATIVA ANALYTISKA LÖSNINGAR

Ett värmeledningsproblem kan vara komplicerat till exempel på grund av besvärlig geometri och/eller tidsberoende randvillkor, vilka omfattar ett brett spektrum av frekvenser. Superponeringsprincipen innebär, under vissa förutsättningar, att ett termiskt förlopp kan ses som summan av enkla delförlopp eller grundfall.

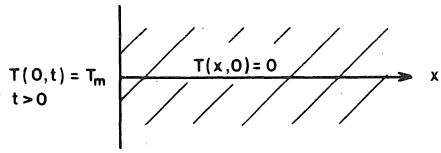
Man kan definiera ett antal karakteristiska grundfall, vilka innehåller avgörande information vid analys av komplicerade situationer. Väsentliga egenskaper är räckvidd (hur långt den termiska influensen från en rand når) och tidsskala (till exempel hur lång tid temperaturutjämning tar för ett delområde).

Man kan på detta sätt klargöra vilka delar av den totala processen som har betydelse i de områden och vid de tidpunkter man är intresserad av. Resultatet kan bli en förenkling såväl av beräkningsområdets geometri som av de randvillkor man behöver studera effekten av.

10.1 Inträngningsdjup i en randytas normalriktning

10.1.1 Temperatursteg

I en plan halvoändlig rymd, $x \geq 0$, är temperaturen $T(x,t)$. Begynnelsetemperaturen är $T(x,0) = 0$. Vid tider $t > 0$ är yttemperaturen $T(0,t) = T_m$. Se figur 10.1.1.



Figur 10.1.1. Temperatursteg. Plan geometri.

Problemet definieras i skalad form på följande sätt.

Begynnelsevillkor:

$$T'(x,0) = 0 \quad x \geq 0 \tag{10.1.1}$$

Randvillkor:

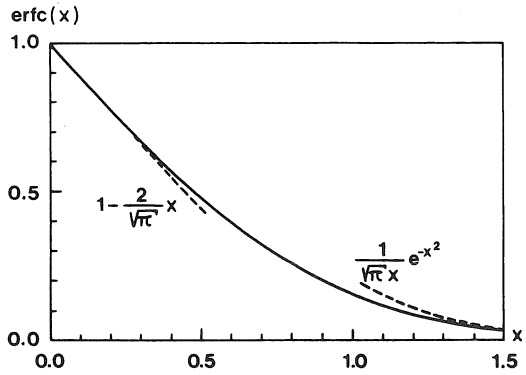
$$T'(0,t) = 1 \quad t > 0 \tag{10.1.2}$$

Lösningen ges av [*Carslaw, Jaeger, 2.4*]:

$$T'(x,t) = \frac{T(x,t)}{T_m} = \mathrm{erfc}(x') = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4at}}} e^{-\xi^2} d\xi \tag{10.1.3}$$

$$x' = x/\sqrt{4at}$$

Lösningen ges av erfc(x'), den komplementära felfunktionen, med argumentet $x' = x/\sqrt{4at}$. I argumentet är längdkoordinaten x skalad med den tidsberoende längden $\sqrt{4at}$. Temperaturkurvan har i viss mening samma form vid alla tidpunkter (figur 10.1.2).



Figur 10.1.2. Funktionen erfc(x).

Enkla uttryck för temperaturfrontens läge i materialet kan ges på följande sätt. Låt $x_{0.5}$, $x_{0.1}$ och $x_{0.01}$ vara koordinaten där temperaturen är $0.5T_m$, $0.1T_m$ respektive $0.01T_m$. Följande samband gäller:

$$x_{0.5} \approx 0.95\sqrt{at}$$

$$x_{0.1} \approx 2.3\sqrt{at} \qquad (10.1.4)$$

$$x_{0.01} \approx 3.6\sqrt{at}$$

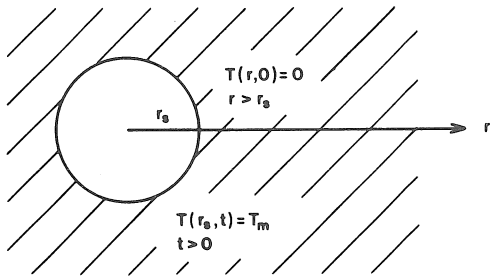
För ett materiel med $a = 1 \cdot 10^{-6}$ m^2/s ger tabell 10.1.1 inträngningsdjup vid olika tidpunkter.

t	1 tim	1 dygn	1 vecka	2 mån	1 år	10 år	100 år
$x_{0.5}$	0.06	0.30	0.78	2.3	5.6	18	56
$x_{0.1}$	0.14	0.69	1.8	5.3	13	41	130
$x_{0.01}$	0.22	1.1	2.8	8.3	20	65	200

Tabell 10.1.1. Inträngningsdjup (m) för 50, 10 och 1 % av ett temperatursteg vid randytan. Plant fall.

Av tabellen framgår att t ex inom ett år efter ett temperatursprång har maximalt 10 % av detta nått längre in i materialet än 13 m. Funktionen erfc(x') går mot ett när argumentet x' går mot noll. Temperaturen i en godtycklig punkt x går således mot slutvärdet T_m vid växande t.

Motsvarande fall, men med sfärisk geometri, visas i figur 10.1.3. Vid tiden $t = 0$ höjs yttemperaturen i den sfäriska håligheten från $T = 0$ till $T = T_m$.



Figur 10.1.3. Temperatursteg. Endimensionellt sfäriskt fall.

Lösningen ges av [*Carslaw, Jaeger, 9.10*]:

$$T(r,t) = \frac{r_s}{r}\text{erfc}\left(\frac{r - r_s}{\sqrt{4at}}\right) \cdot T_m \qquad r \geq r_s \qquad (10.1.5)$$

I det sfäriska fallet går temperaturen i en punkt r vid växande tid mot värdet:

$$\frac{r_s}{r}T_m \qquad r \geq r_s \tag{10.1.6}$$

Den maximala temperaturförändringen i en punkt är omvänt proportionell mot avståndet från sfärens centrum.

Låt $r_{0.5}$, $r_{0.1}$ och $r_{0.01}$ beteckna koordinaten för den punkt där temperaturen i ett visst ögonblick är 50, 10 respektive 1 % av den maximala, slutliga temperaturförändringen i punkten. Man erhåller:

$$\begin{aligned} r_{0.5} &\approx r_s + 0.95\sqrt{at} \\ r_{0.1} &\approx r_s + 2.3\sqrt{at} \\ r_{0.01} &\approx r_s + 3.6\sqrt{at} \end{aligned} \tag{10.1.7}$$

Betrakta följande sfäriska fall:

$$\begin{aligned} r_s &= 10\,\mathrm{m} \qquad a = 1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s} \\ T_m &= 80\ {}^\circ\mathrm{C} \end{aligned} \tag{10.1.8}$$

I en punkt 40 m utanför sfärens yta (r = 50 m) går temperaturen enligt (6.2.6) mot slutvärdet 16 °C. Med hjälp av (10.1.7) kan tidpunkten när temperaturhöjningen blivit 8 °C ($r_{0.5}$=50 m) bestämmas till ~ 50 år.

I ett motsvarande plant fall är x = 40 m. Tidpunkten när temperaturhöjningen i denna punkt är 8 °C ges av villkoret $x_{0.1}$ = 40 m. Man erhåller tiden ~ 10 år. Temperaturen i punkten växer mot slutvärdet 80 °C. Exemplet illustrerar skillnaden i räckvidd och tidsskala mellan plan och sfärisk geometri.

10.1.2 Periodisk temperatur

I en plan halvoändlig rymd, $x \geq 0$ är temperaturen $T(x,t)$. Den periodiska randtemperaturen ges av

$$T(0,t) = T_a \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0}\right) \tag{10.1.9}$$

Lösningen ges av [*Carslaw, Jaeger, 2.6*]:

$$\begin{aligned} T(x,t) &= T_a \cdot T'(x',\tau) \\ T'(x',\tau) &= e^{-x'}\sin(2\pi\tau - x') \\ x' &= \frac{x}{d_p} \\ \tau &= \frac{t}{t_0} \\ d_p &= \sqrt{\frac{at_0}{\pi}} \end{aligned} \tag{10.1.10}$$

Den periodiska svängningens amplitud dämpas med faktorn e^{-x/d_p}. Fasförskjutningen i en punkt ges av $-x/d_p$. Storheten d_p betecknar temperaturvariationens inträngningsdjup. I tabell 10.1.2 ges dämpningsfaktorn som funktion av x/d_p.

x/d_p	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
e^{-x/d_p}	0.37	0.14	0.050	0.018	0.007

Tabell 10.1.2. Dämpningsfaktorn e^{-x/d_p}.

På avståndet $3d_p$ från randen är variationens amplitud 5 % av randvariationens amplitud. Temperaturvariationens amplitud T_{amp} skall ges för plan, cylindrisk och sfärisk geometri. I de två senare fallen är randytans radie r_c respektive r_s.

Plan geometri:

$$T_{amp}(x) = T_a e^{-\frac{x}{d_p}} \qquad x \geq 0 \tag{10.1.11}$$

Cylindrisk geometri:

$$T_{amp} = T_a \sqrt{\frac{r_c}{r}} e^{-\frac{s}{d_p}} \qquad r \geq r_c$$
$$s = r - r/c \tag{10.1.12}$$

Sfärisk geometri:

$$T_{amp} = T_a \frac{r_s}{r} e^{-\frac{s}{d_p}} \qquad r \geq r_s$$
$$s = r - r_s \tag{10.1.13}$$

Dämpningen av amplituden är en produkt av två faktorer. Den ena faktorn, e^{-s/d_p}, är gemensam för de tre geometrierna. Den är en funktion av avståndet s från ytan och av variationens periodlängd. Den andra faktorn har värdet 1 (plant fall), $\sqrt{r_c/r}$ (cylindergeometri) respektive r_s/r (sfärisk geometri).

Inträngningsdjupet d_p är en funktion av periodtiden t_p och temperaturledningstalet a. Tabell 10.1.3 ger d_p som funktion av t_p när $a = 1 \cdot 10^{-6}$ (m^2/s).

t_p	1 sek	1 min	1 tim	1 dygn	1 vecka	1 mån	1 år	5 år
d_p (m)	0.0006	0.004	0.034	0.17	0.44	0.91	3.2	7.1

Tabell 10.1.3. Inträngningsdjupet d_p (m) för olika periodlängder t_p ($a = 10^{-6}$ m^2/s).

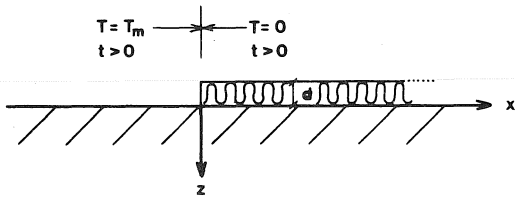
Låt $s_{0.5}$, $s_{0.1}$, $s_{0.01}$ och $s_{0.001}$ vara koordinaterna för den punkt där värdet av e^{-s/d_p} är 0.5, 0.1, 0.01 respektive 0.001. Följande värden erhålls:

$$
\begin{aligned}
s_{0.5} &\approx 0.69 d_p \\
s_{0.1} &\approx 2.3 d_p \\
s_{0.01} &\approx 4.6 d_p \\
s_{0.001} &\approx 6.9 d_p
\end{aligned}
\tag{10.1.14}
$$

I ett plant fall har temperaturvariationens amplitud dämpats till 10 % på avståndet $2.3d_p$ från ytan. Tabell 10.1.3 visar att en temperaturvariation med årsperiodicitet når cirka tjugo gånger längre in i materialet än vid dygnsvariation. I det sfäriska fallet tillkommer dämpningsfaktorn r_s/r som minskar räckvidden ytterligare jämfört med det plana fallet.

10.2 Inträngningsdjup under isoleringskant

Geometrin för de betraktade fallen är den plana halvoändliga rymden, $z \geq 0$ (figur 10.2.1). Temperaturen ges av $T(x, z, t)$. Längs den positiva x-axeln finns en isolering. Randvillkoren framgår av figuren.



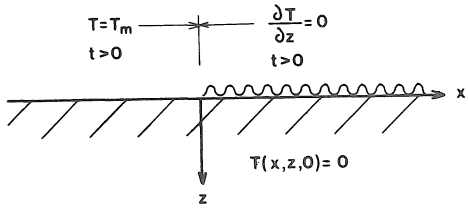
Figur 10.2.1. Kantproblem där ett isolerande skikt ligger längs hela positiva x-axeln.

Temperaturen $T(x, 0, t)$ under isoleringen skall beskrivas för några olika grundfall. Den konstanta randtemperaturen $T = 0$ för $x > 0$ dämpar förloppet. Ju tjockare isoleringen är desto mindre blir influensen från randtemperaturen $T = 0$. Minst dämpning erhålls vid totalisolering, dvs då $\partial T/\partial z = 0$ för $x > 0$.

Denna maximala temperaturspridning under isoleringen skall ges för samma randtemperaturer som används i avsnitt 10.1.

10.2.1 Temperatursteg

Problemet definieras i figur 10.2.2.



Figur 10.2.2. Temperatursteg vid isoleringskant.

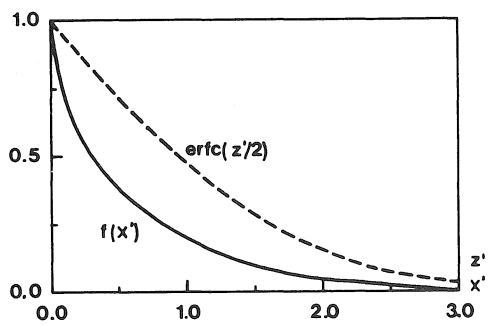
Temperaturen längs positiva x-axeln ges av [*Hagentoft, 1985*]:

$$T(x,0,t) = T_m \cdot f(x')$$
$$x' = x/\sqrt{at} \tag{10.2.1}$$

Funktionen $f(x')$ ges i figur 10.2.3. På stort avstånd från isoleringskanten erhålls ett endimensionellt förlopp i normalens riktning:

$$T(-\infty,z,t) = T_m \mathrm{erfc}\left(\frac{z'}{2}\right)$$
$$z' = \frac{z}{\sqrt{at}} \tag{10.2.2}$$

Funktionen $\mathrm{erfc}(z'/2)$ ges i figur 10.2.3.



Figur 10.2.3. Funktionen $f(x')$ enligt (10.2.1) och $\mathrm{erfc}(z'/2)$ enligt (10.2.2).

Man kan ge enkla uttryck för hur temperaturfronten rör sig in under isoleringen.

Låt x_p ange x-koordinaterna för temperaturnivån $T(x,0,t) = p \cdot T_m$, $0 < p < 1$ under isoleringen vid tiden t. Man erhåller med hjälp av figur 10.2.3:

$$\begin{aligned} x_{0.5} &\approx 0.30\sqrt{at} \\ x_{0.1} &\approx 1.5\sqrt{at} \\ x_{0.01} &\approx 2.8\sqrt{at} \end{aligned} \tag{10.2.3}$$

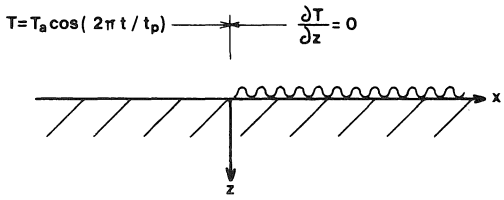
Enligt (10.1.4) och (10.2.2) har man på stort avstånd från isoleringen för den endimensionella temperaturfronten följande frontlägen efter tiden t (endimensionell plan temperaturfördelning):

$$\begin{aligned} z_{0.5} &\approx 0.95\sqrt{at} \\ z_{0.1} &\approx 2.3\sqrt{at} \\ z_{0.01} &\approx 3.6\sqrt{at} \end{aligned} \tag{10.2.4}$$

Av (10.2.3-4) framgår att fronten rör sig långsammare in under isoleringen än vad den ostörda fronten gör vid endimensionell inträngning vinkelrätt mot en yta.

10.2.2 Periodisk temperatur

Problemet definieras i figur 10.2.4.



Figur 10.2.4. Periodisk randtemperatur vid isoleringskant.

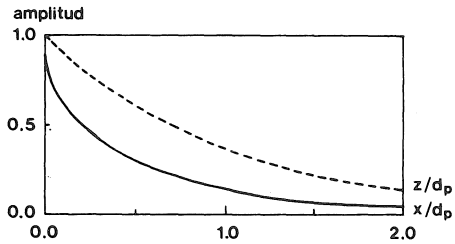
Problemet är löst i [*Hagentoft, 1985*]. Vid lösningen har en komplex beskrivning använts. Temperaturen $T(x,z,t)$ är en periodiskt varierande funktion, vars amplitud minskar med avståndet från randen. Enligt den analytiska lösningen ges amplituden för $T(x,0,t)$, $x \geq 0$, av

$$T_a \left| \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{(1+i)x}{d_p}}\right) \right| \tag{10.2.5}$$

Längdkoordinaten har, i likhet med lösningen (10.1.10), skalats med faktorn d_p:

$$d_p = \sqrt{\frac{at_0}{\pi}} \tag{10.2.6}$$

Amplituddämpningen som funktion av x/d_p ges i figur 10.2.5. I denna ges även dämpningen för det ostörda, endimensionella problem som erhålls på stort avstånd från isoleringskanten ($x = -\infty$). Se även (10.1.10).



Figur 10.2.5. Amplitud för temperaturen $T(x, 0, t)$ under plattan. Den streckade kurvan ger som jämförelse den vertikala temperaturfördelningens amplitud långt från isoleringen.

Låt x_p ange x-koordinaten för den punkt under isoleringen där amplituden är $p \cdot T_a$, $0 < p < 1$. Man erhåller:

$$\begin{aligned} x_{0.5} &\approx 0.20 d_p \\ x_{0.1} &\approx 1.3 d_p \\ x_{0.01} &\approx 3.2 d_p \end{aligned} \tag{10.2.7}$$

Inträngningsdjupet under isoleringen är en faktor 2-3 mindre än det vertikala inträngningsdjupet långt från isoleringskanten, vilket beskrivs i (10.1.14).

För fall där totalisoleringen ($x \geq 0$) ersätts med en begränsad isolertjocklek och där rand- villkoret är en konstant randtemperatur ($x \geq 0$) blir inträngningsdjupet under isoleringen mindre än vad som ges i (10.2.7). Uttrycken i (10.2.7) ger maximalt inträngningsdjup.

10.3 Global räckvidd för ett system

Vid uppskattning av hur temperaturen utbreder sig i den tredimensionella rymden på stort avstånd från en störningskälla kan man utgå från det totala värmeflödet från denna. Man finner då analytiska lösningar, som visserligen inte är tillämpliga i ome-

delbar närhet av störningskällan, men som ger karaktären av temperaturfördelningen på större avstånd.

10.3.1 Punktkälla och dipol

Låt det konstanta värmeflödet från en punktkälla i en oändlig rymd vara Q (W). Temperaturfältet ges av $T(x, y, z, t)$. Begynnelsetemperaturen är:

$$T(x, y, z, 0) = 0 \tag{10.3.1}$$

Punktkällan är placerad i origo. Lösningen ges av [*Carslaw, Jaeger, 10.4*]:

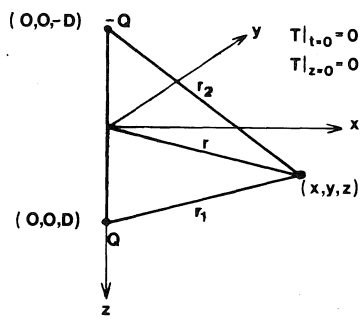
$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) &= \frac{Q}{4\pi\lambda} \cdot \frac{1}{r} \mathrm{erfc}\left(\frac{r}{\sqrt{4at}}\right) \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned} \tag{10.3.2}$$

Funktionen erfc(s) ges i figur 10.1.2. Vid växande tid t går funktionens argument mot noll i varje punkt. Temperaturfördelningen går mot:

$$T(x, y, z, \infty) = \frac{Q}{4\pi\lambda} \cdot \frac{1}{r} \tag{10.3.3}$$

Användning av (10.3.2) vid till exempel beskrivning av den globala temperaturförändringen från ett uppvärmt bergrum innebär att ingen hänsyn tagits till markytans påverkan på temperaturfältet.

Markytans betydelse kan beskrivas på följande sätt. Låt punktkällan ligga på djupet D. Markytans temperatur skall vid alla tidpunkter vara $T(x, y, 0, t) = 0$, $t \geq 0$. Lösningen erhålls genom spegling. Se figur 10.3.1.



Figur 10.3.1. Spegling av punktkälla på djupet D.

Man erhåller:

$$T(x,y,z,t) = \frac{Q}{4\pi\lambda r_1}\text{erfc}\left(\frac{r_1}{\sqrt{4at}}\right) - \frac{Q}{4\pi\lambda r_2}\text{erfc}\left(\frac{r_2}{\sqrt{4at}}\right)$$
$$r_1 = \sqrt{x^2+y^2+(z-D)^2} \tag{10.3.4}$$
$$r_2 = \sqrt{x^2+y^2+(z+D)^2}$$

Vid stora tider t närmar sig funktionen (10.3.4) gränsvärdet:

$$T(x,y,z,\infty) = \frac{Q}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{10.3.5}$$

Vid stora värden på r_1 och r_2 gäller approximativt:

$$\begin{aligned} r_2 - r_1 &\approx 2D\sin\alpha \\ r_1 \cdot r_2 &\approx r^2 \end{aligned} \tag{10.3.6}$$

Funktionen (10.3.5) kan då skrivas:

$$T(x,y,z,\infty) = \frac{Q\cdot 2D}{4\pi\lambda}\cdot\frac{\sin\alpha}{r^2} \tag{10.3.7}$$

De två punktkällorna ger upphov till ett dipolfält. I varje riktning α från dipolens centrum avtar temperaturen med $1/r^2$.

10.3.2 Linjekälla

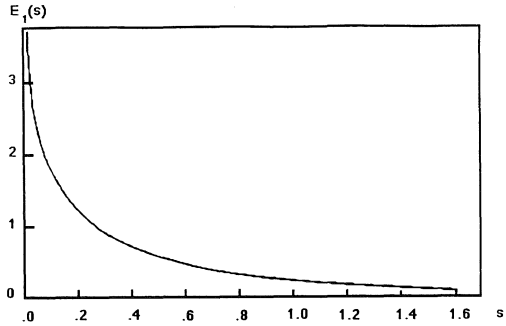
Det konstanta värmeflödet från en linjekälla med oändlig utbredning är q (W/m). Geometrin är cylindersymmetrisk. Temperaturen ges av $T(r,t)$. Problemet definieras av:

$$\begin{aligned} T(r,0) &= 0 \quad r \geq 0 \\ q(t) &= q \quad t > 0 \end{aligned} \tag{10.3.8}$$

Lösningen ges av [*Carslaw, Jaeger, 10.4*]:

$$T(r,t) = \frac{q}{4\pi\lambda}E_1\left(\frac{r^2}{4at}\right)$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2} \tag{10.3.9}$$

I funktionen E_1's argument är radien r skalad med den tidsberoende längden $\sqrt{at}$. Temperaturprofilen har i viss mening samma form vid alla tidpunkter. Funktionen $E_1(s)$ ges i figur 10.3.2 [*Abramowitz, 1979, s 228*].



