



LUND UNIVERSITY

Exempelsamling i elektromagnetisk fältteori för F3 och Pi3

Karlsson, Anders; Kristensson, Gerhard; Sohl, Christian

2014

[Link to publication](#)

Citation for published version (APA):

Karlsson, A., Kristensson, G., & Sohl, C. (2014). *Exempelsamling i elektromagnetisk fältteori för F3 och Pi3*. Tryckeriet i E-huset, Lunds universitet.

Total number of authors:

3

General rights

Unless other specific re-use rights are stated the following general rights apply:

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Read more about Creative commons licenses: <https://creativecommons.org/licenses/>

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

LUND UNIVERSITY

PO Box 117
221 00 Lund
+46 46-222 00 00

ETE055 Elektromagnetisk fältteori (F)

ETEF01 Elektromagnetisk fältteori (Pi)

Exempelsamling

Anders Karlsson

Gerhard Kristensson

Christian Sohl

Elektro- och informationsteknik
Lunds tekniska högskola
Box 118
221 00 Lund

© Anders Karlsson, Gerhard Kristensson och Christian Sohl
Tryckt i Sverige
Lund, juni 2014
Sjunde upplagan

Förord

Exempelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori används i kurserna *Elektromagnetisk fältteori för F* och *Elektromagnetisk fältteori för Pi*. Båda dessa kurser använder kursboken *Introduction to Electrodynamics* av D. J. Griffiths. Exempelsamlingen är till viss del anpassad till kursbokens konventioner och beteckningar. Kapitelindelningen är densamma som i kursboken.

Ett flertal av problemen i exempelsamlingen är gamla tentamensuppgifter som under de senaste åren givits i kursen *Elektromagnetisk fältteori för F* och *Elektromagnetisk fältteori för Pi*. I varje kapitel har dessa problem kompletterats med lite enklare uppgifter som inte kräver alltför långa räkningar. Till samtliga tentamensuppgifter finns fullständiga lösningar medan det till de enklare uppgifterna endast finns svar. Kapitel 1 innehåller problem som är tänkta som repetition och uppfriskning av kunskaperna i grundläggande vektoranalys.

Om du har några synpunkter på exempelsamlingen så tveka inte att lämna dessa till föreläsaren eller övningsledaren. Det går också bra att skicka e-post till: gerhard.kristensson@eit.lth.se.

Tack till Gunnar Ohlén, matematisk fysik, Johannes Skaar, NTNU, och Daniel Sjöberg, elektro- och informationsteknik, som bidragit med uppgifter, synpunkter och korrekturläsning.

Lund i juni 2014

Anders Karlsson
Gerhard Kristensson
Christian Sohl

Innehåll

1	Vektoranalys	1
2	Elektrostatik	9
3	Speciella lösningsmetoder	31
4	Elektriska fält i material	49
5	Magnetostatik	67
6	Magnetiska fält i material	89
7	Elektrodynamik	97
8	Konserveringslagar	135
9	Elektromagnetiska vågor	139
10	Potentialer och fält	161
11	Antenner	165

1 Vektoranalys

1.1

Vad är z -komponenten av enhetsvektorn $\hat{\mathbf{r}}$ i det sfäriska koordinatsystemet i punkten

- a) $(0, 0, 1)$
- b) $(0, 0, -10)$
- c) $(5, 0, 0)$
- d) $(0, 5, 0)$
- e) $(0, 5, 5)$

1.2

Vad är z -komponenten av enhetsvektorn $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ i det sfäriska koordinatsystemet i punkten

- a) $(0, 0, 1)$
- b) $(0, 0, -10)$
- c) $(5, 0, 0)$
- d) $(0, 5, 0)$
- e) $(0, 5, 5)$

1.3

Betrakta följande vandring: Först går promenaden 10 km söderut, sedan lika lång och väster. Avslutningen går 10 km norrut. Personen är då tillbaka vid utgångspunkten. Var startade hon? En viktig information saknas: På vägen såg hon en isbjörn på avstånd.

1.4

Betrakta vektorfälten $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (x, y, 0)$ och $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (-y, x, 0)$. Skissa fälten genom att rita vektorpilar i några väl valda punkter. Kan du tänka ut någon fysikalisk situation som dessa fält kan beskriva? Kan du utan att göra någon beräkning tala om vilket fält som har rotation? Samma fråga om divergensen. Uttryck bägge fälten i cylinderkoordinater.

1.5

Inför ett nytt vektorfält $\mathbf{C}(\mathbf{r}) = f(r_c)\mathbf{B}(\mathbf{r})$, där $\mathbf{B}$ är samma som i föregående uppgift och $r_c = \sqrt{x^2 + y^2}$. Bestäm funktionen f så att linjeintegralen längs varje slutna cirkel som ligger i ett plan $z = \text{konstant}$ med medelpunkten i $(0, 0, z)$ har samma värde oberoende av cirkelns radie. Vad blir linjeintegralen längs andra slutna kurvor?

1.6

I en kärnreaktor produceras fria neutroner genom fissionsprocessen. Detta innebär att det i kontinuitetsekvationen finns en källterm. Vi betraktar i detta exempel en sfärisk reaktor med radien R . I det stationära fallet gäller följande källtäthet, i sfäriska koordinater:

$$\kappa(r) = A \frac{\pi^2}{R^2} \frac{1}{r} \sin(\pi r/R), \quad r < R$$

Kontinuitetsekvationen lyder i detta fall: $\nabla \cdot \mathbf{j} = \kappa$.

- a) Visa att följande vektorfält som beskriver neutronflödet satisfierar kontinuitetsekvationen:

$$\mathbf{j}(r) = A \left(-\frac{\pi}{R} \frac{1}{r} \cos(\pi r/R) + \frac{1}{r^2} \sin(\pi r/R) \right) \hat{\mathbf{r}}, \quad r < R$$

- b) Hur stort är det totala neutronflödet ut ur reaktorn?