Figur 10.3.2. Funktionen E_1(s).

Approximativt gäller:

$$E_1(s) \approx \frac{1}{s} e^{-s} \left(1 - \frac{1}{s}\right) \qquad s > 5$$

$$E_1(s) \approx \ln\left(\frac{1}{s}\right) - \gamma + s \qquad 0 < s < 0.5$$

$$\gamma = 0.5772 \qquad \text{(Eulers konstant)} \tag{10.3.10}$$

$$s = \frac{r^2}{4at}$$

Vid växande tid t går argumentet s mot noll i varje punkt. Det betyder enligt (10.3.9-10) att temperaturen i varje punkt växer obegränsat. Detta kan jämföras med den slutliga temperaturen runt en punktkälla där temperaturen i varje punkt växer mot ett begränsat slutvärde (10.3.3).

10.4 Insvängningstider

10.4.1 Temperatursteg vid skiva

I en skiva är avståndet mellan de två parallella ytorna L. Temperaturen ges av $T(x,t)$, $0 \leq x \leq L$. Begynnelsetemperaturen är $T(x,0) = T_0$. Vid tiden $t \geq 0$ är skivans randtemperaturer $T(0,t) = T(L,t) = T_m$. Se figur 10.4.1.
I skalad form kan problemet definieras på följande sätt:

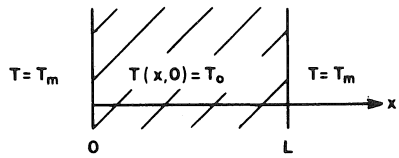
$$T'(x,t) = \frac{T(x,t) - T_m}{T_0 - T_m} \tag{10.4.1}$$

Begynnelsevillkor:

$$T'(x,0) = 1 \tag{10.4.2}$$

Randvillkor:

$$\left.\begin{array}{l} T'(0,t) = 0 \\ T'(L,t) = 0 \end{array}\right\} \quad t \geq 0 \tag{10.4.3}$$



Figur 10.4.1. Temperatursteg i en skiva.

Lösningen ges av [*Carslaw, Jaeger, 3.4*]:

$$T'(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right) e^{-a\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}\right)^2 t} \tag{10.4.4}$$

Termerna i serien dämpas kraftigt med växande n. Den första termen, $n = 0$, blir därför avgörande för hur snabbt temperaturen i skivan närmar sig den slutliga, stationära temperaturfördelningen. Den första termen ger:

$$T'(x,t) = \frac{4}{\pi} \sin\frac{\pi x}{L} \cdot e^{-a\frac{\pi^2}{L^2} \cdot t} \tag{10.4.5}$$

Exponentialfaktorn avgör hur snabbt temperaturen i plattan närmar sig slutvärdet $T'(x,\infty) = 0$.

Formel (5.2.1) anger ett längsta tidssteg vid den numeriska lösningen. Om den betraktade skivan representeras av en enda gittercell erhålls (endimensionella förhållanden):

$$\Delta t_{stab} = \frac{\Delta x^2}{4} \cdot \frac{1}{a}$$

Detta tidsvärde, insatt i dämpningsfaktorn i (10.4.5), ger:

$$e^{-\frac{\pi^2}{4}} \approx 0.085 \tag{10.4.6}$$

Jämfört med den inledande temperaturfördelningen är avvikelsen från den slutliga temperaturfördelningen $T = 0$ mindre än 10 %.

Situationen kan utvidgas till allmänna *tredimensionella* förhållanden. En parallellepiped har sidorna L_x, L_y och L_z i de tre koordinataxlarnas riktning. Origo ligger mitt i den betraktade volymen. Begynnelsevillkoret, $t = 0$, är:

$$T'(x, y, z, 0) = f(x, y, z) \tag{10.4.7}$$

Här är $f(x, y, z)$ en godtycklig temperaturfördelning. Randvillkoret för de sex randytorna ges av:

$$T'(x, y, z, t) = 0 \qquad t > 0 \tag{10.4.8}$$

Den allmänna lösningen ges av:

$$T'(x, y, z, t) = \sum_{n_x, n_y, n_z = 1}^{\infty} a_{n_x, n_y, n_z} \cdot \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L_y}\right) \cdot \tag{10.4.9}$$

$$\sin\left(\frac{n_z \pi z}{L_z}\right) \cdot e^{-at\left(\frac{n_x^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2 \pi^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2 \pi^2}{L_z^2}\right)}$$

Summeringen utförs för alla kombinationer av n_x, n_y och n_z. Faktorerna a_{n_x, n_y, n_z} bestäms av begynnelsetemperaturen $f(x, y, z)$.

Termerna i summan dämpas kraftigt med ökande värden på n_x, n_y och n_z. För den lägsta termen med $n_x = n_y = n_z = 1$ kan man definiera en tidskonstant t_c, så att dämpningsfaktorn kan skrivas e^{-t/t_c}:

$$t_c = \frac{1}{a\pi^2\left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2}\right)} \tag{10.4.10}$$

Stabilitetstidssteget för parallellepipeden är enligt (5.2.1):

$$\Delta t_{stab} = \frac{1}{4a\left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2}\right)} \tag{10.4.11}$$

Man erhåller:

$$\frac{\Delta t_{stab}}{t_c} = \frac{\pi^2}{4} \approx 2.5 \tag{10.4.12}$$

Uttrycket (10.4.12) gäller även vid tvådimensionella ($L_z \to \infty$) och endimensionella ($L_y, L_z \to \infty$) förhållanden.

Stabilitetstidssteget för en cell definierar en tidslängd som är 2.5 gånger så lång som tids- konstanten för den långsammast avklingande termen i temperaturen (10.4.9). Efter stabilitetstidssteget har temperaturen dämpats med faktorn 0.085 enligt (10.4.6).

10.4.2 Temperaturavklingning i delvolym

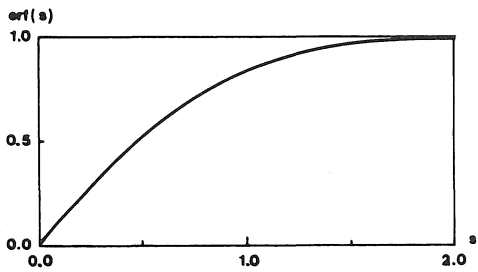
I området $-\infty < x < \infty$ ges temperaturen av $T(x,t)$. Begynnelsetemperaturen är:

$$T(x,0) = \begin{cases} T_1 & -L/2 \leq x \leq L/2 \\ 0 & |x| > L/2 \end{cases} \tag{10.4.13}$$

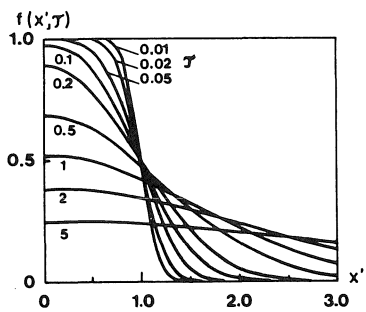
Enligt [*Claesson et al.,1980*] är lösningen för $t > 0$:

$$\begin{aligned} T(x,t) &= T_1 \cdot f(x',\tau) \\ f(x',t) &= 0.5\left(\mathrm{erf}\left(\frac{0.5-x'}{\sqrt{\tau}}\right) + \mathrm{erf}\left(\frac{0.5+x'}{\sqrt{\tau}}\right)\right) \\ \tau &= \frac{4at}{L^2} \qquad x' = \frac{x}{L} \end{aligned} \tag{10.4.14}$$

Funktionen erf(s), felfunktionen, ges i figur 10.4.2. Funktionen $f(x',\tau)$ ges i figur 10.4.3.



Figur 10.4.2. Felfunktionen erf(s).

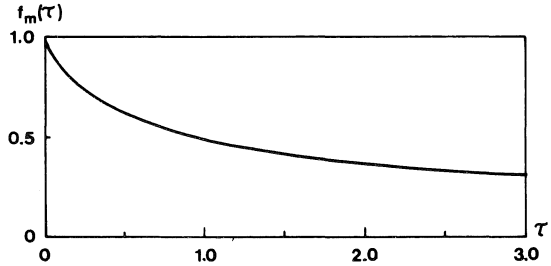


Figur 10.4.3. Funktionen $f(x',\tau)$.

Medeltemperaturen $T_m(t)$ i området $-L/2 < x < L/2$ är:

$$\begin{aligned} T_m(t) &= T_1 \cdot f_m\left(\frac{4at}{L^2}\right) \\ f_m(\tau) &= \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right) - \sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}}\right) \end{aligned} \tag{10.4.15}$$

Funktionen f_m ges i figur 10.4.4.



Figur 10.4.4. Funktionen $f_m(\tau)$.

Dela in x-axeln i en gitterstruktur med cellstorleken $\Delta x = L$ så att en av cellerna täcker området $|x| < L/2$. Enligt (5.2.2) är stabilitetstidssteget för en sådan cell:

$$\Delta t_{stab} = \frac{L^2}{2a}$$

Det skalade tidsvärdet för stabilitetstidssteget är:

$$\Delta\tau_{stab} = \frac{4a}{L^2} \cdot \frac{L^2}{2a} = 2 \tag{10.4.16}$$

Figur 10.4.4 ger $f_m(2) \approx 0.38$. Jämfört med den inledande temperaturen T_1 i cellen runt origo är avvikelsen från den slutliga medeltemperaturen $T = 0$ ungefär 38 % efter tiden Δt_{stab}. Med den i kapitel 4 beskrivna lösningsmetoden är, efter tiden Δt_{stab}, cellens temperatur $T = 0$. Se avsnitt 5.1.1.

För ett *tredimensionellt* fall ges begynnelsetemperaturen av:

$$T(x,y,z,0) = \begin{cases} T_1 & |x| < L_x/2, |y| < L_y/2, |z| < L_z/2 \\ 0 & \text{övrig volym} \end{cases} \tag{10.4.17}$$

Lösningen ges av:

$$T(x,y,z,t) = T_1 \cdot f\left(\frac{x}{L_x}, \frac{4at}{L_x^2}\right) \cdot f\left(\frac{y}{L_y}, \frac{4at}{L_y^2}\right) \cdot f\left(\frac{z}{L_z}, \frac{4at}{L_z^2}\right) \tag{10.4.18}$$

Medeltemperaturen i det betraktade området ges av [*Claesson et al.,1980*]:

$$T_m(t) = T_1 \cdot f_m\left(\frac{4at}{L_x^2}\right) \cdot f_m\left(\frac{4at}{L_y^2}\right) \cdot f_m\left(\frac{4at}{L_z^2}\right) \tag{10.4.19}$$

Funktionen $f_m(\tau)$ ges i (10.4.15). Låt de tre längderna L_x, L_y och L_z vara lika stora. Vid en indelning i en tredimensionell cellstruktur ger (5.2.5) stabilitetstidssteget för en cell:

$$\Delta t_{stab} = \frac{L^2}{6a} \tag{10.4.20}$$

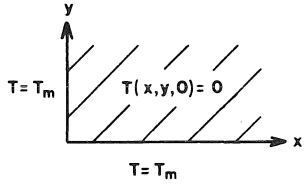
Det skalade tidsvärdet för stabilitetstidssteget är $\tau = 2/3$. Figur 10.4.4 och (10.4.19) ger:

$$T_m\left(\frac{L^2}{6a}\right) = T_1 \cdot (f_m(2/3))^3 \approx 0.18T_1 \tag{10.4.21}$$

Medeltemperaturen $T_m(t)$ är ett mått på värmeinnehållet i den betraktade kuben om temperaturen $T = 0$ väljs som referensnivå. Vid beräkningen behandlas värmetransporten genom kubens ränder på ett exakt sätt enligt värmeledningsekvationen. Efter den tid som motsvaras av kubens stabilitetstidssteg återstår 18 % av kubens värmeinnehåll. Med den approximativa beskrivning som används vid den numeriska lösningen förlorar kuben hela värmeinnehållet under tidssteget. Se avsnitt 5.1.1.

10.5 Temperatursteg vid hörn

I ett område $x \geq 0$, $y \geq 0$ ges temperaturen av $T(x,y,t)$. Begynnelsetemperaturen är $T(x,y,0) = 0$. Vid tiden $t > 0$ är randtemperaturen T_m, Se figur 10.5.1.



Figur 10.5.1. Temperatursteg vid tvådimensionellt hörn.

En skalad lösning $T'(x,y,t)$ ges av [*Carslaw, Jaeger, 5.6*]:

$$T'(x,y,t) = \frac{T(x,y,t)}{T_m} = 1 - \mathrm{erf}(x') \cdot \mathrm{erf}(y') \tag{10.5.1}$$
$$x' = \frac{x}{\sqrt{4at}}$$
$$y' = \frac{y}{\sqrt{4at}}$$

Funktionen erf(s) ges i figur 10.4.2. Vid växande s går erf(s) mot värdet ett. Av funktionen (10.5.1) framgår att för växande y' gäller:

$$\begin{aligned} &T'(x,y,t) \rightarrow 1 - \mathrm{erf}(x') = \mathrm{erfc}(x') \\ &\frac{y}{\sqrt{4at}} \rightarrow \infty \end{aligned} \tag{10.5.2}$$

Vid varje tidpunkt närmar sig, på tillräckligt stort avstånd från hörnet, temperaturfördelningen en endimensionell lösning i x-led vilken är ostörd av hörnet. Låt y_p vara den punkt där erf(y') vid en viss tidpunkt är större än p ($0 < p < 1$). I analogi med (10.1.4) erhålls:

$$\begin{aligned} &y_{0.90} \approx 2.3\sqrt{at} \\ &y_{0.99} \approx 3.6\sqrt{at} \end{aligned} \tag{10.5.3}$$

Uttrycken i (10.5.3) ger möjligheten att vid valfri tidpunkt bestämma var den tvådimensionella lösningen, med given feltolerans, övergår i en endimensionell lösning enligt avsnitt 10.1.1. Det sökta avståndet är proportionellt mot kvadratroten ur den passerade tiden efter temperatursprånget.

I ett *tredimensionellt* fall definieras problemet på följande sätt. Temperaturen ges av $T(x,y,z,t)$.

Begynnelsevillkor:

$$T(x,y,z,0) = 0 \tag{10.5.4}$$

Randvillkor, $t > 0$:

$$\begin{aligned} T(0,y,z,t) &= T_m \qquad y \geq 0, z \geq 0 \\ T(x,0,z,t) &= T_m \qquad x \geq 0, z \geq 0 \\ T(0,y,z,t) &= T_m \qquad x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned} \tag{10.5.5}$$

Lösningen ges i analogi med (10.5.1) av:

$$T'(x,y,z,t) = \frac{T(x,y,z,t)}{T_m} = 1 - \mathrm{erf}(x') \cdot \mathrm{erf}(y') \cdot \mathrm{erf}(z')$$
$$x' = \frac{x}{\sqrt{4at}} \tag{10.5.6}$$

$$y' = \frac{y}{\sqrt{4at}}$$
$$z' = \frac{z}{\sqrt{4at}}$$

Enligt (10.5.6) går lösningen vid tillräckligt stort värde på något av argumenten x', y' och z' mot tvådimensionella förhållanden. Dessa värden erhålls i analogi med uttrycken i (10.5.3). Vid tillräckligt stora värden på kombinationen av två av faktorerna ovan går lösningen mot endimensionella förhållanden.

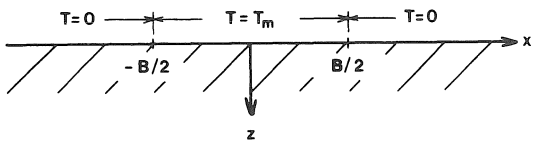
I ett tredimensionellt fall kan man, beroende på geometri och tidpunkt, eventuellt förenkla problemets geometri till ett två- eller endimensionellt fall.

10.6 Platta på mark

10.6.1 Given randtemperatur

I en halvoändlig, tvådimensionell rymd, $z \geq 0$, är temperaturen $T(x,z)$. Det stationära problemet definieras av följande randvillkor:

$$\begin{aligned} T(x,0) &= T_m \quad |x| \leq B/2 \\ T(x,0) &= 0 \quad\;\; |x| > B/2 \end{aligned} \tag{10.6.1}$$



Figur 10.6.1. Platta på mark. Randvillkor.

Följande skalning väljs:

$$\begin{aligned} T(x,z) &= T_m \cdot T'(x',z') \\ x' &= \frac{x}{B/2} \\ z' &= \frac{z}{B/2} \end{aligned} \tag{10.6.2}$$

Lösningen ges av:

$$T'(x',z') = -\frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{1+x'}{z'}\right) + \arctan\left(\frac{1-x'}{z'}\right)\right) \tag{10.6.3}$$

Funktionens derivata i z-led är:

$$\left.\frac{\partial T'}{\partial z'}\right|_{z'=0} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+x'} + \frac{1}{1-x'}\right) \qquad |x'| < 1 \tag{10.6.4}$$

Värmeflödet i vertikalled längs randen $|x| < B/2$ är proportionell mot funktionen (10.6.4).

Vid *tredimensionella* förhållanden, $z \geq 0$, ges den stationära temperaturen av $T(x,y,z)$. Plattan täcker ytan $|x| < B/2$, $|y| < L/2$. Följande skalning väljs:

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= T_m \cdot T'(x',y',z') \\ x' &= \frac{x}{B/2} \\ y' &= \frac{y}{B/2} \\ z' &= \frac{z}{B/2} \end{aligned} \tag{10.6.5}$$

Problemet definieras i skalad form av:

$$T'(x',y',0) = 1 \qquad |x'| \leq 1, \quad |y'| \leq L/B \tag{10.6.6}$$

$$T'(x',y',0) = 0 \qquad \text{utanför rektangeln} \tag{10.6.7}$$

Lösningen ges av:

$$\begin{aligned} T'(x',y',z') = \frac{1}{2\pi}\{&A(1-x',L/B-y',z') + A(1+x',L/B-y',z') + \\ &A(1-x',L/B+y',z') + A(1+x',L/B+y',z')\} \\ A(r,s,t) = \arctan&\left(\frac{rs}{t\sqrt{r^2+s^2+t^2}}\right) \end{aligned} \tag{10.6.8}$$

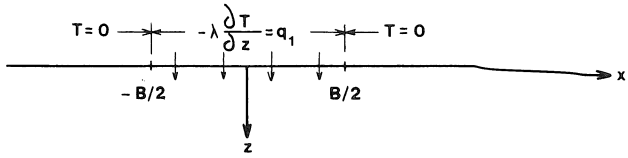
Funktionens derivata i z-led är:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial T'}{\partial z'}\right|_{z'=0} &= R(x',y') + R(-x',y') + R(x',-y') + R(-x',-y') \\ R(x',y') &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{(1-x')^2} + \frac{1}{(L/B-y')^2}} \\ |x'| &< 1 \qquad \text{och} \qquad |y'| < L/B \end{aligned} \tag{10.6.9}$$

10.6.2 Givet randvärmeflöde

I en tvådimensionell halvoändlig rymd, $z \geq 0$, ges temperaturen av $T(x,z)$. Det stationära problemet definieras av följande randvillkor (figur 10.6.2):

$$-\lambda \frac{\partial T(x,0)}{\partial z} = q_1 \quad |x| \leq B/2$$
$$T(x,0) = 0 \quad |x| > B/2 \tag{10.6.10}$$



Figur 10.6.2. Platta på mark. Randvillkor.

Följande skalning väljs:

$$T(x,z) = \frac{(B/2)q_1}{\lambda} T'(x',z') \tag{10.6.11}$$
$$x' = \frac{x}{B/2}$$
$$z' = \frac{z}{B/2}$$

Problemet definieras i skalad form av:

$$\left.\frac{\partial T'}{\partial z'}\right|_{z=0} = 1 \qquad |x'| \leq 1$$
$$T'(x',0) = 0 \qquad |x'| > 1 \tag{10.6.12}$$

Enligt [*Claesson, Eftring, 1980, kap 6-7*] ges lösningen av:

$$T'(x',z') = \sqrt{\sqrt{f + (x'z')^2} + f} + z'$$
$$f = \frac{1+(z')^2-(x')^2}{2} \tag{10.6.13}$$

Speciellt gäller:

$$T'(x',0) = \sqrt{1-(x')^2} \qquad |x'| \leq 1 \tag{10.6.14}$$

Vid *cylindersymmetri* ges temperaturen av $T(r,z)$. Det skalade problemet definieras av:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T'}{\partial r'} = 1 && 0 \leq r' \leq 1 \\ &T'(r',0) = 0 && r' > 1 \\ & && r' = \frac{r}{R} \\ & && z' = \frac{z}{R} \end{aligned} \tag{10.6.15}$$

Temperaturen $T'(r',0)$ i området $r' \leq 1$ ges av:

$$T'(r',0) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-(r')^2} \tag{10.6.16}$$

Kapitel 11

FÖRENKLINGSVÄGAR

Ett värmetransportproblem definieras av ett områdes geometri, randvillkor för varje delrand, starttemperatur i beräkningsområdet samt av termiska egenskaper inom beräkningsområdet. Vid lösning av problemet är intresset i allmänhet fokuserat på någon speciell del av beräkningsområdet.

I många situationer kan det beskrivna problemet förenklas på olika sätt utan att oacceptabla fel introduceras i den intressanta delen av lösningen. I den följande beskrivningen ges en systematisk framställning av ett tillvägagångssätt.

Utgångspunkten är ett värmetransportproblem av ovan beskriven typ. Problemets karakteristiska egenskaper bestäms av:

- beräkningsområdets geometri
- tidsskalor som definieras av cykliska randvillkors periodlängder
- tidsskalor som definieras av att temperatursteg vid en eller flera ränder orsakar en eller flera temperaturfront(er) som rör sig in i området från respektive rand

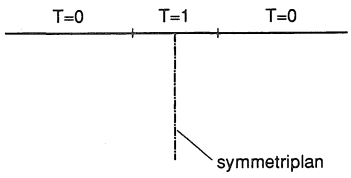
På motsvarande sätt bestäms lösningens väsentliga delar av:

- geometri: endast ett *visst delområde* är intressant
- tid: lösningen är endast intressant vid *viss(a) tidpunkt(er)*

Genomförandet av en lösning kräver att beräkningsområdet beskrivs i ett cellsystem och att nödvändiga randvillkor definieras vid lämpliga ränder. Flera principiellt olika förenklingsmoment kan användas vid en sådan beskrivning.

Reduktion av totalproblemet

1. Eventuella geometriska symmetrier medför att beräkningsområdet kan reduceras genom införandet av ränder i form av *symmetriplan* genom vilka värmeflödet är noll. Ett enkelt exempel ges i figur 11.1.



Figur 11.1 Symmetriplan som halverar ett beräkningsområde.

2. Superpositionsprincipen medför att det totala problemet för det reducerade området kan separeras i ett antal *delproblem*. Varje delproblem beskriver ett grundläggande randvillkor vid en delrand av det reducerade området. Med grundläggande randvillkor avses här ett temperatursteg eller en periodisk variation med given periodlängd. I [*Eskilson, Thesis*] tillämpas superpositionsprincipen på geometriskt komplicerade problem.

Bedömning av ett delproblems betydelse för den totala lösningen

Påverkar ett delproblem det intressanta området vid tidpunkter av intresse eller har delproblemet försumbar betydelse för den aktuella frågeställningen? Bedömning av detta kan ske via räckviddsbetraktelser för delproblemets temperaturprocess. Man kan urskilja flera orsaker till en begränsad räckvidd:

1. *tidsskala*: Temperaturfronten från ett temperatursteg har, vid intressanta tidpunkter, endast rört sig så långt in i området att temperaturen i områdets intressanta delar har försumbar betydelse. Se avsnitt 10.2.1.

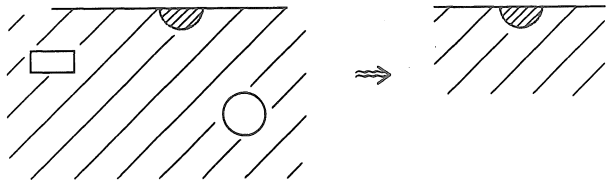
2. *dämpning på grund av periodiskt randvillkor*: Ju kortare tidsperiod en varierande randtemperatur har desto kortare är den resulterande temperaturprocessens inträngningsdjup. Se avsnitt 10.2.2.

3. *dämpning på grund av den aktuella lösningens karaktär*: Man får i varje punkt av beräkningsområdet en temperatur som med tiden växer mot ett gränsvärde. Detta gränsvärde går mot noll med avståndet från randen. Oavsett tidpunkt kan man se vilket största inflytande delproblemet kan ha inom den intressanta delen av beräkningsområdet. Se kapitel 10.

Förenkling av ett delproblem

Ett uppställt delproblem omfattar en geometrisk beskrivning och ett grundläggande randvillkor vid en delrand. I vissa situationer kan problemets geometri förenklas ytterligare.

1. Det intressanta området ligger så långt från vissa ränder att dessas betydelse kan försummas. Dessa ränder kan då ges en sådan beskrivning att delproblemets geometri förenklas. Ett exempel ges i figur 11.2.



Figur 11.2 Förenkling av ett delproblems geometri. Geometriska ränder är heldragna. Intressant område är tätt sträckat.

2. En rand i delproblemet kan ha en "skrovlig" yta. Tidsskalan vid lösningen av problemställningen medför att randcellen har en viss cellstorlek. Om skrovligheten har små dimensioner jämfört med cellstorleken kan den skrovliga randytan slätas ut (att störningen från skrovligheten hos en yta har en geometrigrundad, begränsad räckvidd bevisas inte här utan får tas som ett intuitivt faktum).

3. Vid varierande termiska egenskaper inom området kan det betraktade problemets tidsskala vara stor i förhållande till tidsskalan för ett delområde med homogena termiska egenskaper. Formel (9.1.2) anger stabilitetstidssteg för celler i en cellstruktur som är anpassad till det förlopp som orsakas av ett temperatursteg vid randen. Man kan då se vilket stabilitetstidssteg en cell bör ha på den plats i gittret där det betraktade delområdet är beläget. Beskriv det betraktade delområdet som en enda cell med dimensioner som stämmer överens med delområdets. Om denna cells stabilitetstidssteg är avsevärt mindre än vad (9.1.2) anger, har man inom delområdet en approximativt stationär temperaturfördelning. Delområdet kan, beroende på geometrin i övrigt, eventuellt ges en beskrivning i form av ett tunt skikt (försumbar tjocklek och alltså även försumbar värmekapacitet) där skiktets värmemotstånd är lika med det betraktade delområdets värmemotstånd. Se avsnitt 9.1.

   Vid beräkning av värmetransport i mark kan markisoleringar i form av skivor ofta representeras på detta sätt. Marken kan då beskrivas med homogena termiska egenskaper och markisoleringarna beskrivs som tunna motståndsskikt mellan lämpliga celler i cellstrukturen.

4. Genom en förändring av problemställningen kan beräkningsområdets geometri i vissa fall avsevärt förenklas. Betrakta till exempel fallet med värmetransport till och från ett rör i mark. Beräkningen skall genomföras för ett vertikalt tvärsnitt vinkelrätt mot röret. Man har en komplicerad geometri som omfattar den plana markytan och rörets cirkulära rand. Beräkningsområdet skall delas in i en gitterstruktur. En väsentlig del vid lösningens genomförande är att korrekt beskriva värmetransporten genom olika cellränder.

   Den fysiska närvaron av röret medför den svårbeskrivna geometrin. Om värmeöverföringen mellan rör och mark kan ges en annan beskrivning kan den geometriska komplikationen elimineras. Beräkningsområdet kan till exempel indelas i en

Cartesisk gitterstruktur så att rörets centrum hamnar mitt på randen mellan två celler av samma dimension.

Den stationära rotationssymmetriska temperaturfördelningen runt ett rör utan inverkan av markyta har en känd temperaturprofil. Låt temperaturen nära det aktuella röret i marken ha detta utseende. Låt, i den punkt som motsvarar mittpunkten av de omgivande cellerna, den antagna temperaturfördelningens värde vara de två berörda cellernas medeltemperatur.

Tidsskalan för den betraktade variationen i rörets temperatur är sådan att temperaturfördelningen i det betraktade området kan betraktas som stationärt (gäller alltid för området mellan två temperaturpunkter). Värmeöverföringen mellan rör och mark bestäms då av rörets temperatur, den ovan definierade medeltemperaturen samt av värmemotståndet mellan de två cirklar som definieras av rörradien och av de två cellernas mittpunkter. Se avsnitt 2.3.2. Det sålunda bestämda värmeflödet, positivt eller negativt, fördelas mellan de två betraktade cellerna.

Det ursprungliga problemet med värmeöverföring till och från ett rör har förändrats till ett problem som kan uppfattas som volumetrisk värmetranport till två celler i cellstrukturen. Resultatet är en stor förenkling av beräkningsområdets geometri. För ytterligare utveckling av denna metod hänvisas till [*Hellström, Thesis*] avseende borrhålsvärmelager där man har en dynamisk, endimensionell rotationssymmetrisk beskrivning av temperaturförloppet nära röret och där markcellerna i stället kan göras mycket större. Den korta tidsskalan hanteras i det lokala endimensionella problemet nära röret och det långsammare storskaliga förloppet i marken hanteras med hjälp av en till denna tidsskala anpassad cellstruktur.

Anpassning av ett delproblem till ett cellsystem

För att ett relevant delproblem skall kunna lösas måste det beskrivas i ett fungerande cellsystem. Följande grundläggande möjligheter finns:

1. Delproblemet beskrivs direkt i ett allmänt ortogonalt gitter. En sned rand kan i ett Cartesiskt koordinatsystem beskrivas sågtandformat utan att beräkningen påverkas. Dock måste vid en sådan beskrivning värden för eventuella randvärmemotstånd korrigeras. Se avsnitt 8.1.

2. Beräkningsområdet omformas via en konform avbildning till en geometri som passar ett allmänt ortogonalt koordinatsystem. Se avsnitt 8.2.2.

3. Beräkningsområdet beskrivs med ett rent triangulärt eller med ett blandat triangulärt/ortogonalt cellsystem. Se avsnitt 8.3.

Oavsett typen av cellsystem skall ingående cellers dimensioner väljas så att cellernas tidsskalor överensstämmer med tidsskalan för den studerade processen. Se kapitel 6.

Om flera delproblem har samma geometri kan en gemensam lösning erhållas genom att deras respektive randvillkor adderas. Vid valet av cellstorlek skall, i hela beräkningsområdet, den minsta cellstorleken från de båda delproblemen väljas.

Reduktion av antalet nödvändiga cellberäkningar i en cellstruktur

Vid genomförandet av en beräkning behöver inte alla celler genomräknas lika ofta. Man kan systematisera beräkningen så att varje cell bearbetas ungefär i enlighet med sin egen tidsskala. Detta innebär kortfattat att små celler genomräknas oftare än stora celler. Se avsnitt 6.5.

Specialhantering av delområden

Beräkningsområdet kan spaltas upp i delar med olika typ av bearbetning. Ett exempel på detta är modellen för värmelagring i bergrum (kapitel 13). Den del av marken som upptas av bergrummet behandlas som ett endimensionellt problem med en blandad konduktiv/konvektiv värmetransport i vertikalled. Det omgivande bergets temperaturer definierar randtemperaturer till bergrummet. Tidsiterationen sker med kortare tidssteg i bergrummet än i berget. Värmeflödet genom bergrummets ytor fördelas mellan berörda randceller så att en noggrann energikonservation upprätthålls.

Kapitel 12

FRYSNING. TEMPERATURBEROENDE TERMISKA EGENSKAPER

Värmeledningsekvationen enligt (3.3.7) skrivs på följande sätt vid temperaturberoende värmeledningsförmåga och värmekapacitet:

$$C(T)\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q} = \nabla \cdot (\lambda(T)\nabla T) \tag{12.0.1}$$

I kapitlet belyses hur de temperaturberoende termiska egenskaperna påverkar den i kapitel 3 beskrivna lösningsmetoden. Vidare anges en metod att undvika problemet att bestämma de temperaturberoende konduktanserna mellan cellers temperaturpunkter.

12.1 Värmeledningsförmåga

I ett material transporteras värme genom ledning, konvektion och strålning. Dessa transportmekanismer är till sin karaktär temperaturberoende även om detta i många situationer kan försummas. Fouriers lag (2.2.4) uttrycker sambandet mellan värmetransport och temperaturgradient. När temperaturberoendet inte kan försummas skrivs Fouriers lag:

$$\vec{q} = -\lambda(T)\nabla T = -\lambda(T)\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{12.1.1}$$

För värmeflödet q_x (W/m^2) längs x-axeln har man:

$$q_x = -\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x} \tag{12.1.2}$$

Vid den numeriska lösningen av värmeledningsekvationen kan värmeflödet genom en cellrand mellan två temperaturpunkter beräknas med hjälp av (2.3.37) om funktionen $\lambda(T)$ är känd. Formeln definierar en medelvärmeledningsförmåga mellan de två cellernas mittpunkter. Formel (2.3.38) bestämmer värmemotståndet mellan cellerna. Motståndets värde ändras inför varje nytt iterationstidssteg i beräkningen. Se avsnitt 4.2.2. Betydelsen av temperaturberoendet skall belysas av följande exempel.

Exempel

Värmeflödet genom en lätt isolerskiva med tjockleken 0.16 m skall bestämmas. Värmeledningsförmågan $\lambda(T)$ antas variera lineärt mellan värdet vid 0 °C, $\lambda_0 = 0.036$, och värdet vid 60 °C, $\lambda_{60} = 0.051$ W/mK. Materialets värmekapacitet är 30000 J/m^{3}K.

Temperaturen på skivans insida är 20 °C. Tre olika temperaturvariationer har ansatts vid skivans yttersida.

1. $T_{ute} = 20 + 20\cos(\omega_{dygn} \cdot t)$ (°C)

2. $T_{ute} = 50 + 30\cos(\omega_{dygn} \cdot t)$ (°C)

3. $T_{ute} = 50$ (°C)

där $\omega_{dygn} = \frac{2\pi}{1\ dygn}$

De valda fallen kan illustrera förhållandet vid taket på ett hus under ett normalt och ett extremt sommardygn.

värmeledningsförmåga (W/mK)	max värmeflöde in (W/m^2)			energi in under ett dygn (kWh/m^2)		
	Fall			Fall		
	1	2	3	1	2	3
$\lambda(T)$	5.4	19.8	8.5	0.004	0.214	0.204
λ_{10}	4.7	14.2	7.1	0.000	0.170	0.170

Tabell 12.1.1. Värmeflöde genom en skiva med temperaturberoende värmeledningsförmåga.

Av tabell 12.1.1 framgår att det maximala värmeflödet genom skivan vid fall 1 är 15 % större vid varierande värmeledningsförmåga än med konstant λ_{10}-värde.

Vid fall 2, som gäller extrema temperaturförhållanden, ger den temperaturberoende värmeledningsförmågan $\lambda(T)$ ett maximalt värmeflöde genom skivan som är 30 % större än vad som erhålls med λ_{10}. Den totala värmemängd som transporteras in genom skivan under ett dygn blir 15 % större med $\lambda(T)$ än med λ_{10}.

12.2 Värmekapacitet

I formel (2.1.4) ges ett samband mellan den temperaturförändring dT som erhålls när en volymsenhet av ett material tillförs värmemängden dE. Man har:

$$dE = CdT$$

Detta samband förutsätter att temperaturhöjningen dT är lika stor oberoende av vid vilken temperatur T värmetillskottet sker. I det allmänna fallet kan proportionalitetsfaktorn C (J/m^{3}K), den volymetriska värmekapaciteten, vara en funktion av temperaturen T. Man har:

$$dE = C(T)dT \tag{12.2.1}$$

Vid den numeriska lösningen av värmeledningsekvationen beräknas värmetillskottet ΔE_i (J) till varje cell i under ett tidssteg. Cellens temperatur före och efter tidssteget betecknas $T_{i,n}$ respektive $T_{i,n+1}$. Cellens volym är V_i. Integration av (12.2.1) ger:

$$\Delta E_i = \int_{T_{i,n}}^{T_{i,n+1}} V_i C(T)dT \tag{12.2.2}$$

Vid temperaturoberoende värmekapacitet ger (12.2.2):

$$\Delta E_i = (T_{i,n+1} - T_{i,n})V_i C \tag{12.2.3}$$

Denna formulering är ekvivalent med uttrycket (3.3.4). Ur (12.2.3) kan den nya temperaturen $T_{i,n+1}$ enkelt beräknas när nettovärmetillskottet ΔE_i till cellen under tidssteget Δt är känt.

Vid temperaturberoende värmekapacitet kan man ur (12.2.2) definiera ett entydigt samband mellan en cells värmeinnehåll (J) och dess temperatur enligt:

$$E_i(T_i) = \int_0^{T_i} V_i \cdot C(T)dT \tag{12.2.4}$$

Uttrycket (12.2.4) innebär att cellens värmeinnehåll definitionsmässigt är noll vid temperaturen $T_i = 0$ °C. Med hjälp av (12.2.4) bestäms cellens temperatur $T_{i,n+1}$ efter tidssteget Δt av ekvationen:

$$E_i(T_{i,n+1}) = E_i(T_{i,n}) + \Delta E_i \tag{12.2.5}$$

Med utgångspunkt från sambandet (12.2.1) mellan värmetillskott och temperaturförändring innehåller (12.2.5) inga approximationer. En cells värmeinnehåll kontrolleras exakt.

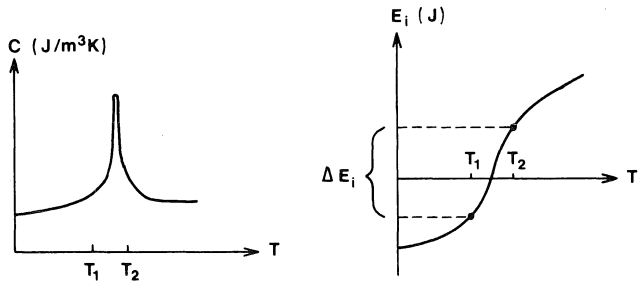
Anmärkning

Följande enkla approximation av sambandet (12.2.1) kan medföra stora fel.

$$\Delta E_i = V_i \cdot C(T_{i,n})(T_{i,n+1} - T_{i,n}) \tag{12.2.6}$$

Detta ger ett enkelt explicit uttryck för den nya temperaturen $T_{i,n}$. Approxima-

tionen kan ge upphov till stora felaktigheter i en cells värmeinnehåll och därmed i dess temperatur.



Figur 12.2.1. Två beskrivningar av temperaturberoende värmekapacitet.

Antag att temperaturen i en cell är T_1 vid tidsstegets början (figur 12.2.1). Om (12.2.6) används vid beräkning av den nya temperaturen är den aktuella värmekapaciteten $C(T_1)$. Antag att värmetillskottet till cellen är så stort att den beräknade nya temperaturen blir T_2. Vid nästa tidssteg används värdet $C(T_2)$ som aktuell värmekapacitet. Man har då helt försummat den energimängd som representeras av den branta toppen i funktionen $C(T)$. Denna typ av fel undviks med en beskrivning enligt (12.2.4-5) vilken grundas på energikonservation.

Ekvationen (12.2.4) kan omformuleras till sorten energi per volymsenhet:

$$e(T) = \int_0^T C(T)dT \tag{12.2.7}$$

Detta samband definierar en materialegenskap. Därmed kan en enda funktion användas för alla celler som består av samma material, oavsett cellens dimensioner.

I avsnitt 4.4 anges att temperaturfördelningen i en cell representeras av ett plan med godtycklig lutning och att cellens mittpunktstemperatur representerar cellens energiinnehåll. Vid temperaturberoende värmekapacitet är temperaturplanets lutning noll. Därmed kan man förvänta sig att beräkningsnoggrannheten sjunker jämfört med det temperaturoberoende fallet. Se även tabell 8.3.1 som visserligen avser en annan situation men där det representerade temperaturplanets lutning också är noll.

12.3 Frysning

När vatten övergår från flytande till fast form frigörs latent värme. Detta värme deltar i den normala konduktiva värmetransporten i området. Processen kan även gå i den motsatta riktningen.

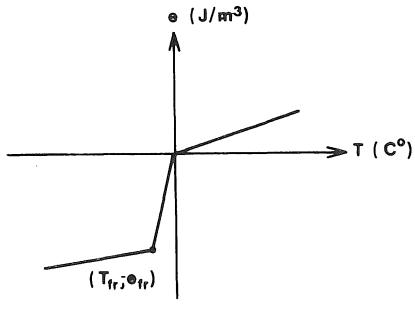
Vid givet tryck fryser rent vatten vid en väldefinierad temperaturnivå, fryspunkten. När vatten i till exempel en fuktig jord fryser sker fasomvandlingen emellertid inom ett temperaturintervall. Skälet till detta är att vattnet på olika sätt är bundet till det fasta materialet. Man har en termodynamisk balans mellan vattnets olika tillståndsformer. Balanspunkten ändras bland annat med temperaturen. Över en viss temperatur finns inga iskristaller. Under denna temperaturnivå ökar andelen is med sjunkande temperatur.

12.3.1 En cells värmeinnehåll

Hela frysprocessen förutsätts ske i intervallet $T_{fr} \leq T \leq 0$. Om frysvärmet för ett material är e_{fr} (J/m^3) kan man definiera en konstant volymetrisk värmekapacitet $-e_{fr}/T_{fr}$ inom frysintervallet. Materialets volymetriska värmekapacitet (J/m^{3}K) ges då av:

$$C(T) = \begin{cases} C_{fr} & T < T_{fr} \\ \frac{-e_{fr}}{T_{fr}} & T_{fr} \leq T \leq 0 \\ C & T > 0 \end{cases} \tag{12.3.1}$$

I analogi med (12.2.4) kan man då approximativt beskriva materialets värmeinnehåll per volymsenhet som en sträckvis linjär funktion av temperaturen. Figur 12.3.1 visar ett exempel på detta.



Figur 12.3.1. Representation av värmeinnehåll per volymsenhet för ett material i vilket frysning kan inträffa.

12.3.2 Värmeflöde genom en cellrand

Det momentana värmeflödet $Q_{1-1/2}$ (W) mellan två celler $i-1$ och i kan enligt (4.3.2) skrivas:

$$Q_{i-1/2} = K_{i-1/2}(T_{i-1} - T_i) \tag{12.3.2}$$

I avsnitt 4.3 definieras konduktansen $K_{i-1/2}$ för olika geometrier. Uttrycken grundas på en stationär approximation av temperaturfördelningen mellan de två cellernas mittpunkter och på att värmeledningsförmågan är temperaturoberoende.

Vid temperaturberoende värmeledningsförmåga kan man definiera en ekvivalent värmeledningsförmåga λ_{ekv} för området mellan två cellers temperaturpunkter. Ekvation (2.3.37) uttrycker λ_{ekv} vid plan geometri:

$$\lambda_{ekv} = \frac{1}{T_i - T_{i-1}} \int_{T_{i-1}}^{T_i} \lambda(T)dT \tag{12.3.3}$$

Med hjälp av λ_{ekv} kan momentana värden för konduktansen $K_{i-1/2}$ bestämmas för varje cellrand i beräkningsområdet.

I många tillämpningar kan värmeledningsförmågan approximativt beskrivas med ett värde för ofryst och ett värde för fryst material. Frysning antas ske inom ett temperaturintervall $T_{fr} \leq T \leq 0$. Approximativt kan värmeledningsförmågan inom intervallet beskrivas med en linjär funktion. En enkel beskrivning ges av:

$$\lambda(T) = \begin{cases} \lambda_{fr} & T < T_{fr} \\ \lambda_{of} + \frac{T}{T_{fr}}(\lambda_{fr} - \lambda_{of}) & T_{fr} \leq T \leq 0 \\ \lambda_{of} & T > 0 \end{cases} \tag{12.3.4}$$

Värmeledningsförmågan λ_{ekv} mellan två celler kan då med hjälp av (12.3.3) anges för några olika fall av celltemperaturer.

Fall 1: $T_{fr} \leq T_{i-1} \leq T_i \leq 0$

$$\lambda_{ekv} = \lambda + \frac{T_{i-1} + T_i}{2} \cdot \frac{\lambda_{fr} - \lambda}{T_{fr}} = \frac{\lambda(T_{i-1}) + \lambda(T_i)}{2} \tag{12.3.5}$$

I detta fall är λ_{ekv} ett medelvärde mellan den aktuella värmeledningsförmågan i de två cellernas temperaturpunkter.

Fall 2: $T_{i-1} < T_{fr}$ och $T_{fr} \leq T_i \leq 0$

$$\lambda_{ekv} = \frac{(T_{fr} - T_{i-1})\lambda_{fr} + (T_i - T_{fr})\frac{\lambda_{fr}+\lambda(T_i)}{2}}{T_i - T_{i-1}} \tag{12.3.6}$$

Fall 3: $T_{i-1} < T_{fr}$ och $T_i > 0$

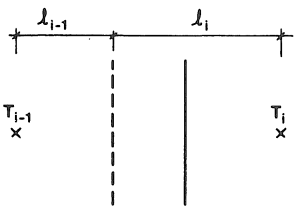
$$\lambda_{ekv} = \frac{(T_{fr} - T_{i-1})\lambda_{fr} - T_{fr}\frac{\lambda_{fr}+\lambda}{2} + T_i\lambda}{T_i - T_{i-1}} \tag{12.3.7}$$

Fall 4: $T_{fr} \leq T_{i-1} \leq 0$ och $T_i > 0$

$$\lambda_{ekv} = \frac{-T_{i-1}\frac{\lambda+\lambda(T_{i-1})}{2} + T_i\lambda}{T_i - T_{i-1}} \tag{12.3.8}$$

Formlerna (12.3.5-8) bestämmer λ_{ekv} för alla möjliga kombinationer av temperaturer i två närliggande celler när λ varierar längs linjen mellan de två cellernas mittpunkter.

Om frysintervallet är litet, dvs absolutvärdet av T_{fr} är litet, kan man tala om en frysfront vilken under ett frysförlopp förflyttas genom materialet. För endimensionella förhållanden visar figur 12.3.2 ett exempel i vilket fronten har försumbar tjocklek.