1.7

Temperaturfördelningen i en kropp beskrivs av skalärfältet (sfäriska koordinater):

$$T(\mathbf{r}) = T_0 \left(\frac{a}{r} \right)^2 (2 + \cos \phi)$$

Punkten P har koordinaterna: $r = 2a$, $\phi = \pi/2$, $\theta = \pi/4$. I vilken riktning utgående från P växer temperaturen snabbast? Hur stor är temperaturökningen per längdenhet i denna riktning?

1.8

Temperaturen i en fast kropp med värmekonduktivitet λ beskrivs vid en viss tidpunkt av

$$T(\mathbf{r}) = T_0 \exp(-(x^2 + y^2 + z^2)/(2a^2))$$

- a) Var är värmeströmmen störst?
- b) Beräkna storlek och riktning av den maximala värmeströmmen.

1.9

En vätska strömmar i ett rakt cylindriskt rör med radien a . Enligt strömningsläran måste vätskans hastighet vid rörets yta vara $= 0$. Vätskan kan betraktas som inkompressibel, vilket innebär att $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, där $\mathbf{v}$ betecknar vätskans hastighet.

- a) Vilka av följande hastighetsfält uppfyller villkoren?

$$\mathbf{v} = v_0 ((1 - r_c/a)\hat{\mathbf{r}}_c + (1 - r_c/a)\hat{\mathbf{z}})$$

$$\mathbf{v} = v_0(1 - (r_c/a)^n)\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{v} = v_0 \left((1 - r_c/a) \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + (1 - r_c/a)\hat{\mathbf{z}} \right)$$

$$\mathbf{v} = v_0 \left((1 - r_c/a)\hat{\boldsymbol{\phi}} + (1 - (r_c/a)^n)\hat{\mathbf{z}} \right)$$

- b) Bestäm flödet genom röret för de hastighetsfält som uppfyller villkoren.
- c) Vätskan pumpas genom röret av en roterande propeller. Vilket av ovanstående hastighetsfält tror du bäst beskriver flödet?

1.10

En vattenspridare placerad i origo sänder ut vatten likformigt åt alla håll. Vattenströmtätheten $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ (enhet?) kan uttryckas med hjälp av sfäriska koordinater som $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = f(r)\hat{\mathbf{r}}$. Bestäm funktionen $f(r)$ så att vattenströmmen genom alla sfäriska ytor med centrum i $r = 0$ är A .

1.11

Det blåser sydvästlig vind överallt på jorden, styrkan är 5 m/s. Beskriv det vektorfält som beskriver vinden vid jordytan i sfäriska koordinater. Är detta fält rotationsfritt? Tänk efter och diskutera. Beräkna sedan rotationen i sfäriska koordinater! Är det samma vindriktning i Kina som i Sverige?

Vektoranalys: svar och lösningar

S1.1

a) 1 b) -1 c) 0 d) 0 e) $1/\sqrt{2}$

S1.2

a) 0 b) 0 c) -1 d) -1 e) $-1/\sqrt{2}$

S1.3

Hon startade på nordpolen. Det finns punkter nära sydpolen (var?) där hon kunde startat men där finns inga isbjörnar. Observera att detta problem visar på en singularitet hos det sfäriska koordinatsystemet. Vid polerna är inte riktningarna syd och väst entydigt definierade.

S1.4

Vektorerna i $\mathbf{A}$ pekar ut från z -axeln medan vektorerna för $\mathbf{B}$ är tangentiella till cirklar med medelpunkten på z -axeln och som ligger i ett plan med normalvektorn $\hat{z}$.

$\mathbf{A}$ är rotationsfritt medan $\mathbf{B}$ har en rotation. Följande intuitiva föreställning kan vara bra: Tänk dig vektorfältet som en vindstyrka. Cykla runt en sluten kurva. Har du lika mycket mot- som medvind så är rotationen noll.

I cylinderkoordinater kan fälten skrivas

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = r_c \hat{\mathbf{r}}_c$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = r_c \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

S1.5

Linjeintegralen av $\mathbf{C}$ längs en sluten cirkel ges av

$$\oint \mathbf{C}(\mathbf{r}) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_0^{2\pi} f(r_c) r_c^2 d\phi = 2\pi f(r_c) r_c^2$$

För att integralen skall bli konstant skall vi alltså välja $f(r_c) = \text{konstant}/r_c^2$.

Om vi väljer en annan sluten kurva kan vi utnyttja Stokes sats. Eftersom

$$\nabla \times \mathbf{C}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{z}} \frac{1}{r_c} \frac{\partial}{\partial r_c} (r_c f(r_c) r_c) = \mathbf{0}$$

så är linjeintegralen längs varje sluten kurva noll om den inte omsluter z -axeln. Om kurvan omsluter z -axeln så är linjeintegralen lika med $2\pi \cdot \text{konstant}$

S1.6

a)

b) Totala neutronflödet fås genom att integrera över den sfäriska ytan $r = R$:
 $I = \oint \mathbf{j}(r) \cdot d\mathbf{a} = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{j}(r) 4\pi R^2 = 4A\pi^2.$

S1.7

Temperaturen växer snabbast i samma riktning som $\nabla T(\mathbf{r})$ pekar. I sfäriska koordinater gäller

$$\begin{aligned} \nabla T(\mathbf{r}) &= \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial T(\mathbf{r})}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T(\mathbf{r})}{\partial \phi} \\ &= -T_0 2 \frac{a^2}{r^3} (2 + \cos \phi) \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r \sin \theta} T_0 \frac{a^2}{r^2} \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned}$$

I punkten P gäller

$$\nabla T(\mathbf{r}) = -T_0 \frac{1}{2a} \hat{\mathbf{r}} - T_0 \frac{1}{4a\sqrt{2}} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Temperaturen växer alltså snabbast i riktningen

$$\hat{\mathbf{p}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) = \frac{1}{3} (\hat{\mathbf{x}} - 2\hat{\mathbf{y}} - 2\hat{\mathbf{z}})$$

Temperaturökningen per längdenhet i riktningen $\hat{\mathbf{p}}$ ges av $|\nabla T(\mathbf{r})| = \frac{T_0}{a} \frac{3}{4\sqrt{2}}.$