Figur 12.3.2. Frysfront i en endimensionell gitterstruktur.

I ett givet ögonblick befinner sig frysfronten på avstånden ℓ_{i-1} och ℓ_i från temperaturpunkterna $i-1$ respektive i. Vid frysfronten är temperaturen approximativt 0 °C. Om frysfronten befinner sig i cell $i-1$ ges det momentana värmeflödet (W/m^2) genom den gemensamma cellranden av:

$$q_{i-1/2} = \frac{0 - T_i}{\ell_i}\lambda \tag{12.3.9}$$

Om fronten ligger i cell i ges värmeflödet (W/m^2) genom cellranden av:

$$q_{i-1/2} = \frac{T_{i-1} - 0}{\ell_{i-1}}\lambda_{fr} \tag{12.3.10}$$

Med denna metod att beräkna värmeflödet mellan angränsande celler erhålls enklare uttryck än (12.3.5-8). Metoden innebär emellertid en noggrannare beskrivning av

temperaturfördelningen inom den enskilda cellen än vad lösningsmetoden i andra fall inneburit (se kapitel 4). I två- och tredimensionella områden blir den geometriska beskrivningen av frysfrontens läge dessutom avsevärt besvärligare än för endimensionella fall.

Vid bestämning av momentant värde för konduktansen $K_{i-1/2}$ har följande enkla och beräkningsmässigt snabba metod valts vid jämförelserna mellan numerisk och analytisk lösning i avsnitt 12.4.

Vid början av ett tidssteg är det volumetriska värmeinnehållet $e(T)$ (J/m^3) enligt figur 12.3.1 känt för de två cellerna $i-1$ och i. Med hjälp av medelvärdet $e_{mv} = (e(T_{i-1,n}) + e(T_{i,n}))/2$ bestäms konduktansen mellan cellerna ur följande samband:

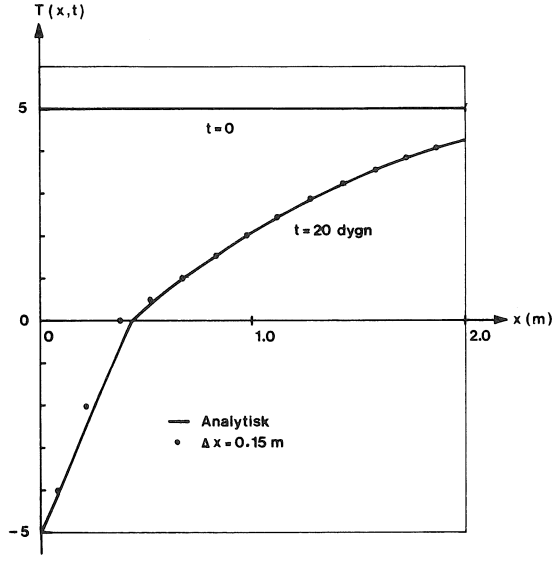
$$K_{i-1/2} = \begin{cases} K_{fr} & e_{mv} < -e_{fr} \\ K + \frac{e_{mv}}{-e_{fr}}(K_{fr} - K) & -e_{fr} \leq e_{mv} \leq 0 \\ K & e_{mv} > 0 \end{cases} \tag{12.3.11}$$

I funktionen (12.3.11) är K och K_{fr} konduktansen mellan cellerna för ofryst respektive fryst material. Eftersom e_{mv} är en funktion av båda cellernas momentana värmeinnehåll medför sambandet (12.3.11) att viss hänsyn tas till frysfrontens aktuella placering inom beräkningsområdet. Om till exempel cellerna $i-2$ och $i-1$ är ofrysta medan cell i är fryst så kommer endast värmeflödet mellan cellerna $i-1$ och i att påverkas av frysfronten.

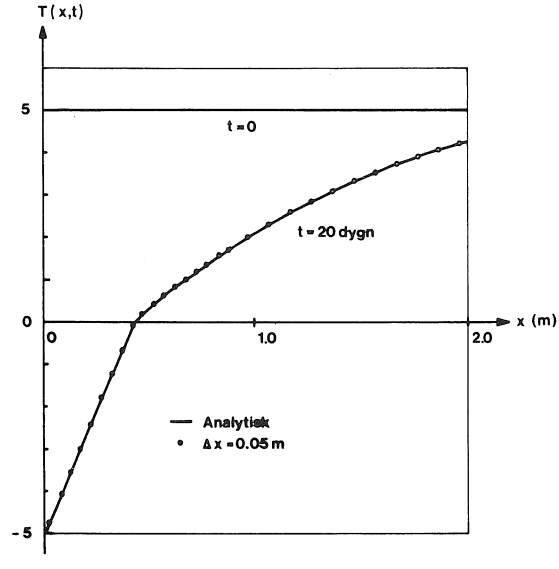
12.4 Jämförelse mellan analytisk och numerisk lösning

En jämförelse har utförts för följande plana halvoändliga fall. Värmeledningsförmågan är 1.05 och 1.40 W/mK för ofruset respektive fruset material. Den volymetriska värmekapaciteten är $2.34 \cdot 10^6$ och $1.76 \cdot 10^6$ J/m^{3}K för ofruset respektive fruset material. Smältvärmet är 93.2 $\cdot 10^6$ J/m^3. Frysning sker i den analytiska lösningen vid 0 °C och i den numeriska modellen i temperaturintervallet $-0.001 \leq T \leq 0.0$ °C. Starttemperaturen i det betraktade området är 5 °C och randtemperaturen är konstant -5 °C. Den analytiska lösningen ges i [*Carslaw, Jaeger, kap XI*].

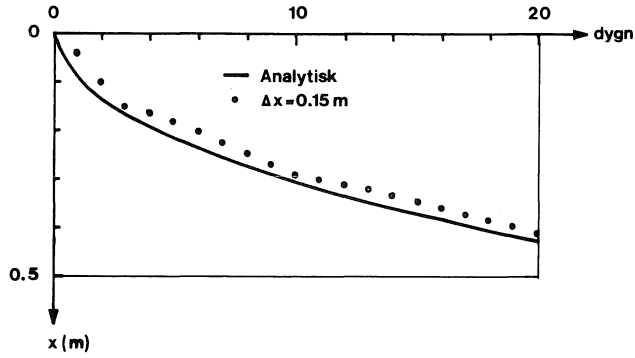
Figurerna 12.4.1-2 visar temperaturfördelningen i området efter 20 dygn vid två olika cellstrukturer. Med den fina cellstrukturen är avvikelsen mellan numerisk och analytisk lösning mycket liten. För den grövre cellstrukturen är felet störst ($\approx$ 0.5 °C) vid frysfronten. Felets storlek avtar med avståndet från frysfronten.



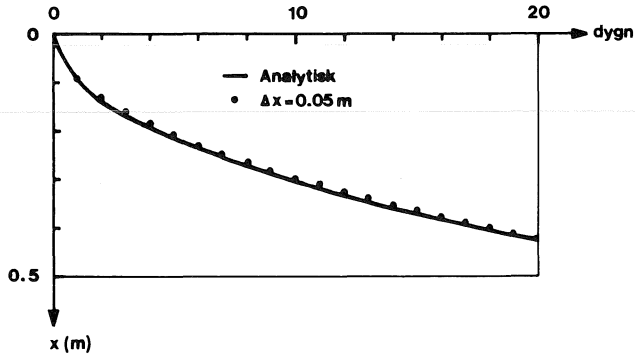
Figur 12.4.1. Temperaturfördelning med $\Delta x = 0.15$ m [*Johansson, Westman*].



Figur 12.4.2. Temperaturfördelning med $\Delta x = 0.05$ m [*Johansson, Westman*].



Figur 12.4.3. Frysfrontens läge med $\Delta x = 0.15$ m [*Johansson, Westman*].



Figur 12.4.4. Frysfrontens läge med $\Delta x = 0.05$ m [*Johansson, Westman*].

Figurerna 12.4.3-4 visar frysfrontens läge som funktion av tiden för de två cellstrukturerna. För den fina cellstrukturen är avvikelsen ≤ 0.01 m. För den grövre cellstrukturen är avvikelsen från den analytiska lösningen ≤ 0.04 m. Felet är störst i början av simuleringen. Man får ett fel vars storlek varierar periodiskt. Felets variation beror på den fysikaliska beskrivningen av frysförloppet i den numeriska modellen.

Eftersom, i den numeriska modellen, frysning inte äger rum förrän hela den första cellens temperatur sjunkit till frysintervallet kommer det "numeriska frysförloppet" att

bli förskjutet i tiden. Man får en avvikelse mellan numerisk och analytisk lösning, som till en början ökar med tiden. När frysning i den första cellen inträffar kommer konduktansen mellan cell 1 och cell 2 att påverkas och få större värden än vad som vore "analytiskt korrekt". Detta betyder att cell 2 kommer att "tappa" värme till cell 1 snabbare än vad som sker i motsvarande område enligt den analytiska beskrivningen. Frysfronten kommer därför att flytta sig snabbare i den numeriska beskrivningen och avvikelsen mellan numerisk och analytisk lösning minskar under en tidsperiod. Felet kommer därefter åter att öka eftersom frysfronten inte kan komma in i cell 2 förrän hela cell 2 har blivit nedkyld till frysintervallet osv. Resultatet blir en periodisk variation i avvikelsen. Det minsta felet i den beräknade frysfrontens läge inträffar i närheten av positionerna $n\Delta x$, alltså vid de tidpunkter när hela celler blivit frysta [*Johansson, Westman*].

12.5 Introduktion av temperaturskalan $T_\lambda(T)$

Ett problem vid numerisk lösning av värmeledningsekvationen med temperaturberoende värmeledningsförmåga är bestämningen av konduktansen mellan två temperaturpunkter när dessa har olika temperatur. En interpollering måste utföras för varje konduktans. Inför varje tidssteg måste nya värden beräknas för konduktanserna mellan temperaturpunkterna. Se avsnitt 4.2.2.

En metod att helt undvika detta problem är att introducera en ny temperaturskala $T_\lambda(T)$ [*Carslaw, Jaeger, 1.6*] enligt:

$$T_\lambda(T) = \frac{1}{\lambda_r}\int_{T_r}^{T} \lambda(T')dT' \tag{12.5.1}$$

Funktionen definierar en ny temperaturskala som är beroende av värmeledningsförmågan $\lambda(T)$ för det aktuella materialet. Referensvärdena λ_r och T_r kan väljas godtyckligt. I det följande väljs $T_r = 0$ °C. Man har:

$$T_\lambda(T_r) = 0 \tag{12.5.2}$$

Vid konstant värmeledningsförmåga, $\lambda(T) = \lambda_r$, erhålls:

$$T_\lambda(T) = T \tag{12.5.3}$$

Derivering av (12.5.1) ger:

$$\frac{dT_\lambda}{dT} = \frac{\lambda(T)}{\lambda_r} \tag{12.5.4}$$

För värmeflödet gäller då:

$$\vec{q} = -\lambda(T)\nabla T = -\lambda_r \nabla T_\lambda \tag{12.5.5}$$

Värmeledningsekvationen är:

$$-\nabla \cdot \vec{q} = \nabla \cdot (\lambda(T)\nabla T) = C(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial t} \qquad \frac{de}{dT} = C(T) \tag{12.5.6}$$

Insättning av (12.5.5) ger grundekvationen i T_λ:

$$\lambda_r \nabla \cdot \nabla T_\lambda = \frac{\partial e}{\partial t} \tag{12.5.7}$$

Det volumetriska energiinnehållet e betraktas som en funktion av T_λ. Högerledet kan då omformas:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{de}{dT} \cdot \frac{dT}{dT_\lambda} \cdot \frac{\partial T_\lambda}{\partial t} = C(T) \cdot \frac{\lambda_r}{\lambda(T)} \cdot \frac{\partial T_\lambda}{\partial t} \tag{12.5.8}$$

Ekvationen i T_λ blir:

$$\nabla \cdot (\lambda_r \nabla T_\lambda) = \frac{\lambda_r C}{\lambda} \cdot \frac{\partial T_\lambda}{\partial t} \tag{12.5.9}$$

Detta är värmeledningsekvationen i T_λ med variabel värmekapacitet $\lambda_r C(T_\lambda)/\lambda(T_\lambda)$. Den erhållna ekvationen kan jämföras med ekvation (3.3.7). Vinsten med omformuleringen är att värmeledningsförmågan blir konstant λ_r inom hela beräkningsområdet.

Metoden används även vid beräkning av fuktförlopp. De i fuktekvationen ingående koefficienterna uppvisar kraftigare temperaturberoende än koefficienterna i värmeledningsekvationen [*Arfvidsson, Claesson*].

12.5.1 Numerisk hantering av T_λ–ekvationen

Man erhåller i analogi med (4.2.1) följande diskreta formulering för energiinehållet $E(T_\lambda)$ (J) i en cell i vid tidpunkten $n+1$ när energiinnehållet är känt vid tidpunkten n:

$$E(T_{\lambda,i,n+1}) = E(T_{\lambda,i,n}) + \left(\sum_m Q_{rand,m,n}\right)\Delta t \tag{12.5.10}$$

Med kännedom om funktionen $E(T_\lambda)$ kan nytt värde för T_λ efter tidssteget bestämmas. Temperaturprocessen följs i storheten T_λ. Den verkliga temperaturen kan vid önskad tidpunkt erhållas ur funktionen $T = T(T_\lambda)$, vilken är inversen till den i (12.5.1) definierade temperaturskalan.

Hanteringen av den nya ekvationen skall visas för några grundläggande fall av temperaturberoende termiska data. Värmeflödena beräknas enligt ovan som om värmeledningsförmågan har det konstanta värdet λ_r.

Fall 1.

Frysning sker vid temperaturen 0 °C. Smältvärmet är e_{fr} (J/m^3). Termiska data ges av:

$$\lambda(T) = \begin{cases} \lambda_+ & T > 0 \\ \lambda_- & T < 0 \end{cases} \tag{12.5.11}$$

$$C(T) = \begin{cases} C_+ & T > 0 \\ C_- & T < 0 \end{cases} \tag{12.5.12}$$

Referensvärmeledningsförmågan väljs till $\lambda_r = \lambda_+$. Referenstemperaturen väljs till $T_r = 0$. Följande samband erhålls:

$$T_\lambda = \begin{cases} T & T > 0 \\ \frac{\lambda_-}{\lambda_+} T & T < 0 \end{cases} \tag{12.5.13}$$

Den inversa funktionen ges av:

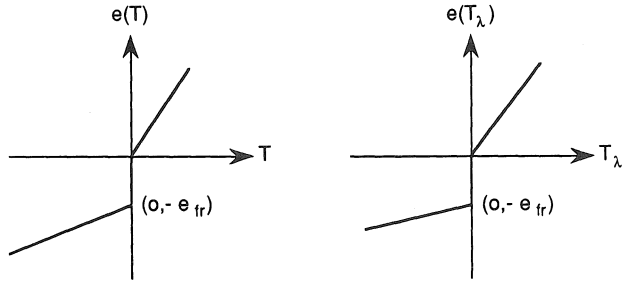
$$T = \begin{cases} T_\lambda & T_\lambda > 0 \\ \frac{\lambda_+}{\lambda_-} T_\lambda & T_\lambda < 0 \end{cases} \tag{12.5.14}$$

Energifunktionerna $e(T)$ och $e(T_\lambda)$ ges av:

$$e(T) = \begin{cases} C_+ T & T > 0 \\ -e_{fr} + C_- T & T < 0 \end{cases} \tag{12.5.15}$$

$$e(T_\lambda) = \begin{cases} C_+ T_\lambda & T_\lambda > 0 \\ -e_{fr} + C_- \frac{\lambda_+}{\lambda_-} T_\lambda & T_\lambda < 0 \end{cases} \tag{12.5.16}$$

Här är $e(+0) - e(-0) = e_{fr}$. Se figur 12.5.1.



Figur 12.5.1. Energifunktionerna $e(T)$ och $e(T_\lambda)$ för fall 1.

Fall 2.

Frysningen sker inom intervallet $T_{fr} < T < 0$. Termiska data definieras i Fall 1. Referensvärmeledningsförmågan väljs till $\lambda_r = \lambda_+$. Referenstemperaturen väljs till $T_r = 0$. Följande samband erhålls:

$$T_\lambda = \begin{cases} T & T > 0 \\ \frac{\lambda_-}{\lambda_+} T & T < 0 \end{cases} \tag{12.5.17}$$

Den inversa funktionen ges av:

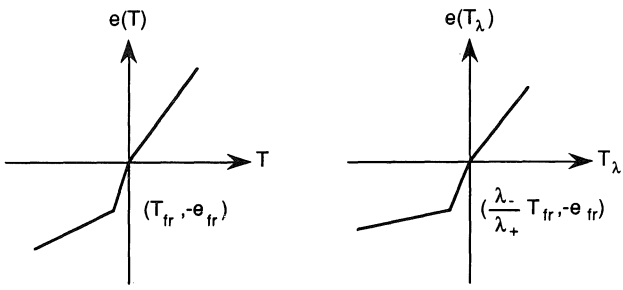
$$T = \begin{cases} T_\lambda & T_\lambda > 0 \\ \frac{\lambda_+}{\lambda_-} T_\lambda & T_\lambda < 0 \end{cases} \tag{12.5.18}$$

Energifunktionerna $e(T)$ och $e(T_\lambda)$ ges av:

$$e(T) = \begin{cases} C_+ T & T > 0 \\ \frac{-e_{fr}}{T_{fr}} T & T_{fr} \leq T \leq 0 \\ -e_{fr} + C_-(T - T_{fr}) & T < T_{fr} \end{cases} \tag{12.5.19}$$

$$e(T_\lambda) = \begin{cases} C_+ T_\lambda & T_\lambda > 0 \\ \frac{-e_{fr}}{T_{fr}} \frac{\lambda_+}{\lambda_-} T_\lambda & \frac{\lambda_-}{\lambda_+} T_{fr} \leq T_\lambda \leq 0 \\ -e_{fr} + C_- \left(\frac{\lambda_+}{\lambda_-} T_\lambda - T_{fr} \right) & T_\lambda < \frac{\lambda_-}{\lambda_+} T_{fr} \end{cases} \tag{12.5.20}$$

Se figur 12.5.2.



Figur 12.5.2. Energifunktionerna $e(T)$ och $e(T_\lambda)$ för fall 2.

Fall 3.

I detta fall varierar termiska data linjärt som funktion av temperaturen. Detta ger möjlighet att beskriva en godtycklig funktion som en sträckvis linjär funktion i ett antal temperaturintervall. Här betraktas för enkelhets skull ett enda temperaturintervall $T_j \leq T < T_{j+1}$.

Termiska data ges av:

$$\left.\begin{aligned} \lambda(T) &= \lambda_0 + k_\lambda T \\ C(T) &= C_0 + k_C T \end{aligned}\right\} \qquad T_j \leq T \leq T_{j+1} \tag{12.5.21}$$

Referensvärmeledningsförmågan väljs till $\lambda_r = \lambda_0$. Referenstemperaturen väljs till $T_r = 0$. Följande samband erhålls:

$$T_\lambda(T) = \frac{1}{\lambda_0}\left(\lambda_0 T + \frac{k_\lambda T^2}{2}\right) \qquad T_j \leq T \leq T_{j+1} \tag{12.5.22}$$

Den inversa funktionen ges av:

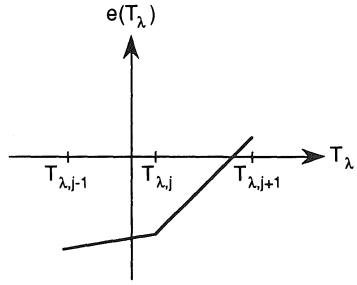
$$T(T_\lambda) = \frac{-\lambda_0 \pm \sqrt{\lambda_0^2 + 2\lambda_0 k_\lambda T_\lambda}}{2} \tag{12.5.23}$$

Tecknet väljs så att lösningen T ligger i rätt intervall $T_j \leq T \leq T_{j+1}$. Energifunktionerna ges av:

$$e(T) = C_o \cdot T + \frac{k_C}{2}T^2 \qquad T_j \leq T \leq T_{j+1} \tag{12.5.24}$$

$$e(T_\lambda) = C_0 \cdot T(T_\lambda) + \frac{k_C}{2}(T(T_\lambda))^2 \qquad T_\lambda(T_j) \leq T_\lambda \leq T_\lambda(T_{j+1}) \tag{12.5.25}$$

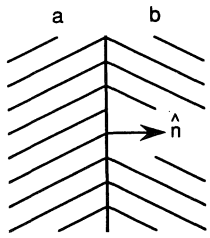
Se figur 12.5.3.



Figur 12.5.3. Energifunktionen $e(T_\lambda)$ för fall 3.

12.5.2 Diskontinuitet i randen mellan två olika material

Betrakta randen mellan två områden a och b i vilka värmeledningsförmågan är $\lambda_a(T)$ respektive $\lambda_b(T)$. Se figur 12.5.4.



Figur 12.5.4. Rand mellan två material.

Vid den gemensamma randen skall såväl temperatur som värmeflöde, vinkelrätt mot randen, vara kontinuerliga. Man har vid randen:

$$T^a|_r = T^b|_r \tag{12.5.26}$$

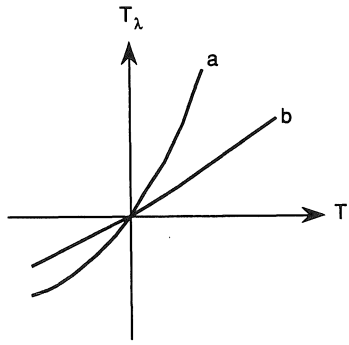
$$\lambda_a \left.\frac{\partial T^a}{\partial n}\right|_r = \lambda_b \left.\frac{\partial T^b}{\partial n}\right|_r \tag{12.5.27}$$

Enligt (12.5.1) är T_λ-värdet i en punkt en funktion av värmeledningsförmågan $\lambda(T)$ i punkten. Randvillkoret för värmeflödet enligt ovan motsvaras i T_λ-representationen av:

$$\left.\frac{\partial T_\lambda^a}{\partial n}\right|_r = \left.\frac{\partial T_\lambda^b}{\partial n}\right|_r \tag{12.5.28}$$

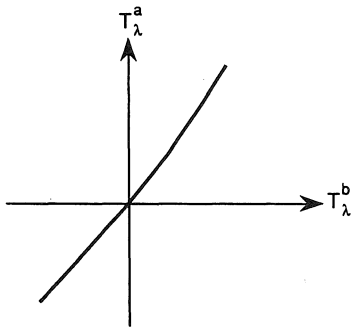
I T_λ-representationen erhålls en diskontinuitet i randen på grund av de olika värmeledningsförmågorna i område a och b. Temperaturen i randen motsvaras i T_λ-representationen av:

$$T_{rand} = T^a(T_\lambda^a|_r) = T^b(T_\lambda^b|_r) \tag{12.5.29}$$



Figur 12.5.5. $T_\lambda(T)$ i två olika material a och b.

I figur 12.5.5 visas T_λ som funktion av temperaturen T för de två områdena. Mot varje givet T svarar ett bestämt värdepar T_λ^a och T_λ^b. I figuren definieras för ett givet värde på T_λ^a ett bestämt värde på T_λ^b. Ett exempel på ett sådant samband visas i figur 12.5.6.



Figur 12.5.6. Funktion som visar vilka par av T_λ^a och T_λ^b som svarar mot samma temperatur.

Enligt formel (12.5.28) skall, i T_λ-representationen, normalderivatan mot randen ha samma värde i de två områdena. Detta bestämmer vilket av de i figur (12.5.6) definierade talparen T_λ^a och T_λ^b som skall väljas. Detta talpar definierar randtemperaturen mellan de två områdena.

Ett exempel skall ges på bestämning av T_λ i randen mellan två olika material.

Värmeledningsförmågan i de två materialen är:

$$\lambda_a(T) = \begin{cases} \lambda_+^a & T > 0 \\ \lambda_-^a & T < 0 \end{cases} \tag{12.5.30}$$

$$\lambda_b(T) = \begin{cases} \lambda_+^b & T > 0 \\ \lambda_-^b & T < 0 \end{cases} \tag{12.5.31}$$

För randtemperaturen T_{rand} gäller enligt (12.5.11-14):

$$\begin{cases} T_{rand} > 0 \implies \frac{\lambda_r}{\lambda_+^a} T_\lambda^a = \frac{\lambda_r}{\lambda_+^b} T_\lambda^b \implies T_\lambda^b = \frac{\lambda_+^b}{\lambda_+^a} T_\lambda^a \\ T_{rand} < 0 \implies \frac{\lambda_r}{\lambda_-^a} T_\lambda^a = \frac{\lambda_r}{\lambda_-^b} T_\lambda^b \implies T_\lambda^b = \frac{\lambda_-^b}{\lambda_-^a} T_\lambda^a \end{cases} \tag{12.5.32}$$

Ett andra samband mellan T_λ^a och T_λ^b erhålls från den numeriska formuleringen av normalderivatan av T_λ . I båda områdena är T_λ kända i temperaturpunkterna i cellerna närmast randen. Därmed är randvärdena för T_λ definierade i de båda områdena.

12.6 Tillämpningar

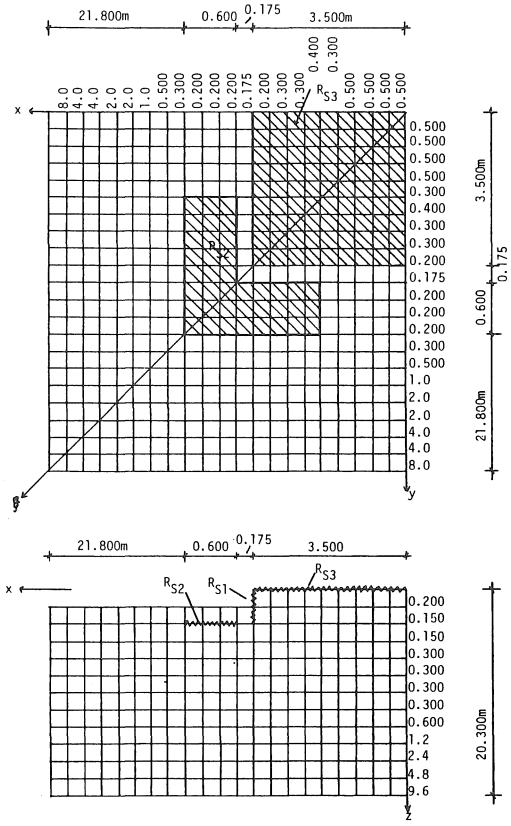
I de följande avsnitten redovisas behandlingen av några olika problemställningar gällande temperaturberoende termiska egenskaper i samband med att mark fryser.

12.6.1 Tjälnedträngning i mark runt hus

Under första halvan av 1970-talet utfördes ett stort antal beräkningar gällande temperatur- och tjälförhållanden i mark runt hus. Syftet var att till Svensk Byggnorm bestämma nya regler för grundläggningsdjupet för några olika typer av grundkonstruktioner [*Adamson et al., 1971*] och [*Adamson et al., 1973*].

I de datorprogram som användes vid detta beräkningsarbete [*Claesson, 1968*] och [*Eftring, 1971*] beskrivs frysningsprocessen analogt med beskrivningen i avsnitt 12.3. Förutom analytiska tester gjordes jämförelser med mätningar vid ett hus, som byggdes i Skjetten i Norge. Vid jämförelserna användes uppmätta temperaturer under ett hörn, vilket hållits snöfritt under den period som användes för beräkningen.

Som lufttemperaturer användes uppmätta värden. Utanför hörnet låg en horisontell markisolering på djupet 0.15 m. Dess värmemotstånd var 0.86 K/(W/m^2). Termiska data för marken uppskattades efter mätningar av jordens densitet och fuktighet. Värden för värmeledningsförmåga var 1.60 (ofruset) och 2.00 (fruset) W/mK, för värmekapacitet $3.2 \cdot 10^6$ (ofruset) och $2.4 \cdot 10^6$ (fruset) J/m^{3}K samt för smältvärme $143 \cdot 10^6$ J/m^3.



Figur 12.6.1. Cellindelning vid 3-dimensionell beräkning av tjäle vid ett hörn [*Adamson et al., 1973*].

Använd cellindelning framgår av figur 12.6.1. Observera att cellerna har olika mått trots att de ritats lika stora.

Under den betraktade perioden (oktober 1971 till april 1971) varierade inomhustemperaturen så att den lägsta registrerade temperaturen var 12 °C. Beräkningar genomfördes för två fall med den konstanta innetemperaturen 16 repektive 20 °C.

Beräkningsområdets linjära storlek är cirka 5 gånger större än husets mått. I avsnitt 6.4 rekommenderas förhållandet 10. I det betraktade fallet ligger det intressanta området nära husets ränder varför betydelsen av de yttre ränderna minskar jämfört med situationen i 6.4. Området är avpassat för periodisk beräkning av årsförlopp. Vid en transient beräkning som omfattar 6 månader kan området göras mindre. Se även avsnitt 7.4.

Formel (6.3.2) föreslår att cellstorleken i vertikalled med start från markytan skall vara $\leq 0.2d_o = 0.44$ m för att en årsvariation skall beskrivas med den angivna precisio-

nen. Värdet har erhållits med termiska data för ofrusen mark. Fryst mark ger större celldimensioner. Cellstorlekarna uppfyller kravet och har anpassats till det aktuella problemets geometri. I horisontalled beskrivs huset med 9 celler, vilket överensstämmer med avsnitt 6.4. Det hade kanske varit önskvärt med en finare cellindelning vid hörnet, men datorkraft var dyrbar i början av 70-talet. Den intressanta tidpunkten vid beräkningen inträffar när -1 °C -isotermen har sitt största inträngningsdjup under husgrunden. Temperaturfördelningen vid denna tidpunkt är kvasistationär i det intressanta området i närheten av frysfronten. Gittercellernas storlek blir då inte lika kritisk för frysningsförloppet.

Den maximala avvikelsen mellan de två beräkningarna och den mätta temperaturen i en punkt 30 cm under isoleringens inre kant vid hörnet var 0.7 °C. Medelavvikelsen under det simulerade halvåret var 0.2 °C mellan mätta värden och de som beräknats med temperaturen 16 °C i huset.

12.6.2 Frysning runt rör i mark

Värmepumpar kan använda slangar och rör i mark som värmekälla. När värme utvinns ur den cirkulerande värmebärarfluiden sjunker fluidtemperaturen och man får ett värmeflöde till slangen/röret. Vid tillräckligt låg temperatur på fluiden sker en frysning i marken runt röret. Om inte de ostörda förhållandena i marken är mycket osymmetriska kan det frysta området med rimlig precision beskrivas som rotationssymmetriskt. Då frysningen gör superponering omöjlig i området utanför röret kan det snabba förloppet i närheten av röret inte ges en egen lokal beskrivning. Gittersystemet i marken måste därför anpassas till den tidsskala man önskar studera beträffande värmeutvinningen. Detta kan innebära cellstorlekar i storleksordningen centimeter-decimeter i stället för meter.

Den globala temperaturprocessen i ett vertikalt tvärsnitt i marken vinkelrätt mot röret beskrivs i ett Cartesiskt tvådimensionellt gitter. Röret placeras på cellranden mellan två cellers temperaturpunkter. Temperaturfördelningen i området mellan de två temperaturpunkterna är approximativt stationär. Temperaturfördelningen runt röret kan i överensstämmelse med detta beskrivas som stationär och rotationssymmetrisk. Detta kan användas vid bestämning av värmeflödet mellan fluid och mark.

I den globala beskrivningen belastas var och en av de två omgivande cellerna med halva värmeuttaget. Hänsyn till frysning tas enligt avsnitt 12.3. Det tvådimensionella gittret beskriver temperaturutbredningen i marken. Temperaturen i en cell är ett mått på dess värmeinnehåll. Man kan då vid varje tidpunkt bestämma hur stor den frysta delen av en cell är. I de två betraktade cellerna runt röret har det frysta området formen av en halvcirkel. Vid bestämningen av den lokala omgivningstemperaturen för röret har man två fall.

Låt radien för det frysta området vara r_f. I det första fallet gäller $0 < r_f < \Delta x/2$, där $\Delta x/2$ är halva cellstorleken (avståndet mellan rörets centrum och de omgivande cellernas temperaturpunkter). På avståndet r_f från rörets centrum ges omgivningstemperaturen av den temperatur vid vilken marken fryser. Om randen mellan cellerna inte utgör ett symmetriplan kan medelvärdet av r_f för de två cellerna användas.

Det andra fallet inträffar om frysning inte föreligger eller om r_f är större än halva cellstorleken. Då är värmeledningsförmågan konstant mellan röret och de intilliggande temperaturpunkterna. Med antagen cylindersymmetrisk temperaturfördelning runt röret ges omgivningstemperaturen av medelvärdet av de två cellernas temperaturer.

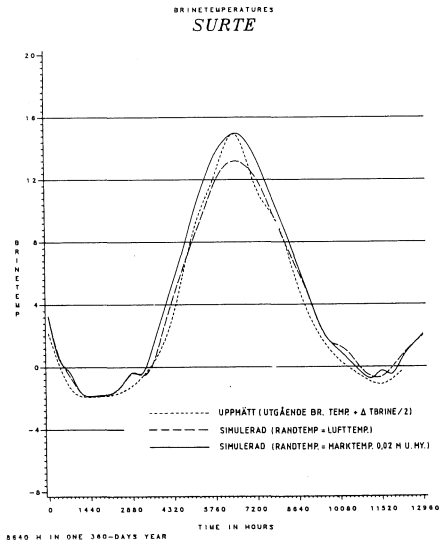
Värmemotståndet mellan fluiden och marken bestäms som summan av motstånden för de skikt som finns mellan fluiden och den koncentriska yta där temperaturen enligt ovan är känd (avsnitt 2.3.2). Därmed är ett samband givet mellan värmeuttag och fluidtemperatur [*Johansson, Westman*].

Jämförelse med mätningar

Det beskrivna betraktelsesättet har kommit till användning i ett projektarbete vid Chalmers Tekniska Högskola [*Rehn et al., 1986*]. Ett beräkningsprogram, utvecklat enligt beskrivna principer, har vid CTH anpassats till att täcka inom projektet aktuella fall.

Indata till modellen är lufttemperatur, snödjup och värmeuttag (samtliga storheter tidsberoende) samt termiska markdata och slangdata. Snötäcket representeras av ett tidsberoende värmemotstånd vid markytan. Modellen inkluderar inte solstrålning. Tidsberoende data ges som 10-dagars medelvärden. Datormodellen beskrev ett 2-dimensionellt tvärsnitt vinkelrätt mot slangarna/rören.

Ett fall som skulle beräknas gällde ett antal enfamiljshus i Surte. Husen värmdes med hjälp av värmepump. Till varje hus togs värme från 300 m slang som var nedgrävd på djupet 0.75 m. Det horisontella avståndet mellan slingorna var 1.5 m. Uppmätta värden på lufttemperatur, energiuttag, snödjup samt termiska egenskaper för leran användes vid simuleringen. Figur 12.6.2 visar mätta och beräknade värden på fluidtemperaturen under året.



Figur 12.6.2. Uppmätt (medelvärde under drift) och simulerad (medelvärde under drift och vila) köldbärartemperatur för en villavärmepump i Surte [*Rehn et al.*].

I den refererade rapporten anger författarna att den i figuren visade beräknade fluidtemperaturen skall sänkas med 1-1.5 °C jämfört med i figuren redovisad uppmätt fluidtemperatur. Korrigeringen skall göras eftersom värmepumpen drivs intermittent och mätningen är gjord under driftsintervallerna. Den mätta fluidtemperaturen representeras av utgående brinetemperatur ökad med halva temperaturfallet längs slangen.

Simuleringen har utförts för två fall där randdata vid markytan ges antingen av mätta lufttemperaturer eller av mätta temperaturer 2 cm under markytan. Den senare metoden användes för att kompensera modellens brist på hänsynstagande till effekten av solstrålning mot markytan. Användande av dessa jordtemperaturer som randtemperaturer vid markytan ger bättre överensstämmelse mellan mätning och beräkning under sommarmånaderna.

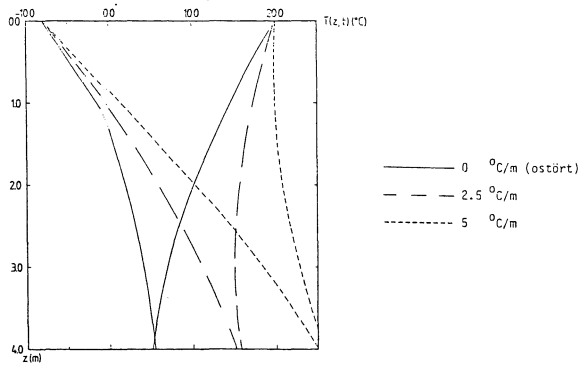
12.6.3 Djupa markvärmesystems påverkan på tjälningsprocessen nära markytan

Med djupa markvärmesystem avses system för värmelagring vilka ligger så djupt att de periodiska temperaturvariationerna i lagringsvolymen kan försummas nära markytan. Se avsnitt 6.3 och kapitel 11. I vissa typer av system kan temperaturen i den värmda volymen bli så hög att temperatur och tjälningsprocess påverkas i områden nära markytan. En undersökning av detta redovisas i [*Claesson, Eftring, 1982*].

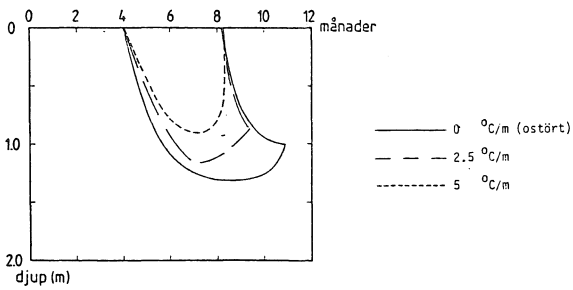
I undersökningen bestämdes den temperaturförändring som kommer från några olika typer av markvärmesystem under normala driftsförhållanden. Temperaturförändringen på djupet 1 m under markytan befanns ligga i intervallet 0-5 °C. Detta kan jämföras med den temperaturförändring som härrör från byggnader. För några byggnader av standardtyp befanns temperaturförändringen vara 2 °C (isolerad platta på mark) och 7 °C (oisolerad källare) på djupet 1 m och avståndet 1 m från byggnaden.

Bestämning av tjälningsprocessen innebär lösning av ett problem som omfattar frysprocessen. De termiska egenskaperna i problemet är temperaturberoende. Detta innebär att tillämpning av superpositionsprincipen för att dela upp totalproblemet i enklare delar inte är teoretiskt korrekt. Emellertid ligger markvärmesystemet enligt förutsättningen på så stort djup att periodiska variationer i lagringsvolym kan försummas inom tjälningsområdet nära markytan. Vidare påverkar den periodiska variationen inom tjälningsområdet endast försumbart marken på markvärmesystemets djup.

Markvärmesystemets påverkan på tjälningen kan då beskrivas med det i tiden nästan konstanta värmeflöde som markvärmesystemet åstadkommer nära markytan. Ett konstant värmeflöde från markvärmesystemet ger upphov till en konstant temperaturgradient i marken. Tjälningsprocessen i marken studerades som en endimensionell temperaturprocess där temperaturprofilen på stort djup hölls konstant. Tre fall studerades. Dessa omfattade temperaturgradienten 0 (ostörd mark), 2.5 och 5 °C/m. Därmed täcktes det störningsintervall som erhölls från de studerade markvärmesystemen.



Figur 12.6.3. Temperaturprofil i morän vid tre olika störningar.



Figur 12.6.4. Fryst område i morän som funktion av tiden.

Figur 12.6.3 ger vertikala temperaturprofiler i morän för de tre fallen. Temperaturerna visas vid tidpunkterna för högsta respektive lägsta lufttemperatur. Inom frysningsintervallet är profilerna dragna som räta linjer markerade med punkter. Temperaturerna gäller för insvängda förhållanden. Figuren visar hur årsvariationen dämpas med djupet. Vid djupet 4 m närmar sig temperaturprofilen de studerade störningarnas respektive gradient.

Figur 12.6.4 ger positionen av den frysta zonen som funktion av tiden under året. Det största tjäldjupet 1.3 m under ostörda förhållanden inträffar 2-3 månader efter lägsta lufttemperaturen. Ungefär samtidigt börjar tjälen smälta uppifrån. Knappt 5 månader efter lägsta lufttemperatur försvinner sista resten av tjälen på djupet 1 m. Största tjäldjupet vid störningsgradienten 2.5 och 5.0 °C/m är 1.2 respektive 0.9 m.

Vid den största störningen smälter isen underifrån så snabbt att någon tjälzon med ofryst mark ovanpå knappt hinner bildas.

Uppspaltningen av totalproblemet i delproblem medför vinsten att frysprocessen kan utelämnas ur markvärmeberäkningarna och att frysräkningen kan utföras som ett separat, endimensionellt problem.

Kapitel 13

VÄRMETRANSPORT I ETT VATTENFYLLT BERGRUM

Vattenfyllda bergrum kan användas för lagring av värme. I vissa typer av bergrum är inte allt uppsprängt berg borttransporterat. Man har en blandning av vatten och sprängsten i ett så kallat blockfyllt bergrum. Sprängstenen tar upp krafter från bergrumsväggarna vilket gör att lagerdimensionerna kan göras större. Detta reducerar de relativa värmeförlusterna. En nackdel är dock att värmekapaciteten för blandingen berg/vatten är mindre än för rent vatten.

Vid laddning av värme pumpas kallt vatten från botten av bergrummet. Temperaturen på vattnet höjs genom värmetillförsel från någon värmekälla (till exempel industriellt spillvärme eller solenergi). Det värmda vattnet återpumpas vid lagrets topp. Man får en front mellan varmt och kallt vatten, vilken under laddningsperioden förflyttas nedåt genom lagret. Under återvinningsperioden vänds förloppet och värme tas från vattnet i lagrets övre del. Det kylda vattnet återförs till lagrets botten. Resultatet blir en komplicerad värmetransportprocess omfattande såväl konvektion som konduktion i lagret. Denna termiska process står i kontakt med den konduktiva processen i den omgivande marken via värmeflödet genom bergrummets ytor mot berget. Genom att variera höjdläget för vattnets in- och utlopp kan systemets termiska funktion förfinas.

13.1 Konvektiv-diffusiv värmetransport i en fluid

I en strömmande fluid med hastigheten $\vec{v}$ består värmeflödet $\vec{q}$ (W/m^2) både av en konduktiv värmetransport och av den värmetransport som sker genom att fluidmassan förflyttas. Om energiinnehållet i fluiden definieras i förhållande till en referenstemperatur T_{ref} erhålls:

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T + C(T - T_{ref})\vec{v} \tag{13.1.1}$$

Differentialekvationen för den termiska processen i fluiden blir då i analogi med uttrycken (3.3.6-7):

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \nabla \cdot (C(T - T_{ref})\vec{v}) \tag{13.1.2}$$

Vid inkompressibel fluid ger masskonservation sambandet:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{13.1.3}$$

Strömningsmönstret blir av potentialtyp. Med konstant värmeledningsförmåga λ kan ekvation (13.1.2) då omformuleras till:

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T - C\nabla T \cdot \vec{v} \tag{13.1.4}$$

Division med C ger:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla T \cdot \vec{v} = a\nabla^2 T \tag{13.1.5}$$

För specialfallet att $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ är konstant kan (13.1.4) överföras till den vanliga värmeledningsekvationen genom ansatsen:

$$T(x, y, z, t) = f(x', y', z', t) \tag{13.1.6}$$

där
$$x' = x - v_x t$$
$$y' = y - v_y t$$
$$z' = z - v_z t$$

Man erhåller:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 f}{\partial (x')^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial (y')^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial (z')^2}\right) \tag{13.1.7}$$

Denna ekvation kan lösas som den vanliga värmeledningsekvationen men med de tidsberoende koordinaterna x', y' och z'. Dessa är koordinater i ett koordinatsystem som stelt rör sig med fluiden, varför fluidens hastighet i det nya koordinatsystemet blir noll. När temperaturfältet f är känt i en tidpunkt, ges det verkliga temperaturfältets position direkt av (13.1.6).

13.2 Konvektiv-diffusiv värmetransport i ett poröst material

Situationen blir mer komplicerad när man har ett flöde i ett poröst material. Det kan till exempel vara frågan om grundvattenströmning, vattenflöde genom ett blockfyllt bergrum eller luft som rör sig i isolermaterial. Eftersom endast en del av den betraktade materian rör sig måste situationen beskrivas med fler termer. Låt index f beteckna en egenskap för den rena fluiden. Fluidens värmekapacitet betecknas C_f (J/m^{3}K). Fluidens volymflöde betecknas $\vec{q}_f$ (m$_f^3$/m^{2}s). Sorten för $\vec{q}_f$ innebär kubikmeter fluid per sekund och kvadratmeter tvärsnittsarea i den betraktade volymen. Värmetransporten $\vec{q}$ (W/m^2) kan nu i analogi med (13.1.1) skrivas:

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T + C_f (T - T_{ref}) \vec{q}_f \tag{13.2.1}$$

Under förutsättning av konstant värmeledningsförmåga och inkompressibel fluid ($\nabla \cdot \vec{q}_f = 0$) erhålls i analogi med (13.1.2):

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T - C_f \nabla T \cdot \vec{q}_f \tag{13.2.2}$$

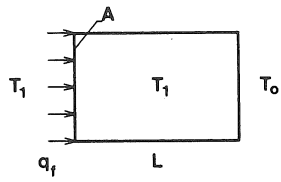
Man kan införa begreppet termisk hastighet $\vec{v}_T$ enligt:

$$\vec{v}_T = \frac{C_f \vec{q}_f}{C} \tag{13.2.3}$$

Ekvation (13.2.2) övergår till:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla T \cdot \vec{v}_T = a \nabla^2 T \tag{13.2.4}$$

Innebörden av begreppet termisk hastighet illustreras med hjälp av figur 13.2.1.



Figur 13.2.1. Strömning i poröst medium. Termisk hastighet.