S1.8

Värmeströmmen ges av $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\lambda \nabla T(\mathbf{r}) = \lambda \mathbf{r} \frac{T_0}{a^2} \exp(-(x^2 + y^2 + z^2)/(2a^2)).$

a) Vi skriver detta i sfäriska koordinater:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\lambda \nabla T(\mathbf{r}) = \lambda \hat{\mathbf{r}} \frac{T_0}{a^2} r \exp(-r^2/(2a^2)) = \hat{\mathbf{r}} f(r)$$

Värmeströmmen har ett extremvärde när $f'(r) = 0$ vilket sker då $r = a$. Man ser att detta är en maxpunkt eftersom värmeströmmen är positiv överallt och dessutom noll för $r = 0$ och $r = \infty$. Maximal värmeström fås alltså på sfären $r = a$.

b) $\mathbf{j}_{\max} = \lambda \frac{T_0}{a} \exp(-0.5) \hat{\mathbf{r}}$

S1.9

- a) Det andra och fjärde fältet är divergensfritt.
- b) Båda det andra och fjärde alternativet ger flödet $v_0 \pi a^2 n / (n + 2)$.
- c) Propellerns rörelse kommer att rotera vätskan i ϕ -led samtidigt som den rör sig framåt i z -led. Det är det fjärde alternativet som bäst motsvarar detta.

S1.10

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{A}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

S1.11

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 5/\sqrt{2}(-\hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{\phi}})$$

Fältet är inte rotationsfritt (se förklaringen till uppgift 2). Matematiskt fås

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{5}{r\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{r}} \cotan \theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\phi}})$$

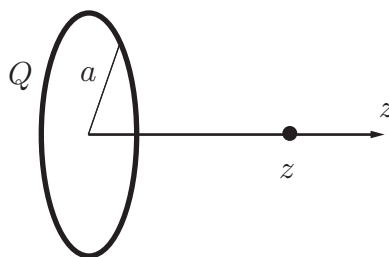
2 Elektrostatik

2.1

Fyra punktladdningar med lika stora laddningar q är placerade i x - y -planet i punkterna (a, a) , $(a, -a)$, $(-a, a)$ och $(-a, -a)$.

- Bestäm kraften på laddningen i punkten $(x, y) = (a, a)$.
- Genom att placera ut ytterligare en punktladdning kan man få att totala kraften på var och en av de fem laddningarna är noll. Ange var laddningen skall placeras och laddningens styrka.

2.2



Du skall bestämma den elektriska fältstyrkan $\mathbf{E}$ i punkten $(0, 0, z)$ ($z > 0$) från en laddad cirkulär slinga som ligger i planet $z = 0$ med z -axeln som symmetriaxel. Slingan har radien a och har en jämnt fördelad totalladdning Q , enligt figur. I detta fall bör man använda Coulombs lag

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\rho_\ell(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\ell'$$

- Ange, utan att räkna, åt vilket håll $\mathbf{E}$ är riktat?
- Vilket koordinatsystem är lämpligt att använda?
- Parameterframställ kurvan C .
- Vad är $\mathbf{r}$ i detta fall? Vad kallas denna punkt?
- Vad är vektorn $\mathbf{r}'$ uttryckt i det valda koordinatsystemet? Vad kallas denna punkt?
- Vad är $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$?
- Ge ett lämpligt uttryck för linjeelementet $d\ell'$.
- Bestäm linjeladdningstätheten $\rho_\ell(\mathbf{r}')$.

i) Bestäm

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

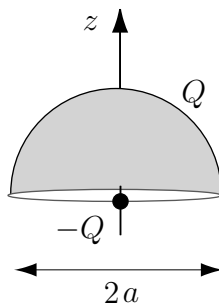
j) Beräkna integralen

$$\int_0^{2\pi} \hat{\mathbf{r}}'_c d\phi'$$

k) Vad blir $\mathbf{E}(0, 0, z)$?

l) Vad blir det dominerande bidraget på $\mathbf{E}(0, 0, z)$ på stora avstånd z från ringen?

2.3



Ett halvfäriskt skal med radien a har konstant ytladdningstäthet. Skalets totala laddning är Q . Bestäm kraften på en punktladdning $-Q$ som befinner sig i skalets centrum.

2.4

Två koncentrisk sfäriska metallskal har radierna a respektive $2a$. Det inre skalet har potentialen V_0 och det yttre skalet är jordat. I områdena $r < a$, $a < r < 2a$ och $r > 2a$ är det vakuum.

a) Bestäm potentialen $V(r)$ överallt.

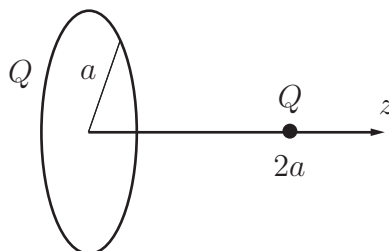
b) Bestäm laddningen på det yttre och inre skalet.

2.5

Kanterna i en kub består av tunna stavar med konstant linjeladdningstäthet ρ_0 . Inuti och utanför kuben är det vakuum.

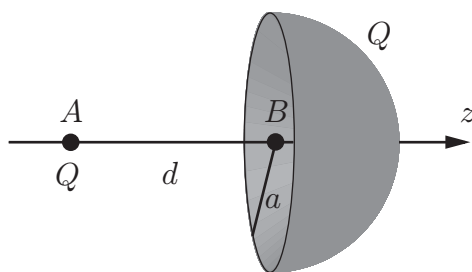
- Bestäm potentialen i kubens centrum.
- Bestäm elektriska fältet i kubens centrum.

2.6



En tunn, cirkulär ring med radie a är uppladdad med en jämnt fördelad totalladdning Q . På ringens symmetriaxel, på avståndet $2a$ från ringens centrum, finns ett litet metallklot (radie $\ll a$). Metallklotet har den totala laddningen Q . Hur stort yttre arbete W krävs för att föra metallklotet till ringens centrum.

2.7

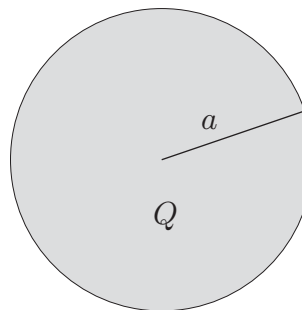


Ett halvfäriskt skal med radien a är uppladdat med konstant ytladdningstäthet. Skalets totala laddning är Q . Hur stort arbete krävs för att föra en punktladdning Q från en punkt A , $(0, 0, -d)$, på halvsfärens symmetriaxel till dess centrum B , $(0, 0, 0)$?

2.8

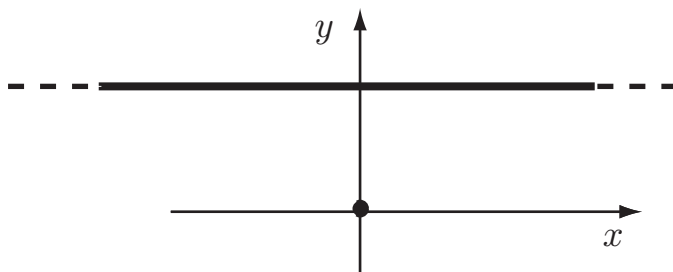
Bestäm det elektriska fältet överallt i rummet från en homogent uppladdad sfär med radie a . Sfärens totala laddning är Q . Lös uppgiften med följande metoder:

- Gauss lag
- Bestäm potentialen V med Poissons ekvation, och därefter det elektriska fältet
- Coulombs lag
- Bestäm potentialen V genom integration över laddningsfördelningen, och därefter det elektriska fältet



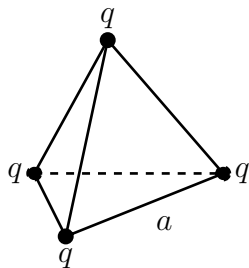
Vilken metod gav dig svaret snabbast?

2.9



Två oändligt långa raka trådar med samma linjeladdningstäthet ρ_l är uppspända så att de är vinkelräta mot varandra, se figur. Bestäm kraften på den övre tråden om det är vakuum i området kring trådarna.

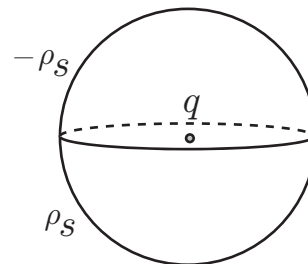
2.10



Beräkna den totalt upplagrade elektrostatiska energin för en konfiguration av 4 identiska punktladdningar (laddning q) i vakuum arrangerade i hörnen av en tetraeder med sida a .

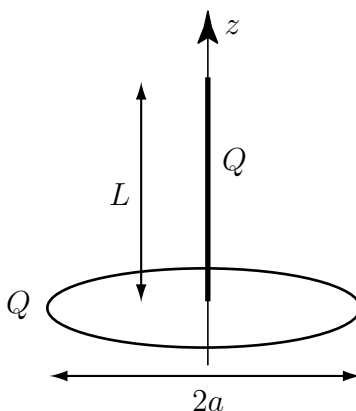
2.11

Ett sfäriskt skal med radien R består av två sammansatta halvsfäriska skal. Den undre halvsfären har en konstant positiv ytladdningstäthet ρ_S och den övre en konstant negativ ytladdningstäthet $-\rho_S$, se figur. I centrum av sfären placeras en liten partikel med den positiva laddningen q och massan m . Partikeln utsätts inte för andra krafter än den elektriska kraften. Det råder vakuum i de laddningsfria områdena.



- Kommer partikeln att röra sig uppåt, nedåt eller stå stilla? Ge en kortfattad motivering.
- Är partikelns elektrostatiske energi positiv, negativ eller noll då den befinner sig i centrum? Ge en kortfattad motivering.
- Vad blir partikelns acceleration $\mathbf{a}$ då den befinner sig i centrum? Uttryck accelerationsvektorn i kända storheter.

2.12



En homogent laddad stav med totalladdningen Q sträcker sig längs z -axeln från origo och upp till $z = L$. I planet $z = 0$ befinner sig en homogent laddad ring med totalladdningen Q och radien $r_c = a$. Det råder vakuum runt laddningarna. Bestäm den elektriska kraften på staven.

2.13

Ett sfäriskt område med radien a är omgivet av vakuum. Området har rymdladdningstätheten

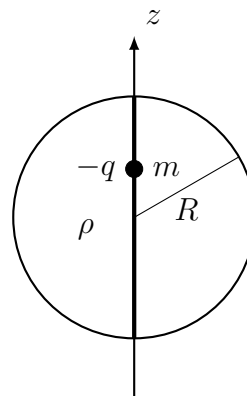
$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{a}\right)^2$$

Bestäm elektrostatiske energin i systemet!

2.14

Ett sfäriskt klot har den konstanta positiva rymdladdningstätheten ρ och radien R . En liten partikel med massan m och negativa laddningen $-q$ släpps från vila vid klotets yta. Vi antar att partikeln kan färdas genom klotet utan motstånd.

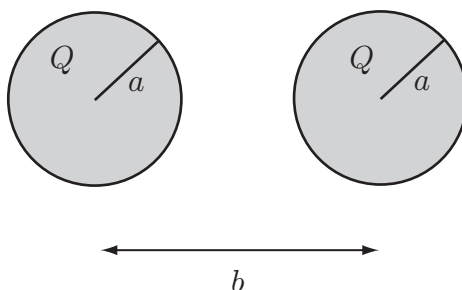
- Bestäm det elektriska fältet i klotet längs z -axeln, $-R < z < R$.
- Sätt upp rörelseekvationen för den negativa laddningen $-q$.
- Vilken typ av rörelse beskriver denna ekvation? Antag t.ex. att partikeln släpps vid tiden $t = 0$.
- Hur lång tid tar det för partikeln att återvända till utgångsläget.



2.15

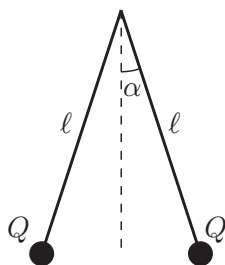
I detta problem ska vi beräkna den potentiella energin för en valenselektron i en atom. Vi betraktar en alkaliatom där valenselektronen är ensam utanför de slutna inre elektronskalen. I en enkel modell påverkas valenselektronen av kärnans laddning Ze och av ett homogent laddat klot med totalladdningen $-(Z - 1)e$ och radien R . Bestäm, t ex genom att lösa Poissons ekvation, den potentiella energin för valenselektronen som funktion av avståndet från den punktformiga kärnan.