En fluid med volymflödet $q_f(t)$ ($\mathrm{m}_f^3/\mathrm{m}^2\mathrm{s}$) passerar under rät vinkel en kontrollyta med arean A (m^2) i ett poröst medium. Vid tidpunkten t_0 är temperaturen T_0 nedströms och T_1 uppströms kontrollytan. Under tidssteget Δt passeras ytan konvektivt av energimängden (J):

$$Aq_f(t)C_f(T_1 - T_0)\Delta t \tag{13.2.5}$$

Man kan nedströms kontrollytan definiera en volym med tvärsnittsarean A och med längden L. Längden bestäms av att en temperaturhöjning från T_0 till T_1 av materian inom volymen skall motsvara precis den energimängd som ges av uttrycket (13.2.5).

$$CAL(T_1 - T_0) = Aq_f(t)C_f(T_1 - T_0)\Delta t \tag{13.2.6}$$

Man erhåller:

$$\frac{q_f(t)C_f}{C} = \frac{L}{\Delta t} = v_T \tag{13.2.7}$$

Den termiska hastigheten v_T är ett mått på hur snabbt temperaturfronten förflyttas i det porösa materialet. Vid givet volymflöde ökar den termiska hastigheten v_T med

avtagande värmekapacitet i materialet. Vid beskrivningen har effekter på grund av värmeledning mellan fluid och fast material försummats. Se avsnitt 13.3.

13.3 Termisk dispersion

Ett speciellt problem uppstår vid pumpning av vatten genom ett blockfyllt bergrum. Om vattnets temperatur avviker från stenblockens yttemperatur uppstår en konduktiv process mellan vatten och stenblock. Vid passagen av blocken ändras vattnets temperatur och en från början skarp temperaturfront kommer att spridas ut över en ökande sträcka i fluidens strömningsriktning.

Den kvantitativa effekten av denna process kan beskrivas med en ökad värmeledningsförmåga i bergrummet [*Claesson et al., Markvärme, 6.3.8*]. Den effektiva värmeledningsförmågan kan skrivas:

$$\lambda_{eff} = \lambda_{st} + \tilde{\lambda} \tag{13.3.1}$$

λ_{st} stagnant värmeledningsförmåga i lagret, gällande blandningen sten/vatten med stillastående vatten

$\tilde{\lambda}$ ökning på grund av dispersionseffekt

Ökningen av värmeledningsförmågan, $\tilde{\lambda}$, är vald så att man i den vertikala konduktiva processen i lagret erhåller en extra entropiproduktion som svarar mot den som sker internt i de enskilda stenblocken. Entropiproduktionen i ett stenblock kan beräknas analytiskt under givna antaganden om dess form och om randtemperaturens variation vid dess yta. För sfäriskt formade stenblock och linjärt ökande randtemperatur erhålls:

$$\tilde{\lambda} = \lambda_s n_s \left(\frac{v_T \cdot R_s}{a_s}\right)^2 \cdot \frac{1}{15} \tag{13.3.2}$$

λ_s värmeledningsförmåga för sten (W/mK)

n_s volymfraktion fast material i bergrummet. $0 < n_s < 1$

v_T termisk hastighet enligt formel (13.2.7) (m/s)

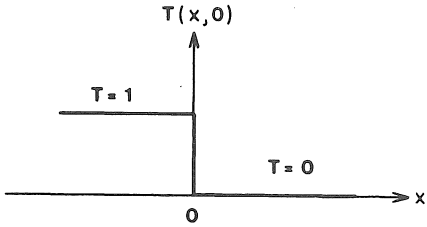
R_s stenblocksradie (m)

a_s temperaturledningstal för sten (m^2/s)

I formel (13.3.2) är faktorn 1/15 bestämd av den sfäriska formen. Man kan för parallellepipedformade stenblock definiera en motsvarande faktor $g(L_y/L_x, L_z/L_x)$, där blockets form definieras av kantlängderna L_x, L_y och L_z. För "normala situationer" blir värdet av $\tilde{\lambda}$ av storleksordningen 0.3 - 2.0 W/mK, vilket kan jämföras med värdena 0.65 och 3.5 W/mK för vatten respektive sten.

13.4 Numerisk dispersion

Betrakta följande endimensionella problem. En ren fluid förflyttas med hastigheten $v = 1$ m/s. Begynnelsevillkoret framgår av figur 13.4.1. Värmeledningsförmågan är $\lambda = 0$.

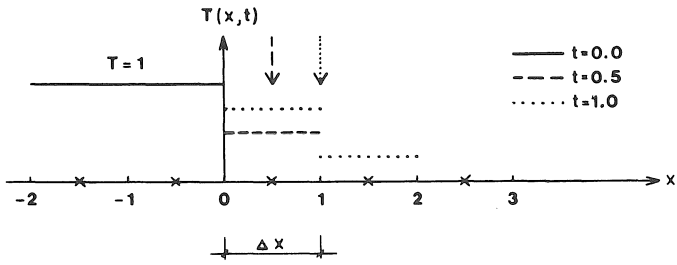


Figur 13.4.1. Temperaturfördelning i ett endimensionellt flöde.

Då ingen värmeledning förekommer skall fronten mellan varmt och kallt vara oförändrat skarp (temperaturen ändras från 1 till 0 i en punkt) vid tider $t \geq 0$. Vid den numeriska beräkningen väljs följande data:

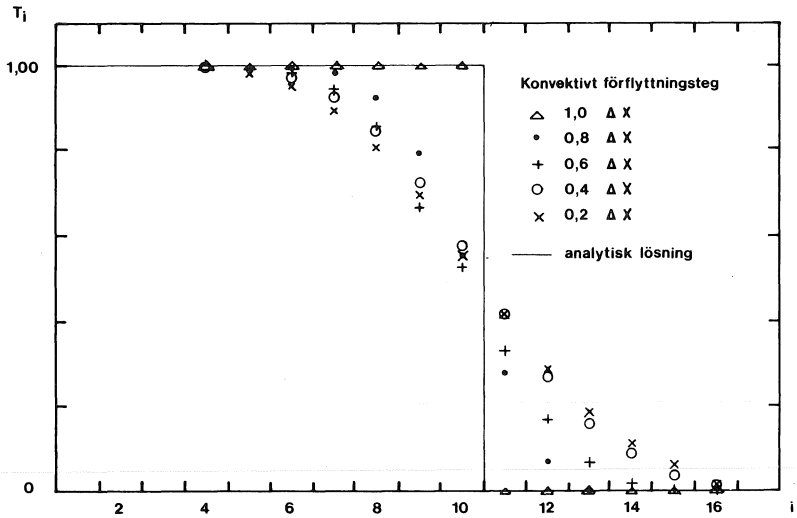
$$\begin{array}{lll} \Delta x_i = 1 & -\infty < i < \infty & \\ \Delta t = 0.5 & & \\ T_i = 1 & i \leq 0 \left.\right\} & t = 0 \\ T_i = 0 & i > 0 \left.\right\} & \end{array} \tag{13.4.1}$$

Gitterindelningen väljs så att $x = 0$ ligger i randen mellan cell 0 och cell 1. I figur 13.4.2 följs temperaturfältet under två iterationssteg. Det heldragna temperaturfältet gäller vid starttidpunkten $t = 0$. Den streckade linjen visar temperaturfältet efter det första tidssteget. En pil markerar var den skarpa fronten borde ligga (formel (13.1.6)). Den punktade linjen anger situationen efter det andra tidssteget.



Figur 13.4.2. Exempel på effekt av numerisk dispersion.

Av figuren framgår att den skarpa fronten vid $t = 0$ sprids alltmer för varje förflyttning. Den resulterande temperaturspridningen beror på den trubbiga representationen av temperaturfördelningen i det diskreta gittret. Under den första förflyttningen fylls halva cellen av vatten med temperaturen $T = 1$. Cellens temperatur skall representera dess energiinehåll. Man erhåller $T = 0.5$. Representationen innebär att cellens fluidinnehåll blandats om och att fluid med temperaturen 0.5 för snabbt når fram till randen mot nästa cell.



Figur 13.4.3. En skarp front som flyttats genom tio celler.

I figur 13.4.3 visas resultat från fem olika fall där en skarp front flyttats genom tio celler. Vid varje flyttning av fronten ändras dess läge med $v\Delta t = k\Delta x$, där k i de olika fallen haft värdena k= 1.0, 0.8, 0.6, 0.4 och 0.2.

Efter passagen genom de tio cellerna liknar frontförändringen den som erhålls genom ren konduktiv värmeledning. I det betraktade fallet är frontförändringen emellertid helt oberoende av de termiska egenskaperna. Den beror endast på antalet "mekaniska" förflyttningar av fronten genom cellstrukturen, där varje förflyttning ger upphov till en omblandning enligt ovan. Om fronten flyttas en hel cell vid varje tillfälle förblir den opåverkad.

Det kvantitativa resultatet enligt ovan kan erhållas genom en ökning av värmeledningsförmågan för den konduktiva processen [*Claesson, 1978*].

13.5 Teknik att undvika numerisk dispersion

En enkel metod att undvika den visade effekten av numerisk dispersion är enligt avsnitt 13.4 att välja Δt och Δx så att $v\Delta t = \Delta x$. Då flyttas temperaturfältet precis en cellstorlek under tidssteget. Med beteckning enligt tidigare och med flöde i positiv koordinataxelriktning beskrivs den konvektiva processen av:

$$T_{i,n+1} = T_{i-1,n} \tag{13.5.1}$$

Vid representationen av den nya tidpunktens temperaturer sker ingen omblandning av innehållet i olika celler. Representationen blir oförändrad vid varje konvektiv förflyttning.

Vid blandad konvektiv diffusiv värmetransport kan man använda två olika tidssteg, ett konduktivt, Δt_{cd} och ett konvektivt, Δt_{cv}. Under ett konvektivt tidssteg hålls fluiden stilla. Under denna tid utförs emellertid ett eller flera konduktiva beräkningstidssteg Δt_{cd} så att:

$$\sum_i \Delta t_{cd,i} = \Delta t_{cv} \tag{13.5.2}$$

När den konduktiva beräkningen är utförd för tiden Δt_{cv} flyttas temperaturfältet en gittercell i flödesriktningen. Därefter utförs en ny beräkning av en serie konduktiva tidssteg enligt (13.4.2). Förfarandet upprepas till önskad tidpunkt.

Förflyttningen av temperaturfältet får inte påverka energiinnehållet i beräkningsvolymen. Värmekapaciteten (J/°C) i samtliga celler som påverkas av förflyttningen måste därför vara lika stor.

Metoden fungerar bra vid endimensionell strömning vid plan geometri. Alla cellstorlekar blir lika stora. Vid till exempel plan radiell symmetri, där flödet sker i radiell led, medför det konvektivt grundade kravet på lika cellstorlek att cellernas radiella dimension måste avta med avståndet från symmetriaxeln. Om beräkningsområdet omfattar stort djup i radiell led kan detta ge problem vid den konduktiva beräkningen eftersom stabilitetstidssteget för en cell minskar med minskande celldimension.

En annan metod att undvika effekter av numerisk dispersion är att direkt beskriva fysiken i det grundläggande problemet. Vid den konvektiva förflyttningen av temperaturfältet enligt ovan sker en extra spridning i fältet beroende på omblandning av vatten i de enskilda cellerna. Temperaturutjämningen på grund av omblandningen orsakar en extra entropi-produktion som inte borde ingå i den beskrivna processen.

Genom att vid förflyttningen upprätthålla såväl energi- som entropikonservation kan extraspridningen av temperaturfältet undvikas. För att åstadkomma detta kan en cells energiinnehåll representeras av två interna temperaturnivåer med ett under varje tidssteg givet frontläge mellan nivåerna. Vid den konvektiva förflyttningen av fluid mellan cellerna används tvåtemperatursrepresentationen. Därmed kan även det introducerade kravet på entropikonservation uppfyllas. Vid beräkning av konduktiva värmeflöden mellan angränsande celler används en medeltemperatursrepresentation av cellens innehåll. En närmare beskriving av metoden ligger utom ramen för denna skrift. Metoden är effektiv och uppnådda resultat är goda [*Hellström et al., 1986*].

13.6 Värmetransport i och utanför ett vattenfyllt bergrum

13.6.1 Den lokala processen i bergrummet

Den termiska processen i bergrummet omfattar en blanding av konduktion, fri konvektion (vattenrörelse på grund av täthetsskillnader i vattnet) och påtvingad konvektion (vattenrörelse på grund av pumpning). Avsnittet beskriver en modell där denna mycket komplicerade process hanteras på ett starkt förenklat sätt. Man har en endimensionell temperaturfördelning i vertikalled. Den enda fluidtransport som följs i tiden är den som åstadkoms genom pumpningen av vatten genom lagret.

Förenklingen grundas bland annat på att vattnets täthet förutsätts avta med ökande temperatur, vilket är korrekt för $T >\sim 4$ °C. Effekten av fri konvektion beskrivs på följande sätt. En temperaturfördelning i bergummet, vilken inte ger upphov till drivande krafter på vattnet, måste ha konstant värde i varje horisontalplan och vara konstant eller avtagande med djupet. Varje störning av en sådan temperaturfördelning ger genom drivande krafter upphov till en konvektiv vattenströmning som försöker eliminera störningen. Förenklingen bygger på antagandet att tidsskalan för dessa konvektiva vattenrörelser är avsevärt mindre än den för hela problemställningen avgörande tidsskalan för de konduktiva processerna i bergrum och omgivande mark. De konvektiva rörelserna behöver då inte följas i tiden. Det räcker med att resultatet av dem under varje konduktivt tidssteg blir beskrivet med tillräckligt litet fel.

Två typer av temperaturstörning ger upphov till vattenrörelser i bergrummet. Den ena störningen åstadkoms av värmeflödet genom bergrummets vertikala randytor. Temperaturen i ett tunt vattenskikt närmast bergytan får en avvikande temperatur. Bergrummet har vid normala driftssituationer en temperatur som avtar med djupet. Temperaturstörningen i det tunna skiktet antas ge upphov till konvektionsceller med begränsad utsträckning i vertikalled. Resultatet av processen kan då sammanfattande beskrivas som att värmeflödet genom bergrummets randyta till en gittercell i bergrummet påverkar hela gittercellen. Förenklingen är således av samma typ som den, som används för enskilda celler vid rent konduktiv beräkning, där värmeflödet genom en cells ränder under ett tidssteg påverkar hela cellen direkt.

Den andra typen av störning orsakas av att den endimensionella temperaturfördelningen i lagret kan ge upphov till instabilitet i vattnet. Detta kan ske genom att vatten som pumpas in i en cell i lagret har en högre temperatur än den som finns i cellen ovanför eller lägre än den som finns nedanför. Instabilitet kan också uppkomma på grund av den ovan beskrivna värmetransporten genom bergrummets ytor. Detta gäller speciellt vid bergrummets tak till vilket den översta cellen i allmänhet förlorar värme varigenom dess temperatur sänks. I denna andra typ av störning är hela celler inblandade i instabiliteten. Man får temperaturutjämnande vattenrörelser inom den vertikala del av bergrummet där instabiliteten uppträder. Även här bygger förenklingen på att tidsskalan för vattenrörelserna antas vara avsevärt mindre än den för hela problemställningen avgörande tidsskalan för de konduktiva processerna. Resultatet av de temperaturutjämnande rörelserna i vattnet kan då beskrivas med en medelvärdesbildning av berörda cellers temperaturer.

Det konvektiva förloppet i bergrummet kan, med de ovan angivna förenklingarna, beskrivas på följande sätt. Bergrummets temperaturer beskrivs med en endimensionell

gitterindelning i vertikalled. Samtliga gitterceller har samma värmekapacitet (J/K). Efter varje förändring av bergrumstemperaturerna testas att dessa uppfyller kravet för stabilitet. Cellernas temperatur undersöks i tur och ordning med början i bergrummets botten. Så snart en cell påträffas med en temperatur som är lägre än den underliggande cellens temperatur sker en temperaturutjämning mellan dessa så att de erhåller samma temperatur (de två cellernas medeltemperatur). Om de två cellerna får en lägre temperatur än den närmast lägre liggande cellen sker en utjämning mellan dessa tre celler så att de får samma temperatur (de tre cellernas medeltemperatur). Förfarandet upprepas till dess en stabil temperaturprofil genom hela lagret har uppnåtts.

För att undvika numerisk dispersion (avsnitt 13.4-5) vid beräkning av vattentransporten genom lagret kan en buffertmodell användas. Principen är att vatten som skall pumpas in i lagret ackumuleras i en buffert, vars storlek är vald så att dess värmekapacitet (J/K) har samma värde som cellerna i bergrummet. Om bergrummet innehåller enbart vatten blir buffertens volym lika stor som en cell i bergrummet. Om bergrummet innehåller en blandning av vatten och sprängsten (vars värmekapacitet är lägre än vattens) blir buffertvolymen mindre än bergrumscellernas volym. Allt inkommande vatten till bufferten blandas tills den är fylld. Då sker en inskiftning av dess temperatur till inloppscellen. Bergrummets övriga temperaturer förflyttas ett steg mellan inloppsoch utloppscell.

Omblandningen av vattnet i bufferten kan ses som en beskrivning av den vattenblandning på grund av påtvingad konvektion som sker i närheten av vattnets inpumpningsnivå. Som ett extremfall, om vattenflödet är mycket stort i förhållande till bergrumsvolymen, kan man ha en omblandning av allt vatten i bergrummet. Detta kan åstadkommas genom medelvärdesbildning av temperaturen i samtliga bergrumsceller.

Effekten av termisk dispersion, som uppstår när bergrummet innehåller en blanding av vatten och sprängsten, beskrivs enligt avsnitt 13.3.

Sammanfattning:

De angivna fysikaliska förenklingarna vid beskrivningen av den termiska processen i bergrummet medför att dess innehåll kan betraktas som homogent. Den termiska effekt som härrör från blandningen vatten/sprängsten beskrivs med hjälp av en värmeledningsförmåga som varierar med den termiska hastigheten i bergrummet. Denna är känd vid inledningen av varje tidssteg och vållar därför inga problem vid beräkningen. Vidare beskrivs bergrummet med en vertikal endimensionell cellstruktur som ett resultat av ansatsen att temperaturutjämning på grund av konvektion har en avsevärt kortare tidsskala än utjämning på grund av konduktion.

I avsnitt 13.7 visas jämförelser mellan mätningar och beräkningar för ett nedskalat modellförsök och för fullskaleanläggningar. Resultaten av jämförelserna är utmärkta.

13.6.2 Den globala processen i den omgivande marken

I marken utanför bergrummet har man en rent konduktiv process. Marken delas in i en gitterstruktur i enlighet med kapitel 6-9. Isoleringar kan placeras på valfria ställen i strukturen. Den del av gitterstrukturen som upptas av bergrummet behandlas som ett enda delområde vilket ges separat behandling. Bergrummets ytor behandlas som yttre ränder till det globala problemet.

Markytans temperatur varierar med periodlängden 1 år. Vid cyklisk termisk belastning av bergrummet ger tiden mellan två på varandra följande laddningar periodlängden för grundfrekvensen av bergrummets temperaturvariation. Denna grundfrekvens

beskriver den dominerande delen av den pulserande värmetransporten mellan bergrum och omgivande berg.

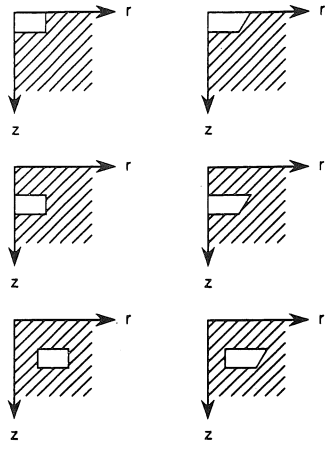
Cellstrukturen i de olika rändernas normalriktning ges av periodlängden vid respektive randyta (avsnitt 6.3). Om avståndet mellan markyta och värmelager är tillräckligt stort (exponentiell avklingning av variationens amplitud, avsnitt 10.1.2), och man inte speciellt är intresserad av temperaturerna nära markytan kan man, utan att temperaturförhållandena vid bergrummet förändras, vid markytan ansätta dess årsmedeltemperatur. Markytan kan då ses som en yttre rand (konstant temperatur) till ett beräkningsområde där lagret utgör den centrala delen. Gitterindelningen behöver därmed inte förfinas i närheten av markytan. Se även kapitel 11.

13.7 Tillämpningar

I de följande avsnitten redovisas jämförelser mellan mätningar från olika försöksanläggningar och beräkningsresultat från datormodeller vilka bygger på i framställningen redovisade metoder.

13.7.1 Datormodell

Datormodeller har utvecklats för beräkning av den termiska process som uppstår vid värmelagring i vattenfyllda bergrum. Modellerna kan hantera 2-dimensionella (Cartesiska eller cylindersymmetriska koordinater [*Eftring, 1984*]) och 3-dimensionella (Cartesiska koordinater) beskrivningar av bergrummet och dess omgivning.



Figur 13.7.1. Exempel på lagervolymer vid cylindersymmetrisk beskrivning.

Figur 13.7.1 visar ett vertikalt tvärsnitt genom några olika bergrumsformer, vilka kan beskrivas av den tvådimensionella versionen. Den visade z-axeln är en symmetriaxel. Tvärsnittet kan antingen avse ett centralt snitt tvärs igenom ett mycket långt bergrum eller ett snitt genom ett cylindersymmetriskt bergrum. I den tredimensionella versionen beskrivs bergrummet som en parallellepiped på valfritt djup under markytan. Den termiska processen i lagervolymen behandlas enligt beskrivningen i avsnitt 13.6.1.

Termiska data kan variera från cell till cell i gitterstrukturen utanför lagervolymen. Randtemperaturen vid markytan är en sinusfunktion där medelvärde och amplitud kan väljas. Vid randen mot bergrummet är randvillkoret ett givet värmeflöde vars storlek bestäms under genomförandet av den lokala processen i bergrummet. Vid övriga yttre ränder kan randvillkoret vara en föreskriven temperatur eller ett givet värmeflöde.

Datormodellerna har använts vid de tillämpningsexempel som återges i följande avsnitt.

13.7.2 Jämförelse med en laboratoriemodell av ett blockfyllt bergrum

Vid institutionen för geoteknik med grundläggning, Chalmers tekniska högskola, utfördes i början av 1980-talet ett nedskalat försök med värmelagring i ett blockfyllt bergrum [*Claesson et al., Markvärme*].

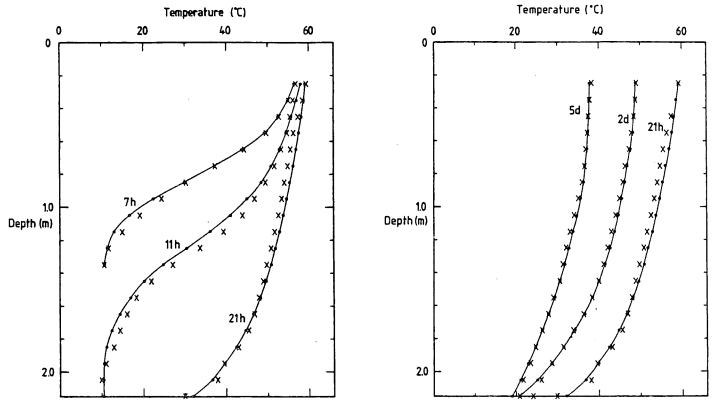
I laboratorieförsöket beskrevs bergrummet som en grop vars längd, bredd och djup var 5, 2 respektive 2.1 m. Gropen fylldes med stenar och vatten. En karakteristisk sten hade måtten 0.1x0.07x0.04 m^3. Stenarna uppfyllde 59 % av gropens totala volym. Väggar och botten bestod av kraftigt armerad betong. Överytan täcktes av en 75 mm tjock isolering, vilken nådde 0.8 m utanför väggarna. Vid laddning av värme togs vatten från gropens botten och återfördes i dess översta del.