2.16



Två identiska klot (radie a , separerade med avståndet b) är omgivna av vakuum. Kloten är laddade med en konstant rymdladdningsfördelning i vakuum, som ger en total laddning Q i vardera klotet. Bestäm systemets totala elektrostatiska energi.

2.17



Två små kulor har vardera laddningen Q och massan m . Kulorna är upphängda i trådar med längden ℓ enligt figuren ovan. Bestäm ett approximativt uttryck på vinkeln α mellan trådarna då denna är liten.

Elektrostatik: svar och lösningar

S2.1

- a) Kraften fås genom superposition av Coulombs lag

$$\mathbf{F} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_3|^3} \right)$$

där $\mathbf{r} = (a, a)$, $\mathbf{r}_1 = (a, -a)$, $\mathbf{r}_2 = (-a, a)$ och $\mathbf{r}_3 = (-a, -a)$. Detta ger

$$\mathbf{F} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(\frac{(0, 2)}{8} + \frac{(2, 0)}{8} + \frac{(2, 2)}{16\sqrt{2}} \right) = \frac{q^2(2\sqrt{2} + 1)}{4\pi\epsilon_0 8\sqrt{2}a^2} (1, 1)$$

- b) Genom att placera en laddning,
- Q
- , i origo kan man få att totala kraften på varje laddning blir noll. Laddningens styrka fås av att

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_- = \mathbf{0}$$

där $\mathbf{F}$ är kraften i a-uppgiften och $\mathbf{F}_-$ är kraften på laddningen i punkten (a, a) från den negativa laddningen. Eftersom

$$\mathbf{F}_- = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 2\sqrt{2}a^2} (1, 1)$$

så måste gälla att

$$Q = -q \frac{(2\sqrt{2} + 1)}{4}$$

S2.2

- a) Positiv z -led om $Q > 0$ och i negativ z -led om $Q < 0$.
- b) Cylinderkoordinater (r_c, ϕ, z) .
- c) $\mathbf{r}'(\phi') = \hat{\mathbf{x}}a \cos \phi' + \hat{\mathbf{y}}a \sin \phi'$, där $\phi' \in [0, 2\pi]$.
- d) $\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{z}}$. Fältpunkt.
- e) $\mathbf{r}' = a\hat{\mathbf{r}}'_c = \hat{\mathbf{x}}a \cos \phi' + \hat{\mathbf{y}}a \sin \phi'$. Källpunkt.
- f) $\sqrt{a^2 + z^2}$
- g) $d\ell' = a d\phi'$. Man kan få detta genom att se hur punkten (längden av) $\mathbf{r}'$ flyttar sig om man ändrar vinkeln ϕ' ett inkrement $d\phi'$. Ett annat alternativ är att utnyttja

$$d\ell' = \left| \frac{d\mathbf{r}'}{d\phi'} \right| d\phi' = |-\hat{\mathbf{x}}a \sin \phi' + \hat{\mathbf{y}}a \cos \phi'| d\phi' = a d\phi'$$

Den sistnämnda sättet fungerar alltid om man parameterframställt kurvan.

h) $\rho_\ell(\mathbf{r}') = Q/(2\pi a)$

i)

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{z\hat{\mathbf{z}} - a\hat{\mathbf{r}}'_c}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

j)

$$\int_0^{2\pi} \hat{\mathbf{r}}'_c d\phi' = \int_0^{2\pi} (\hat{\mathbf{x}} \cos \phi' + \hat{\mathbf{y}} \sin \phi') d\phi' = \mathbf{0}$$

k)

$$\mathbf{E}(0, 0, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\rho_\ell(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\ell' = \frac{Qz\hat{\mathbf{z}}}{4\pi\epsilon_0(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

l)

$$\mathbf{E}(0, 0, z) = \frac{Qz\hat{\mathbf{z}}}{4\pi\epsilon_0(a^2 + z^2)^{3/2}} \approx \frac{Q\hat{\mathbf{z}}}{4\pi\epsilon_0 z^2}$$

Stämmer med fältet från en punktladdning Q .

S2.3

Ytladdningen är konstant och ligger på en halvsfär med radien a och ges av

$$\rho_S = \frac{Q}{2\pi a^2}$$

Det elektriska fältet från en ytladdning ρ_S ges av

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \rho_S \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS'$$

Eftersom $\mathbf{r}' = a\hat{\mathbf{r}}' = a(\hat{\mathbf{x}} \sin \theta \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta \sin \phi + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta)$ och $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ fås

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{0}) &= -\frac{\rho_S}{4\pi\epsilon_0 a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \hat{\mathbf{r}}' a^2 \sin \theta d\theta d\phi = -\frac{\rho_S}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \int_0^{\pi/2} \hat{\mathbf{z}} \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \int_0^1 \hat{\mathbf{z}} \cos \theta d\cos \theta = -\frac{\rho_S}{4\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Kraften ges av $\mathbf{F} = -Q\mathbf{E}(\mathbf{0})$. Insättning av uttrycket för ρ_S ger

$$\mathbf{F} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a^2} \hat{\mathbf{z}}$$

S2.4

- a) Entydighet ger att $V(r) = V_0$ för $r < a$ och $V(r) = 0$ för $r > 2a$. Antag en laddning Q_i på sfären $r = a$. Gauss lag ger då att

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

I området $a < r < 2a$ ges $V(r)$ av

$$V(r) = V_0 - \int_a^r E(r) \, dr = V_0 + \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Eftersom $V(2a) = 0$ fås $Q_i = 8\pi\epsilon_0 a V_0$. Därmed fås

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & r \leq a \\ V_0 \left(\frac{2a}{r} - 1 \right) & a < r < 2a \\ 0 & r > 2a \end{cases}$$

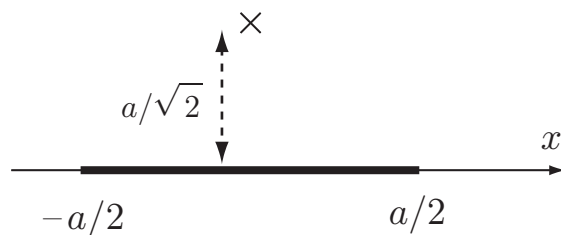
- b) Enligt a) fås att den inre sfären har laddningen

$$Q_i = 8\pi\epsilon_0 a V_0$$

Eftersom potentialen är noll utanför de båda sfärerna ger Gauss lag att totala laddningen för de båda sfärerna är noll. Den yttre sfären har då laddningen

$$Q_y = -Q_i = -8\pi\epsilon_0 a V_0$$

S2.5



Låt kubens kant ha längden a .

- a) Symmetrin gör att alla stavarna ger lika stora bidrag till potentialen. Avståndet från stavens mittpunkt till kubens mittpunkt är $a/\sqrt{2}$. Potentialen från en stav ges av

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2/2}} \, dx = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} [\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2/2})]_{-a/2}^{a/2} \\ &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \ln(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Kuben har 12 stavar och totala potentialen ges därmed av

$$V = 12\Delta V = \frac{3\rho_0}{\pi\epsilon_0} \ln(2 + \sqrt{3})$$

b) Av symmetriskäl är $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ i kubens centrum.

S2.6

Potentialen i en punkt på symmetriaxeln ges av

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{a \, d\phi}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + a^2}}$$

Om det lilla metallklotet betraktas som en punktkälla, blir arbete W :

$$W = Q(V(0) - V(2a)) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

S2.7

Halvsfärens konstanta ytladdningstäthet ρ_S ges av

$$\rho_S = \frac{Q}{2\pi a^2}$$

Potentialen i punkten A på avståndet d från sfärens centrum längs dess symmetriaxel ges av (fältpunkt $\mathbf{r} = -d\hat{\mathbf{z}}$, källpunkt $\mathbf{r}' = a\hat{\mathbf{r}}'$, vilket medför inbördes avstånd

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{d^2 + a^2 + 2ad \cos \theta'}$$

och $dS' = a^2 \sin \theta' \, d\phi' \, d\theta'$)

$$V(A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\text{Halvsfär}} \frac{\rho_S \, dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{a^2 \sin \theta' \, d\phi' \, d\theta'}{\sqrt{d^2 + a^2 + 2ad \cos \theta'}}$$

Evaluera integralerna

$$\begin{aligned} V(A) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta' \, d\theta'}{\sqrt{d^2 + a^2 + 2ad \cos \theta'}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{d^2 + a^2 + 2adx}} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 ad} \left(a + d - \sqrt{d^2 + a^2}\right) \end{aligned}$$

Potentialen i centrum i punkten B ges på liknande sätt av (enkla: tag gränsen $d \rightarrow 0$ i potentialuttrycket ovan)

$$V(B) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d} \left(1 + \frac{d}{a} - \sqrt{1 + \frac{d^2}{a^2}}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Arbetet W att föra punktladdningen från A till B blir

$$W = Q(V(B) - V(A)) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 ad} \left(\sqrt{d^2 + a^2} - a\right)$$

S2.8

- a) Problemet har sfärisk symmetri, vilket medför att det elektriska fältet endast kan ha utseendet $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\hat{\mathbf{r}}$. Gauss lag

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = Q_{\text{enc.}}/\varepsilon_0$$

beräknas gör en sfärisk yta S med radie r . Det vänstra ledet blir $(\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = E(r)\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = E(r))$

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 4\pi r^2 E(r)$$

och den inneslutna laddningen $Q_{\text{enc.}}$ i det högra ledet

$$Q_{\text{enc.}} = \begin{cases} Qr^3/a^3, & r \leq a \\ Q, & r \geq a \end{cases}$$

Det elektriska fältet blir

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\hat{\mathbf{r}} = \frac{Q_{\text{enc.}}\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \begin{cases} \frac{Qr\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\varepsilon_0 a^3}, & r \leq a \\ \frac{Q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r \geq a \end{cases}$$

- b) Poissons ekvation

$$\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$$

där laddningstätheten ρ är

$$\rho = \frac{Q}{4\pi a^3/3}$$

Potentialen kan p.g.a. den sfäriska symmetrin endast bero på radien r . Randvärdesproblemet blir

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV(r)}{dr} \right) = \begin{cases} -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, & r \leq a \\ 0, & r \geq a \end{cases} \\ V \text{ ändlig överallt} \\ V(r = a^-) = V(r = a^+) \\ \left. \frac{dV(r)}{dr} \right|_{r=a^-} = \left. \frac{dV(r)}{dr} \right|_{r=a^+} \\ V(r \rightarrow \infty) = 0 \text{ (jord)} \end{cases}$$

Lösningen är

$$V(r) = \begin{cases} \rho \frac{3a^2 - r^2}{6\epsilon_0} = Q \frac{3a^2 - r^2}{8\pi\epsilon_0 a^3}, & r \leq a \\ \rho \frac{a^3}{3\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r \geq a \end{cases}$$

och det elektriska fältet

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(r) = \begin{cases} \frac{Qr\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 a^3}, & r \leq a \\ \frac{Q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r \geq a \end{cases}$$

c) Med Coulombs lag skall följande integral beräknas:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{r \leq a} \frac{\rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' = \frac{3Q}{16\pi^2\epsilon_0 a^3} \iiint_{r \leq a} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

På grund av symmetrin räcker det att beräkna fältet på positiva z -axeln ($\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{z}}$). Integralen löses i det sfäriska koordinatsystemet.