Vid simuleringen användes den tredimensionella versionen av datormodellen. Lagervolymen delades in i 20 skikt. Den omgivande betongen och marken delades in i cirka 5000 celler.

Indata till simuleringarna har erhållits från oberoende mätningar. Två korrigeringar behövde emellertid utföras. Värdet på inpumpade vattenvolymer ändrades då dessa volymer ej stämde med motsvarande lägen på den uppmätta temperaturfrontens centrum. Korrigeringen svarar mot ett fel på cirka 5 % vid mätningen av inpumpad vattenvolym. Mätfelet är inte onormalt stort. De i simuleringen använda volymflödena är således korrekta värden tagna ur de uppmätta temperaturprofilerna.

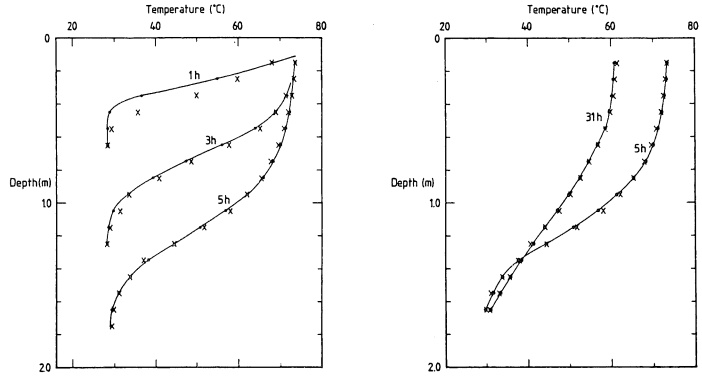
Den andra korrigeringen gäller värmeledningsförmågan i den omgivande betongen. Denna har åsatts det höga värdet 3.5 W/mK vilket kan motiveras av den mycket kraftiga armeringen. Värdet har föga betydelse för den beräknade temperaturprofilen under kortare laddningsförlopp då temperaturprofilen mest påverkas av det effektiva λ-värdet, λ_{eff}, det vill säga av beskrivningen av temperaturprocessen runt och i stenarna i lagervolymen (avsnitt 13.3). Däremot påverkas temperaturprofilens nivå under längre lagringsperioder av betongens värmeledningsförmåga eftersom lagret förlorar värme till omgivningen, vilket sänker temperaturnivån i lagret. Värdet på värmeledningsförmågan har bestämts genom passning i en mätserie.

Två fall redovisas. I det första fallet pumpades varmvatten in i lagret under 21 timmar. Därefter avbröts pumpningen. Lagrets temperaturprofil mättes under 5 dygn. Mätta och beräknade värden visas i figur 13.7.2.



Figur 13.7.2. Vertikal temperaturfördelning i lagret under laddnings- och lagringsperiod. Mätta värden betecknas med x.

I fall 2 var vattenflödet ungefär det dubbla. Pumpningen avbröts efter 5 timmar. Mätta och beräknade värden under laddning och efter en lagringsperiod om 26 timmar ges i figur 13.7.3.



Figur 13.7.3. Vertikal temperaturfördelning i lagret under laddnings- och lagringsperiod. Mätta värden betecknas med x.

Överensstämmelsen mellan mätta och beräknade värden är god.

13.7.3 Jämförelser med en vattentank i Ingelstad

I Ingelstad utanför Växjö har ett solvärmeverk uppförts. Se [*Finn*] och [*Claesson et al., Markvärme*]. Vid tiden för jämförelsen värmde koncentrerande solfångare vatten till maximalt 105 °C. Via värmeväxlare lagrades varmvatten i en välisolerad cylindrisk tank, vars temperatur under en lagringscykel varierade i intervallet 40 till 95 °C. Under uppvärmningssäsongen användes värme från lagringstanken till uppvärmning av ett omgivande bostadsområde. Lagringstankens innerdiameter är 28.2 m och dess höjd är 8 m. Volymen är cirka 5000 m^3.

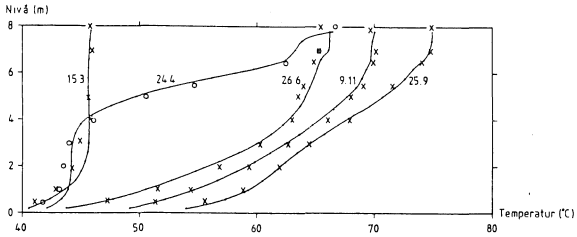
Simuleringen av tankens termiska funktion kom till stånd på grund av att de uppmätta värmeförlusterna från tanken var 4-5 gånger större än vad som förväntats.

Tanken är på överytan och längs sidorna täckt av ett cirka 1 m tjockt lager av isolering med den nominella värmeledningsförmågan 0.04 W/mK. Mätvärden från två perioder utan vattenpumpning användes för att bestämma isolerkonstruktionens k-värde. De två perioderna omfattade 45 respektive 27 dygn. För de två perioderna motsvarade värmeförlusterna genom tankens sida och överyta en effektiv värmeledningsförmåga av 0.18 respektive 0.21 W/mK. Som genomsnittligt effektivt λ-värde för isolerkonstruktionen valdes 0.20 W/mK, vilket kan jämföras med isolermaterialets nominella värde på cirka 0.04 W/mK.

Vid simuleringen av den termiska funktionen för lagret togs indata från uppmätta värden på vattenflöden, inloppstemperatur och och lufttemperatur. En cylindersymmetrisk modell användes vid simuleringen.

När den genomsnittliga effektiva värmeledningsförmågan 0.20 användes som värde för hela isoleringen erhölls genomgående för låga temperaturer i lagret. Under perioder utan vattenpumpning genom tanken sjunker de beräknade temperaturerna i lagrets översta del för snabbt. De simulerade värmeförlusterna genom tankens topp var för stora.

För isoleringen i tankens överyta ansattes i stället den nominella värmeledningsförmågan 0.04 W/mK. En ny analys av de uppmätta tankförlusterna under de två perioderna utan vattenpumpning gav värdet 0.32 för den effektiva värmeledningsförmågan i tankens vägg. Resultat från simulering med dessa förändrade värden visas i figur 13.7.4.



Figur 13.7.4. Jämförelse mellan uppmätta (x, o) och beräknade temperaturprofiler i lagringstanken i Ingelstad.

Figuren visar att överensstämmelsen är mycket god. Den största avvikelsen är cirka

1 °C. Ojämnheter i beräknade temperaturprofiler nära tankens överyta kan hänföras till datormodellens förenklade sätt att med hjälp av buffertar beskriva vattenflödet genom tanken. Tidsskalan för utjämningen av dessa introducerade felaktigheter är så kort att det långsamma förloppet i hela lagervolymen endast försumbart påverkas.

Simuleringsresultaten indikerade att de för stora värmeförlusterna skedde genom tankens väggar. Den kraftiga ökningen kunde endast förklaras med en konvektiv värmetransport genom öppna eller slutna system av springor eller spalter i isolerkonstruktionen, vilken var utförd så att isolerskivor staplats på varandra. Överslagsräkningar visade att spaltvidder på några få millimeters storlek skulle räcka för att förklara den ökade värmetransporten. Effekten av fri konvektion är vidare mycket kraftigare i en vägg med horisontell temperaturgradient än i ett tak med vertikal temperaturgradient enligt det betraktade fallet. Detta stöder användningen av olika effektiv värmeledningsförmåga i tak respektive vägg.

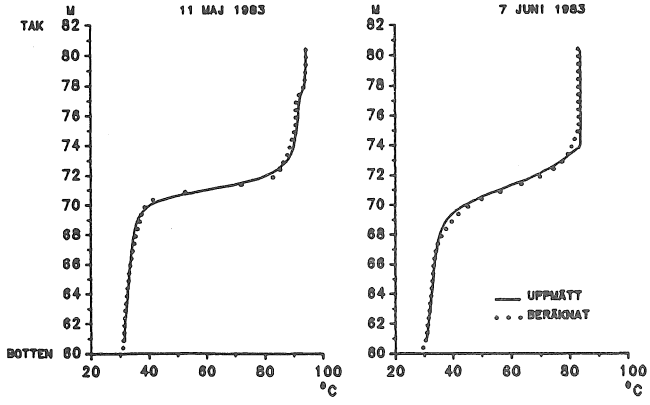
En senare inspektion (1983) bekräftade den antagna förklaringen. Vertikala dräneringskanaler vid betongväggens yttersida var ej tätade uppåt. Man fann centimeterbreda spalter innanför isolerskivorna. Man fann i isolerkonstruktionen vertikala luftrörelser med orimligt höga temperaturer.

13.7.4 Jämförelse med ett bergrumslager i Avesta

I Avesta byggdes ett bergrum för att användas vid korttidslagring av värme. Överskottsvärme från en sopförbränningsanläggning skulle lagras under vardagar för att användas nattetid och under veckoslut. Normala drifttemperaturer skulle ligga i intervallet 70 till 115 °C. Dessa planer modifierades senare. Bergrummet har måtten 42x19x21 m^3 (längd, bredd och höjd). Volymen är 15000 m^3. Avståndet mellan bergrummets tak och markytan är 25 m.

Lagrets termiska funktion simulerades med hjälp av den tredimensionella datormodellen. Bergets värmeledningsförmåga och värmekapacitet sattes till 3.5 W/mK respektive $2.16 \cdot 10^6$ J/m^3K. Starttemperaturen i beräkningsområdet sattes till 8 °C. Uppmätta data användes för att bestämma värden på volymflöde och inloppstemperatur. Simuleringen utfördes av Bengt Vasseur, Vattenfall. Den simulerade perioden omfattar tiden maj 1982 till december 1983. Perioden omfattar en inledande anvärmningsperiod följd av tre cykler med laddning, vila, urladdning och vila. Varje cykel omfattade cirka 4 månader [*Vasseur, 1986*].

Figur 13.7.5 visar uppmätta och beräknade temperaturprofiler från maj och juni 1983. Ingen pumpning förekom mellan de två tidpunkterna. Vid den första tidpunkten återges temperaturprofilen korrekt för de två språngskikten mellan varmt och kallt vatten på nivåerna 72 respektive 78 m. Efter viloperioden till den 7 juni är överensstämmelsen fortfarande utmärkt både vad gäller förändringar i det stora språngskiktet och vad gäller temperaturutjämningen i lagrets övre del.



Figur 13.7.5. Jämförelse mellan uppmätta och beräknade temperaturprofiler i bergrummet i Avesta [*Vasseur, 1986*].

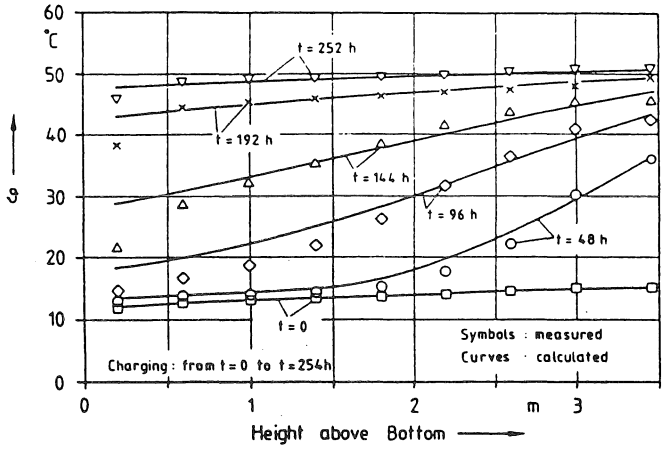
Den enkla modellbeskrivningen av dessa mycket komplicerade termiska processer fungerar bra för det beskrivna fallet. Vidare återgavs uppmätta temperaturprofiler i berget ovanför och nedanför bergrummet (centralt och vid mitten av en kortsida) med god noggrannhet.

13.7.5 Jämförelse med ett gropmagasin i Stuttgart

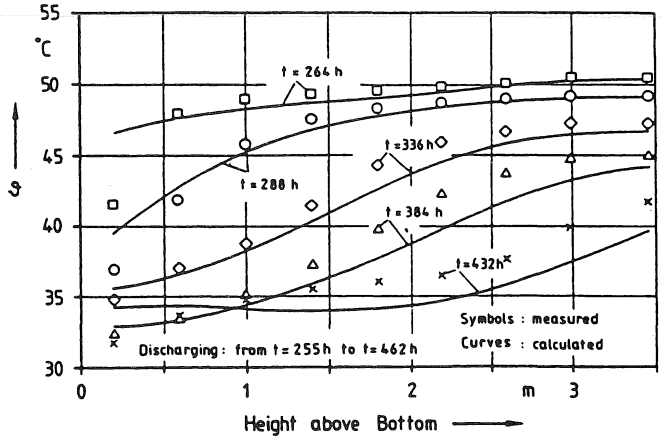
Vid Universitetet i Stuttgart har man byggt ett gropmagasin i form av en stympad kon. Lagret, som har volymen 1050 m^3 (medelradie $\approx$ 9m och höjden = 4m) är fyllt av en blandning av sten och vatten. Lagret är inkopplat i uppvärmningssystemet för en universitetsbyggnad och används för både lång- och korttidslagring av värme. Systemet har varit i funktion sedan 1985. Detaljerade data om lagret ges i [*Giebe et al., 1986, 1987*] och [*Hahne, Fisch, 1988*] samt i IEA-rapporter (Task VII), då projektet är ett tyskt bidrag till IEA.

I ett bidrag till JIGASTOCK 88 [*Hahne et al., 1988*] redovisas en jämförelse mellan mätningar och beräkningar, vilka utförts med hjälp av den beskrivna datormodellen. Under en laddningsperiod om 144 timmar pumpades 50-gradigt vatten med flödet 4000 kg/tim in i lagrets topp. Under följande 110 timmar höjdes volymflödet kontinuerligt till 14000 kg/tim. Under hela perioden extraherades samma mängd vatten från lagrets botten. Efter laddningen följde omedelbart en återvinningsperiod om 208 timmar. Temperaturen på det utpumpade vattnet varierade i intervallet 50 - 36 °C. Massflödet varierade mellan 2000 och 2700 kg/tim.

Figur 13.7.6-7 visar mätta och beräknade temperaturer i lagret under laddning respektive återvinning.



Figur 13.7.6. Jämförelse mellan uppmätta och beräknade temperaturprofiler i groplagret i Stuttgart, laddning [*Hahne et al., 1988*].



Figur 13.7.7. Jämförelse mellan uppmätta och beräknade temperaturprofiler i groplagret i Stuttgart, återvinning [*Hahne et al., 1988*].

Man mätte laddad och återvunnen värmemängd till 34.7 respektive 5.5 MWh. Förlorad värmemängd under laddning var 24 %. Motsvarande siffror från beräkningen var 35.6, 5.5 respektive 23.4 %. Författarnas slutsatser är att det jämförelsevis enkla beräkningsprogrammet klarar att beräkna temperaturer i gropmagasin och att det fungerar väl vid beräkning av energimängder.

Det kan tillfogas att författarna till den refererade skriften inledningsvis betonar att temperaturförhållandena runt lagret är svårkontrollerade på grund av den oregelbundna omgivningen vilken innefattar gator och hus. Vid datorberäkningen beskrivs omgivningens temperaturer utan några oregelbundenheter. De beräknade lagertemperaturerna svarar därför mot en utjämnad medelvärdesrepresentation av omgivningstemperaturen varför viss avvikelse från de verkliga lagertemperaturerna kan förväntas. Betydelsen av dessa avvikelser minskar när det gäller energibetraktelser. Dessa bygger på tids- eller volymintegraler och förändringar i lagrets temperaturprofil på grund av nämnda oregelbundenheter spelar därför mindre roll.

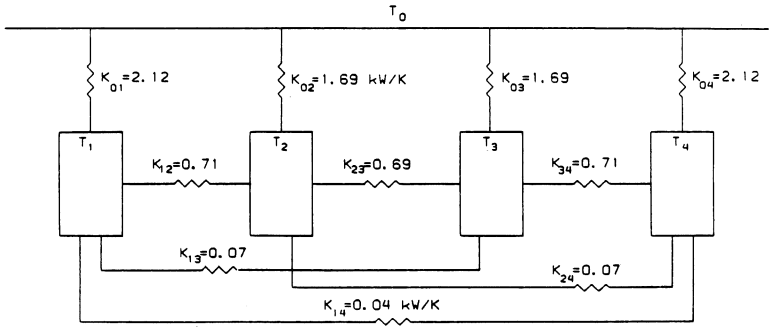
13.7.6 Beräkning av ett bergrumslager i Skarvik

I [*Claesson, Wallentén*] beskrivs ett system för korttidsvärmelagring i fyra parallella bergrum i Skarvik, Göteborg. Bergrummen, som är lika stora, har tidigare använts för oljelagring. Varje bergrum har formen av en parallellepiped med längd 180 m, bredd 30 m och höjd 18 m. Bergrummens tak ligger 30 m under markytan. Avståndet mellan bergrummen är 40 m.

I referensen bestäms med olika metoder bergrummets termiska funktion vid olika laddningsstrategier med periodlängder från något dygn och upp till en månad. Bland metoderna ingår förenklade analytiska beskrivningar och numeriska beräkningar för vissa delförlopp.

Bland de delar som bestämts med numeriska metoder är den stationära förlusten från bergrummen. Detta värde beskriver den långsiktiga värmeförlusten från bergrummen. Det är proportionellt mot bergrummens tidsmedeltemperatur.

I det allmänna fallet kan årsmedeltemperaturen i bergrummen vara olika. Låt temperaturen vid markytan och i de fyra bergrummen ges av T_0, T_1, T_2, T_3 respektive T_4. Tillämpning av superpositionsprincipen medför en förenkling så att ett allmänt fall kan beskrivas som en linjär kombination av två grundfall. Dessa ges av de konstanta temperaturerna (0,1,0,0,0) och (0,0,1,0,0) där temperaturerna är givna i ordningen ($T_0 \ldots T_4$). Resultatet av beräkningarna kan sammanfattas i en värmeströmningskrets enligt figur 13.7.8.



Figur 13.7.8. Värmeströmningskrets för stationära förluster för de fyra bergrummen i Skarvik [*Claesson, Wallentén*].

Man får följande formler för värmeflödet Q_i (kW) från en temperaturpunkt i:

$$Q_i = \sum_{j \neq i} K_{ij}(T_i - T_j) \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4) \tag{13.7.1}$$

Vid tredimensionella beräkningar av de stationära förlusterna har i det visade fallet 60 000 beräkningsceller använts. De minsta cellerna hade storleken $2 \cdot 2 \cdot 2$ m^3.

Kapitel 14

KORT OM ANDRA NUMERISKA LÖSNINGSMETODER

Den i framställningen beskrivna lösningsmetoden innebär en tydligt fysikaliskt formulerad värmebalans för de enskilda gittercellerna.

Metodens egenskaper överensstämmer med den metod som inom området numerisk analys kallas explicit framåtdifferens. Den i dessa sammanhang vanliga formuleringen av metoden framhäver inte den bakomliggande fysikaliska processen. Se formuleringarna (4.2.1-3).

Det vanliga sättet att lösa värmeledningsproblem är att utgå från den analytiskt formulerade värmeledningsekvationen och att försöka hitta en numeriskt formulerad lösningsmetod som är så allmängiltig som möjligt. Den traditionella metoden att lösa värmeledningsekvationen bygger på att ingående derivator ersätts med differenskvoter. Den kontinuerliga temperaturfördelningen ges en diskret beskrivning där temperaturen definieras i ett ändligt antal punkter. Det ligger emellertid utanför framställningens ram att i detalj gå in på alla de angreppssätt som utvecklats. För närmare beskrivning hänvisas till de många standardverk som utmärkt och detaljerat behandlar olika sådana metoder. Se till exempel [*Ames*], [*Smith*], [*Minkowycz et al., 1988*] och [*Mitchell, Griffiths*].

Gemensamt för metoderna är problemet med den diskreta formuleringen av tidsderivatan. Ett syfte med pågående utveckling är att åstadkomma formuleringar som ger möjlighet att förlänga tidssteget så mycket som möjligt. I kapitel 5 visas att det finns välgrundade termodynamiska skäl för den tidsstegsgräns som erhålls med framåtdifferensens stabilitetstidssteg. Man kan därmed förvänta sig att överskridande av denna gräns kostar beräkningsarbete då man med nödvändighet måste införa en mer komplicerad beskrivning av temperaturförloppets mekanism.

Det är därför intressant att göra en jämförelse mellan vinsten i tidsstegslängd och förlusten i motsvarande beräkningsarbete när tidsderivatan beskrivs med olika metoder. I syfte att belysa detta skall kortfattat resultatet i [*Thibault, 1985*] återges.

Thibault betraktar följande problem. En parallellepiped av koppar har konstant begynnelsetemperatur. Tre olika randvillkor studeras: språngtemperatur vid ränderna, konstant värmeflöde genom ränderna samt språngtemperatur med ett konstant värmemotstånd längs ytorna. Temperaturfördelningen efter fem sekunders förlopp skall bestämmas.

Det beskrivna tredimensionella transienta problemet löses med nio olika beskrivningar, M1-M9, av tidsderivatan. Dessa kan delas in i tre olika kategorier. Metoderna M1-M3 är explicita metoder vilket innebär att den nya temperaturen i en gitterpunkt efter tidssteget kan uttryckas direkt med hjälp av de gamla temperaturerna före tidssteget. M1 är metoden med explicita framåtdifferenser vars egenskaper överensstämmer

med den metod som beskrivs i denna framställning. I M2 och M3 används mellansteg vid beräkningen av de nya temperaturerna i slutet av ett tidssteg.

M8 och M9 är implicita metoder. Med dessa metoder erhålls stabila lösningar oavsett tidsstegets längd. Metoden innebär att för varje tidssteg löses ett ekvationssystem omfattande lika många ekvationer som man har temperaturpunkter. Lösningen kräver lång beräkningstid och stort minnesutrymme. M8 är en ren implicit metod och M9 är Crank-Nicolsons metod.

M4-M7 är ADI-metoder (Alternating-Direction-Implicit). Dessa metoder är utvecklade för att reducera de implicita metodernas stora datorkraftbehov. Ett tidsstegs förändringar genomförs i tre endimensionella steg innebärande implicit lösning i de tre koordinatriktningarna i tur och ordning. Ekvationssystemet reduceras då till en formulering med tridiagonala koefficientmatriser. M4 är en ren ADI-metod. M5 (Brian) och M6 (Douglas) innebär modifikationer vid genomförandet av de tre stegen. M7 (Thibault) är en metod som bygger på superpositionsprincipen.

För varje metod bestämdes felet i den beräknade temperaturfördelningen efter fem sekunder. Medelvärdet av kvadraten på avvikelsen i varje temperaturpunkt beräknades. Medelfelet bestämdes som kvadratroten ur detta medelvärde.