$$\iiint_{r \leq a} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a \frac{r\hat{\mathbf{z}} - r'\hat{\mathbf{r}}'}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta')^{3/2}} r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\phi'$$

med lösning

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a \frac{r\hat{\mathbf{z}} - r'\hat{\mathbf{r}}'}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta')^{3/2}} r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\phi' \\ &= \hat{\mathbf{z}} 2\pi \int_{-1}^1 \int_0^a \frac{r - r't}{(r^2 + r'^2 - 2rr't)^{3/2}} r'^2 dr' dt \\ &= \hat{\mathbf{z}} 2\pi \int_0^a \left(\frac{r - r'}{rr'|r - r'|} - \frac{1}{rr'} - \frac{|r - r'|}{r^2 r'} + \frac{r + r'}{r^2 r'} \right) r'^2 dr' = \hat{\mathbf{z}} 2\pi \begin{cases} \frac{2r}{3}, & r \leq a \\ \frac{2a^3}{3r^2}, & r \geq a \end{cases} \end{aligned}$$

som ger

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{Qr\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 a^3}, & r \leq a \\ \frac{Q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r \geq a \end{cases}$$

d) Om vi först väljer att bestämma potentialen V mha. integraluttrycket

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{r \leq a} \frac{\rho}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' = \frac{3Q}{16\pi^2\epsilon_0 a^3} \iint_{r \leq a} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

får vi p.s.s. ovan

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \frac{3Q}{16\pi^2\epsilon_0 a^3} \iint_{r \leq a} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \\ &= \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 a^3} \int_0^\pi \int_0^a \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta')^{1/2}} r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' \\ &= -\frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 r a^3} \int_0^a (|r - r'| - (r + r')) r' dr' = \begin{cases} Q \frac{3a^2 - r^2}{8\pi\epsilon_0 a^3}, & r \leq a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r \geq a \end{cases} \end{aligned}$$

och det elektriska fältet

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(r) = \begin{cases} \frac{Qr\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 a^3}, & r \leq a \\ \frac{Q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r \geq a \end{cases}$$

S2.9

Gauss lag ger att det elektriska fältet från den undre tråden ges av

$$\mathbf{E}(x, y) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{\mathbf{y}} \right)$$

Antag att den övre tråden ligger på avståndet a ovanför den undre. Kraften på den övre tråden ges av

$$\mathbf{F} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_l \mathbf{E}(x, a) dx$$

Detta ger

$$\mathbf{F} = \frac{\rho_l^2}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx \hat{\mathbf{y}} = \frac{\rho_l^2}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{y}}$$

Lägg märke till att slutresultatet är oberoende av a .

S2.10

Det totala arbetet ges av

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^4 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 qV_i$$

där V_i är potentialen i punkten $\mathbf{r}_i$ från laddningarna i de övriga 3 punkterna. På grund av symmetri blir bidragen från alla punkter lika och det räcker att beräkna potentialen i en av punkterna.

$$V_i = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

vilket ger

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 qV_i = \frac{3q^2}{2\pi\epsilon_0 a}$$

Alternativ lösning: Addera bidragen till energin där laddningarna läggs till samlingen en efter en.

Att lägga dit den första laddningen kräver ingen energi. Den andra laddningen skall läggas till i potentialen av den första, vilken på avståndet a är

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Energien för två laddningar blir

$$W_2 = qV_1 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Den tredje laddningen skall läggas till i potentialen av de två tidigare laddningarna, dvs. i potentialen

$$V_2 = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Energien för tre laddningar blir

$$W_3 = qV_2 + W_2 = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Den sista laddningen läggs till i potentialen

$$V_3 = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Den slutliga energin blir

$$W = W_4 = qV_3 + W_3 = \frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{3q^2}{2\pi\epsilon_0 a}$$

S2.11

- a) Laddningen attraheras av den negativa halvsfären och repelleras av den positiva och rör sig därför uppåt.
- b) Av symmetriskäl är potentialen noll i centrum, $V = 0$. Den elektrostatiske energin ges av qV och därmed är laddningens elektrostatiske energi noll i centrum.
- c) Det elektriska fältet ges i centrum av följande ytintegral

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{0}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_S(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{r}}'}{R^2} dS' \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \rho_S \hat{\mathbf{r}}' \sin \theta' d\theta' - \int_{\pi/2}^{\pi} \rho_S \hat{\mathbf{r}}' \sin \theta' d\theta' \right) d\phi' \\
 &= \hat{\mathbf{z}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \left(\int_0^{\pi/2} \rho_S \cos \theta' \sin \theta' d\theta' - \int_{\pi/2}^{\pi} \rho_S \cos \theta' \sin \theta' d\theta' \right) = \hat{\mathbf{z}} \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}
 \end{aligned}$$

Här har utnyttjats att endast z -komponenten av det elektriska fältet är skild från noll, att $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \cos \theta$ och att

$$\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{2}$$

Kraften på partikeln ges av $\mathbf{F} = q\mathbf{E}(\mathbf{0})$, därmed blir accelerationen

$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{z}} \frac{q\rho_S}{2m\epsilon_0}$$

S2.12

Fältet på symmetriaxeln av en cirkulär slinga med laddning Q ges av

$$\mathbf{E}(0, 0, z) = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}$$

Kraften på en bit dz blir $\rho_l \mathbf{E}(0, 0, z) dz$. Totala kraften ges av

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \int_0^L \frac{Q^2 z}{4\pi\epsilon_0 L (z^2 + a^2)^{3/2}} dz \hat{\mathbf{z}} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L} \left[\frac{-1}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right]_0^L \hat{\mathbf{z}} \\
 &= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + a^2}} \right) \hat{\mathbf{z}}
 \end{aligned}$$

S2.13

Den sfäriska symmetrin ger att $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\hat{\mathbf{r}}$. Gauss lag ger

$$E(r)4\pi\epsilon_0 r^2 = \int_0^r \rho(r)4\pi r^2 dr \Rightarrow E(r) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \begin{cases} \frac{r^3}{5a^2} & r < a \\ \frac{a^3}{5r^2} & r > a \end{cases}$$

Energien ges av $W = \frac{\epsilon_0}{2} \int (E(r))^2 dV$ vilket ger

$$W = 2\pi\epsilon_0 \int_0^\infty (E(r))^2 r^2 dr = \frac{2\pi\rho_0^2}{25\epsilon_0} \left(\int_0^a \frac{r^8}{a^4} dr + \int_a^\infty \frac{a^6}{r^2} dr \right) = \frac{4\pi\rho_0^2 a^5}{45\epsilon_0}$$