Figur 14.1 visar typiska beräkningsfel i resultaten för de olika beräkningsmetoderna. Metoderna M8 och M9 saknas då de på grund av mycket stora beräkningstider av Thibault ansågs vara ointressanta. Det framgår att så länge M1, metoden med explicit framåtdifferens, uppfyller villkoret för tidsstegslängden fungerar den utmärkt i jämförelse med övriga metoder. När stabilitetstidssteget överskrids blir felet omgående kraftigt. Risken för att en lösning skall vara behäftad med ett "smygande" fel är liten.

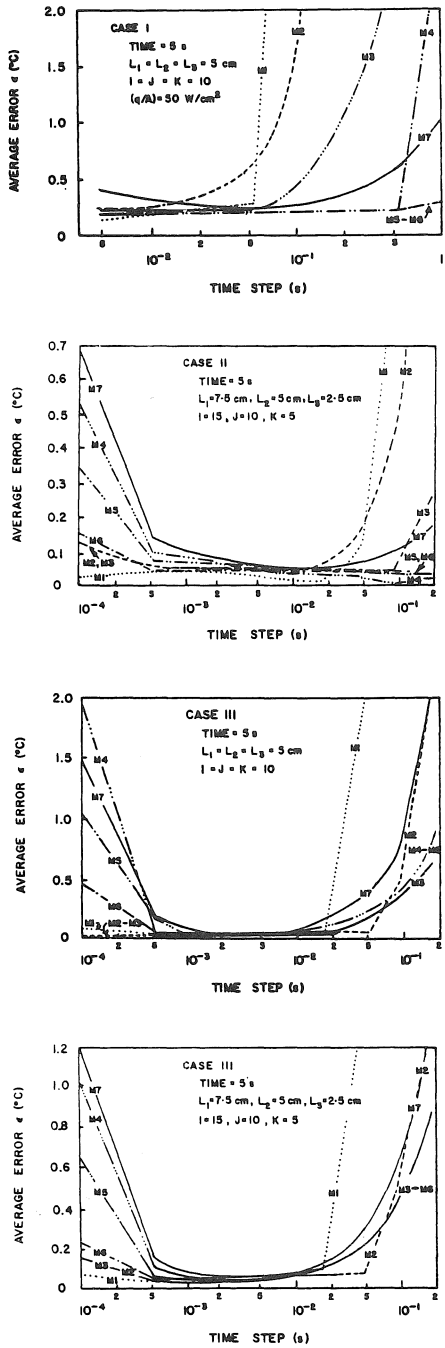
Beräkningstider för de olika metoderna återges i tabell 14.1. Tiderna (medelvärden för de studerade fallen) är givna relativt tiden för metod M1.

Metod	Relativ CPU-tid
M1	1.00
M2	1.82
M3	1.85
M4	4.45
M5	4.47
M6	4.51
M7	2.51
M8	>15000
M9	>15000

Tabell 14.1. Relativt tidsbehov för de olika metoderna [*Thibault*].

Thibault kommenterar resultatet på följande sätt:

> "M1 is a very good three-dimensional numerical method. It is the most economical with respect to computation time and core storage, the easiest to program, and one of the more accurate methods." Tidsstegsvillkoret nämns som en nackdel.



Figur 14.1. Medeltemperaturfel som funktion av tidssteget [*Thibault*].

M2 döms ut eftersom dess lösning inte konvergerar med minskande cellstorlek. M3 är ovillkorligt stabil, men vid för stora tidssteg är dess lösning inte representativ för det aktuella fysiska problemet. M7 är enkel att hantera men har begränsad tidstegslängd för stabil lösning (tre gånger så lång som för M1). M4 har begränsat tidssteg (tre gånger M1). M5 och M6 är ovillkorligt stabila men tidssteget bör begränsas för att hålla felet lågt (4-6 gånger M1). Deras algoritmer är svåra att programmera. M8 och M9 är ointressanta på grund av tidsbehovet.

Thibault rangordnar metoderna enligt M6, M5, M1, M4, M7, M3, M2, M8 och M9.

Här kan tilläggas att M6 och M5 är bedömda som svåra att hantera i ett datorprogram. Jämfört med M1 kräver de 4.5 gånger så lång räknetid oavsett gitterstrukturen (på grund av begränsningen av tidssteget). M4 kräver 4.5 gånger så lång räknetid. Med M7 följer de begränsningar som sammanhänger med superposition samt att tidsåtgången är 2.5 gånger så lång.

Det framgår att M1 ur många synvinklar är en attraktiv metod och att övriga betraktade metoder inte har några självklara fördelar.

Thibaults undersökning innehåller några osäkra punkter såsom:

- är respektive lösningsmetod formulerad på ett optimalt sätt för att möjliggöra en snabbt arbetande lösningsalgoritm?
- är programkoden skriven på ett rationellt sätt?

Thibaults syfte är att förutsättningslöst jämföra olika lösningsmetoder bland vilka hans egen ingår. Den hamnar i mitten av fältet vid hans utvärdering. Hans valda tillämpning med dess enkla formulering och användandet av samma gitterstruktur för de olika metoderna ökar trovärdigheten för att resultatet verkligen är belysande vid en jämförelse av just lösningsmetodernas tidsbehov.

Avslutningsvis innebär implicita metoder lösning av ekvationssystem för varje tidssteg. Detta medför behov av större datorkraft (mer minne för matrisbeskrivning av ekvationssystemet och mer beräkningstid för att lösa det) än vad explicita metoder kräver. För en- och tvådimensionella problem har detta mindre betydelse men svårigheterna blir stora vid beräkning av tredimensionella problem [*Minkowycz et al., 1988, 13.6*]. Minkowycz uppger att stora FEM-program (finita element-metoden, vilken har en inbyggd implicitet) inte ryms i primärminnet på ens de största datorerna (1988) varför yttre minnesenheter måste tas i bruk.

Det kan nämnas att den i inledningen nämnda forskargruppen utfört beräkningar för tredimensionella stationära temperaturfördelningar omfattande upp till 1000000 temperaturpunkter med den i framställningen beskrivna metoden. Beräkningarna har utförts på persondator men är för närvarande ej dokumenterade. Se även avsnitt 13.7.6. Det stora antalet temperaturpunkter kan också användas vid transienta beräkningar då dessa har en explicit formulering som är mycket lik den som använts vid de stationära beräkningarna.

Kapitel 15

EXEMPEL PÅ ANDRA PROCESSER MED PARABOLISK DIFFERENTIALEKVATION

Kapitel 1-14 behandlar temperaturförlopp. Grunden för framställningen är värmeledning i fast materia, där temperaturförloppet i kontinuerlig form beskrivs av värmeledningsekvationen (3.3.7). Avsikten med detta kapitel är att ge exempel på andra processer som kan hanteras enligt de i rapporten beskrivna metoderna.

Den betraktade processen avser en konserverad storhet α som kan vara energi eller massa. Storhetens fördelning i rummet ges av en densitetsfunktion ρ_α. Man har ett flöde $\vec{q}_\alpha$ som påverkar densitetsfunktionen ρ_α. Konservation av den betraktade storheten ger:

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q}_\alpha \tag{15.1}$$

Ekvationen uttrycker att tidsändringen av storheten α i en punkt är lika stor som nettoinflödet till punkten. Nettoutflödet från punkten ges av divergensen av flödet, $\nabla \cdot \vec{q}_\alpha$.

Empiriskt har man ofta följande typ av relation för flödet $\vec{q}_\alpha$:

$$\vec{q}_\alpha = -K_\alpha \nabla \Phi_\alpha \tag{15.2}$$

Ekvationen uttrycker att man har "potential", dvs en tillståndsvariabel, vars gradient driver flödet $\vec{q}_\alpha$. Storheten K_α är en proportionalitetsfaktor. Insättning av uttrycket för flödet i (15.1) ger följande balansekvation:

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} = \nabla \cdot (K_\alpha \nabla \Phi_\alpha) \tag{15.3}$$

Sambandet mellan ρ_α och Φ_α ges av $\rho_\alpha = \rho_\alpha(\Phi_\alpha)$. Man kan definiera en kapacitet enligt:

$$\frac{d\rho_\alpha}{d\Phi_\alpha} = C_\alpha \tag{15.4}$$

Balansekvationen (15.3), uttryckt i Φ_α, blir då:

$$C_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} = \nabla \cdot (K_\alpha \nabla \Phi_\alpha) \tag{15.5}$$

Detta är en parabolisk partiell differentialekvation där man har en tidsderivata av första ordningen och rumsderivator av andra ordningen.

Nedan ges exempel på några processer som kan beskrivas enligt ovan.

Värmeledning

Storheten α står för energi. Storheten ρ_α motsvarar energitätheten e (J/m^3), $\vec{q}_\alpha$ värmeflödet $\vec{q}$ (W/m^2) och Φ_α temperaturen T (°C). Värmeflödet ges av Fouriers lag:

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T \tag{15.6}$$

Proportionalitetsfaktorn K_α blir värmeledningsförmågan λ (W/mK). Värmebalansekvationen är:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \tag{15.7}$$

Värmekapaciteten C (J/m^{3}K) ges av:

$$\frac{de(T)}{dT} = C \tag{15.8}$$

Denna formulering motsvarar sambandet (12.2.7). Värmebalansekvationen uttryckt i T ges av:

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \tag{15.9}$$

Detta är den formulering som ges i (3.3.7).

Diffussion

Processen avser diffusion av ett löst ämne i en stillastående fluid. Storheten α står för det diffunderande ämnets massa. Storheten ρ_α motsvarar koncentrationen c (kg/m^3) av ämnet, $\vec{q}_\alpha$ den diffusiva masstransporten $\vec{q}_c$ (kg/s m^2) och Φ_α koncentrationen c (kg/m^3). Massflödet ges av Ficks lag:

$$\vec{q}_c = -D_c \nabla c \tag{15.10}$$

Proportionalitetsfaktorn K_α motsvarar diffusiviteten D_c. Massbalansekvationen är:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (D_c \nabla c) \tag{15.11}$$

Kapacitetsfaktorn C_α blir 1. Man har:

$$\frac{dc}{dc} = 1 \tag{15.12}$$

Fuktförlopp

Processen avser diffusion eller transport av fukt i ång- eller vätskefas i ett poröst material. Storheten α står för massan av det transporterade ämnet H_2O. Storheten ρ_α motsvarar fukthalten w (kg H_2O/m^3 poröst material), $\vec{q}_\alpha$ fuktflödet $\vec{q}_w$ (kg $H_2O/s\,m^2$ poröst material) och Φ_α relativa fuktigheten Φ (%). Fuktflödet ges av ett samband av typen Ficks lag:

$$\vec{q}_w = -D_\Phi \nabla \Phi \tag{15.13}$$

Proportionalitetsfaktorn K_α är fuktflödeskoefficienten D_Φ. Balansekvationen är:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nabla \cdot (D_\Phi \nabla \Phi) \tag{15.14}$$

Sambandet $w = w(\Phi)$ ges av sorptionsisotermen, dvs jämviktssambandet mellan fukthalt och relativ fuktighet vid konstant temperatur.

Vid beskrivningen kan man i stället se fukthalten w som den tillståndsvariabel vars gradient driver massflödet $\vec{q}_w$. Då motsvaras Φ_α av fukthalten w. Fuktflödet ges av:

$$\vec{q}_w = -D_w \nabla w \tag{15.15}$$

Proportionalitetsfaktorn K_α är en ny fuktflödeskoefficient D_w. Balansekvationen är:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nabla \cdot (D_w \nabla w) \tag{15.16}$$

Sambandet mellan de två fuktflödeskoefficienterna D_Φ och D_w ges av:

$$\vec{q}_w = -D_w \nabla w = -D_w \frac{dw}{d\Phi} \nabla \Phi = -D_\Phi \nabla \Phi \tag{15.17}$$

dvs

$$D_\Phi = D_w \frac{dw}{d\Phi} \tag{15.18}$$

Grundvattenrörelse eller luftrörelse i isolermaterial

Processen avser transport av grundvatten eller av luft i isolermaterial. Storheten α står för fluidens massa. Storheten ρ_α motsvarar fluidhalten ρ_f (kg fluid/m^3 poröst material), $\vec{q}_\alpha$ fluidens massflöde $\vec{q}_f$ (kg fluid/$s\,m^2$ poröst material) och Φ_α trycket p (Pa). Massflödet ges av Darcys lag (densitetsdrivna flöden behandlas ej här):

$$\vec{q}_f = -K \nabla p \tag{15.19}$$

Proportionalitetsfaktorn K_α är den hydrauliska konduktiviteten K. Balansekvationen är:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla p) \tag{15.20}$$

Om fluiden är inkompressibel erhålles:

$$\nabla \cdot (K \nabla p) = 0 \tag{15.21}$$

Denna rapport behandlar framförallt transienta processer. Även stationära värmeledningsproblem kan lösas med den beskrivna metoden antingen genom att det transienta förloppet följes tills det klingat av eller genom att lösningsmetoden modifieras så att programmet räknar enligt en överrelaxationsmetod. Se tillämpning i avsnitt 13.7.6 och kapitel 14. Stationära problem av potentialtyp kan lösas.

Man har allmänt en ekvation av typen:

$$\nabla \cdot (K_\alpha \nabla \Phi_\alpha) = 0 \tag{15.22}$$

Vid ett värmeledningsproblem motsvarar Φ_α temperaturen T och K_α värmeledningsförmågan λ. Se ekvation (3.3.11).

Om man har en källterm h_α, vilken beskriver ett externt volumetriskt extratillskott av den betraktade storheten α, erhålles:

$$\nabla \cdot (K_\alpha \nabla \Phi_\alpha) + h_\alpha = 0 \tag{15.23}$$

Vid värmeledningsproblem motsvarar h_α en volumetrisk värmeutveckling h (W/m^3). Se ekvation (3.3.12).

Vissa typer av strömningsprocesser beskrivs av ekvationer av typen (15.22) [*Hughes and Brighton, kap 6*]. Se ekvation (15.21).

En annan typ av tillämpningar är elektrostatiska problem. Den elektriska potentialen betecknas V (V). Man erhåller följande ekvation:

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) + \rho_c = 0 \tag{15.24}$$

Här är ϵ dielektricitetskonstanten och ρ_c laddningstätheten. Programvara, konstruerad av den i inledningskapitlet nämnda forskargruppen, har använts bland annat till vidareutveckling av munstycken till bläckstråleskrivare [*Rydgren, Thesis*]. I munstycket åstadkommes droppavlänkningen med elektrostatiska krafter. Man har en komplicerad geometri med bläckstrålen och dess uppdelning i laddade droppar i kombination med det omgivande munstycket med dess olika spänningsnivåer.

Kapitel 16

REFERENSER

Abramowitz M., I. Stegun. Handbook of Mathematical Functions. National Bureau of Standards, USA, 1967.

Adamson, B., J. Claesson, B. Eftring. Kryprum. Grundläggningsdjup, värmeisolering och fuktförhållanden. Rapport R29:1971. Byggforskningen.

Adamson, B., J. Claesson, B. Eftring. Bjälklag på jord - grundläggningsdjup. Rapport R40:1973. Byggforskningen.

Ames,W.F. Numerical Methods for Partial Differential Equations. Academic Press. 1977.

Arfvidsson, J., J. Claesson. A PC-based Method to Calculate Moisture Transport. International Symposium, ICHMT, Heat and Mass Transfer in Building Material and Structure. September 1989 Dubrovnik, Yugoslavia.

Blomberg, T. Heat 2. A PC-model for Two-dimensional Heat Conduction. Version 1.0, Notes on Heat Transfer 4-1988. Division of Building Technology. Lund Institute of Technology. CODEN LUTVDG (TVBH-7110)/1-39/(1988).

Brown, G. Metod för datamaskinberäkning av värme- och ljusstrålning i rum. VVS nr 10, 1963.

Carslaw, H.S., J.C. Jaeger. Conduction of heat in solids. Oxford University Press. 1980.

Claesson, J. Beräkning av temperaturfördelning och tjälnedträngning under ett hus. Arbetsrapport 1968:4, Institutionen för byggnadskonstruktionslära, Lunds Tekniska Högskola.

Claesson, J. Entropy Analysis of Numerical Diffusion. Intern Report. Department of Mathematical Physics. Lund Institute of Technology. 1978.

Claesson, J. Thermal Resistance Between Two Circles in Contact and a Large, Enclosing Circle. Notes on Heat Transfer 1-1987. Departments of Building Technology and Mathematical Physics. University of Lund. January 1987.

Claesson, J., J. Bennet. Multipole Method to Compute the Conductive Heat Flows to and Between Pipes in a Cylinder. Notes on Heat Transfer 2-1987. Departments of Building Technology and Mathematical Physics. University of Lund. January 1987.

Claesson, J., B. Eftring. Optimal Distribution of Thermal Insulation and Ground Heat Losses. Document D33:1980, Byggforskningsrådet.

Claesson, J., B. Eftring. Markvärmesystems påverkan på temperaturen nära markytan. Augusti 1982, Department of Mathematical Physics. Lund Institute of Technology.

Claesson, J., B. Eftring, P. Eskilsson, G. Hellström. Markvärme. En handbok om termiska analyser. Del I-III. T16-18:1985. Statens råd för byggnadsforskning.

Claesson, J., B. Eftring, G. Hellström. Temperature Decline of a Heated Region in the Ground. Department of Mathematical Physics. Lund Institute of Technology. 1980.

Claesson, J., Nevander, Sandin. Värme. Kompendium i byggnadsfysik. Husbyggnadsteknik. Tekniska Högskolan i Lund. 1984.

Claesson, J., P. Wallentén. Korttidsvärmelagring i bergrum. Studie för Skarvik, Göteborg. 31.5 1989, Markvärmegruppen, LNTH, Lund.

Eftring, B. Datorprogram för studium av temperaturfördelning och tjälnedträngning under ett hus. Arbetsrapport 1971:3. Institutionen för byggnadskonstruktionslära, Lunds Tekniska Högskola.

Eftring, B. Stratified Storage Temperature Model. Manual for Computer Code. Department of Mathematical Physics. University of Lund. January 1984.

Eskilson, P. Superposition Borehole model. Manual for Computer Code. Department of Mathematical Physics. University of Lund. January 1986.

Eskilson, P. Thesis: Thermal Analysis of Heat Extraction Boreholes. Department of Mathematical Physics. University of Lund. 1987.

Finn, L. Solvärmeverk i Ingelstad i Växjö. Projektering och byggförberedelser. R82:1979, Byggforskningen.

Giebe, R., R. Kubler, N. Fisch, J. Sohns and E. Hahne. Man Made Aquifer Thermal Energy Storage (ATES) Pilot Project. Proc. North Sun Conference, p.58-64. Copenhagen, 10.-12. June 1986.

Giebe, R., N. Fisch and E. Hahne. Operational Results of a seasonal Heat Store. Proc. ISES Solar World Congress Hamburg, 1987.

Hagentoft, C-E. Temperature under a totally insulated slab on the ground due to variable ground surface temperature. Notes on heat transfer 3-1985. Dept. of Building Technology, University of Lund, Box 118, S-221 00 Lund, Sweden.

Hagentoft, C-E. Thesis: Heat Loss to the Ground from a Building. Slab on the Ground and Cellar. Department of Building Technology. Report TVBH-1004. Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, April 1988.

Hagentoft, C-E. Heat Loss to the Ground from a Building. Supplementary Reports. Department of Building Technology. Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, April 1988.

Hahne, E., N. Fisch. Der Kies-Wasser-Wärmespeicher des BmFT-Pilotprojektes an der Universität Stuttgart. g-i (Gesundheitsingenieur), 1988.

Hahne, E., R. Giebe, N. Fisch. Experiments and theory for the Man Made Aquifer at Stuttgart University. Proc. JIGASTOCK 88, IV International Conference on Energy Storage for Building Heating and Cooling, Versailles, France, 18-21 Octobre 1988.

Hellström, G. Model of Duct Storage System. Manual for Computer Code. Department of Mathematical Physics. University of Lund. January 1984.

Hellström, G. Thesis. To be published in 1991.

Hellström, G., J. Bennet, J. Claesson. Model of Aquifer Storage System. Radial Ground Water Flow. Manual for Computer Code. Department of Mathematical Physics. University of Lund. January 1984.

Hellström, G., J. Bennet, J. Claesson. Model of Aquifer Storage System. Radial Ground Water Flow. Manual for Computer Code. Department of Mathematical Physics. University of Lund. April 1986.

Hughes, W. F. and J. A. Brighton. Fluid Dynamics. Schaum's Outline Series in Engineering, McGraw-Hill Book Company, 1967.

IEA. Program to Develop and Test Solar Heating and Cooling Systems, Task VII. Central Solar Heating Plants with Seasonal Storage. Heat Storage Models. Evaluation and Selection. June 1983.

IEA. Solar, Heating and Cooling Programme, Task VII. Central Solar Heating Plant with Seasonal Storage. The MINSUN Simulation Program. Application and User Program. July 1989.

Johansson, M., K. Westman. Datorprogram för studium av temperatur- och frysningsförlopp i mark kring kylrör till värmepump. Examensarbete BKL 1979:9. Inst. för Byggnadskonstruktionslära, Inst för Matematisk Fysik, Lunds Tekniska Högskola.

MacNeal, R.,H. An Asymmetrical Finit Difference Network, Quarterly of Applied Mathematics. Nr 11 1953.

Minkowycz, W. J., E. M. Sparrow, G. E. Schneider and R. H. Pletcher. Handbook of Numerical Heat Transfer. John Whiley & Sons, Inc. 1988.

Mitchell, A. R. and D. F. Griffiths. The Finite Difference Method in Partial Differential Equations. John Whiley & Sons

Rehn, I., J. Sundberg, B. Modin. Dimensionering av ytjordvärmekollektor. Beräkningar med simuleringsmodell. Rapport R13:1986. Byggforskningsrådet.

Rydgren,G. Thesis. Alphanumeric Ink Jet Printing by Ultrasonic Jet Control. Part I. Institutionen för elektrisk mätteknik, Lunds Tekniska Högskola. Report 5/1985.

Siegel, Howell. Thermal Radiation Heat Transfer. McGraw-Hill. 1981

Smith, G. D. Numerical Solution of Partial Differential Equations. Oxford University Press. 1971.

Spiegel, M. R. Mathematical Handbook of Formulas and Tables. Schaums Series in Mathematics. Mc Graw-Hill Book Company, 1968.

Thibault, J. Comparison of Nine Three-dimensional Numerical Methods for the Solution of the Heat Diffusion Equation. Journal of Numerical Heat Transfer, vol 8,1985.

Vasseur, B. Uppmätta och beräknade temperaturer och energiförluster. Avesta-projektet. Vattenfall/BeFo/Avesta kommun/BFR NE. 1986:1.

Denna rapport hänför sig till forskningsanslag 890293-6
från Statens råd för byggnadsforskning till Lunds tekniska
högskola, Lund.

Art.nr: 6801081

Abonnemangsgrupp:
Y. Byggnadsfunktion

R81:1990

ISBN 91-540-5249-1

Distribution:
Svensk Byggtjänst
171 88 Solna

Statens råd för byggnadsforskning, Stockholm

Cirkapris: 81 kr exkl moms