S2.14

a) Det elektriska fältet längs z -axeln blir mha. Gauss lag

$$\mathbf{E}(z) = \frac{r\hat{\mathbf{r}}\rho}{3\epsilon_0} = \frac{\mathbf{r}\rho}{3\epsilon_0}$$

b) Rörelseekvationen (Newtons II lag) blir

$$m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -q \frac{z(t)\rho}{3\epsilon_0}$$

c) Differentialekvationen beskriver en harmonisk rörelse

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \omega^2 z(t) = 0$$

där $\omega = \sqrt{q\rho/(3m\epsilon_0)}$. Om laddningen släpps från vila vid tiden $t = 0$ fås $z(t) = R \cos \omega t$.

d) Perioden $T = 2\pi/\omega$ blir

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3m\epsilon_0}{q\rho}}$$

S2.15

Valenselektronens potentiella energi ges av $-eV(r)$ där $V(r)$ är potentialen från atomkärnan och de övriga elektronerna. Kärnan är punktläk och därmed är dess potential

$$V_1(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Potentialen från elektronmolnet kan vi få genom att lösa Poissons ekvation

$$\nabla^2 V_2(r) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} = \begin{cases} -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} & \text{om } r < R \\ 0 & \text{om } r > R \end{cases}$$

där $\rho_0 = -\frac{3(Z-1)e}{4\pi R^3}$. I sfäriska koordinater är

$$\nabla^2 V_2(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V_2(r)}{\partial r} \right)$$

Genom att integrera Poissons ekvation för $r < R$ två gånger och utnyttja att $V_2(r)$ är begränsad i origo fås

$$V_2(r) = -\frac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} + C, \quad r < R$$

där C är en integrationskonstant. För $r > R$ ges $V_2(r)$ av potentialen från en punktladdning med laddning $-(Z-1)e$, dvs

$$V_2(r) = -\frac{(Z-1)e}{4\pi\varepsilon_0 r}, \quad r > R$$

Eftersom $V_2(r)$ är kontinuerlig över randen $r = R$ är $C = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}$. Den potentiella energin ges dämed av

$$W_p(r) = \begin{cases} -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{(Z-1)e^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3} (r^2 - 3R^2) & \text{om } r < R \\ -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} & \text{om } r > R \end{cases}$$

S2.16

Systemets totala elektostatiska energi ges som en summa av tre termer.

$$W_e = W_{e1} + W_{e2} + W_{e3}$$

där $W_{e1} = W_{e2}$ är energin hos ett ensamt laddat klot omgivet av vakuum, och W_{e3} är energibidraget från växelverkan mellan kloten.

Vi beräknar först W_{e1} mha. Gauss lag. Klotens rymdladdningstäthet ρ fås genom

$$\frac{4\pi a^3 \rho}{3} = Q \quad \implies \quad \rho = \frac{3Q}{4\pi a^3}$$

Det elektriska fältet från ett ensamt laddat klot har av symmetriskäl endast en radiell komponent och fältet beror endast på avståndet r från origo, dvs.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\hat{\mathbf{r}}$$

Funktionsberoendet hos $E(r)$ ges av Gauss lag. Vi får följande (S en sfärisk yta med radie r):

$$\iint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = Q_{\text{enc}}/\varepsilon_0 \implies \mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\hat{\mathbf{r}} = \frac{Q_{\text{enc}}\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Den inneslutna (fria) laddningen är

$$Q_{\text{enc}} = \begin{cases} \frac{4\pi r^3 \rho}{3} = Q \frac{r^3}{a^3}, & 0 \leq r \leq a \\ Q, & a < r \end{cases}$$

Detta ger det elektriska fältet, $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\hat{\mathbf{r}}$, där

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \begin{cases} \frac{r^3}{a^3}, & 0 \leq r \leq a \\ 1, & a < r \end{cases}$$

Den totala elektrostatiska energin W_{el} blir

$$\begin{aligned} W_{\text{el}} &= \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}|^2 \, dv = \frac{4\pi}{2} \frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0} \left\{ \int_0^a \left(\frac{r^3}{a^3} \right)^2 \frac{1}{r^4} r^2 \, dr + \int_a^\infty \frac{1}{r^4} r^2 \, dr \right\} \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{a^6} \int_0^a r^4 \, dr + \frac{1}{a} \right\} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{5a} + \frac{1}{a} \right\} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{6}{5a} \end{aligned}$$

eller

$$W_{\text{el}} = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 a}$$

Alternativ lösning: Utgå från

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \iiint \rho V \, dv = \frac{4\pi\rho}{2} \int_0^a V(r)r^2 \, dr = \frac{3Q}{2a^3} \int_0^a V(r)r^2 \, dr$$

där potentialen $V(r) = \int_r^\infty E(r') \, dr'$ är

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{a^2 - r^2}{2a^3} = \frac{3a^2 - r^2}{2a^3}, & 0 \leq r \leq a \\ 1/r, & a < r \end{cases}$$

eller via Poissons ekvation

$$\nabla^2 V(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV(r)}{dr} \right) = \begin{cases} -\rho/\varepsilon_0, & 0 \leq r \leq a \\ 0, & a < r \end{cases}$$

med lösning (V och $\frac{d}{dr}V$ kontinuerliga vid gränsen $r = a$)

$$V(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} \begin{cases} 3a^2 - r^2, & 0 \leq r \leq a \\ 2a^3/r, & a < r \end{cases} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^3} \begin{cases} 3a^2 - r^2, & 0 \leq r \leq a \\ 2a^3/r, & a < r \end{cases}$$

Den elektrostatiska energin blir

$$\begin{aligned} W_{e1} &= \frac{3Q}{2a^3} \int_0^a V(r) r^2 dr = \frac{3Q^2}{16\pi\epsilon_0 a^6} \int_0^a (3a^2 r^2 - r^4) dr \\ &= \frac{3Q^2}{16\pi\epsilon_0 a} \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 a} \end{aligned}$$

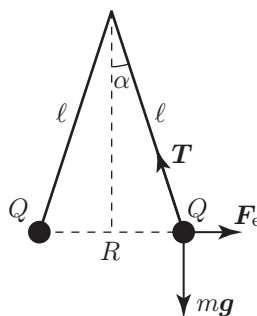
Vi övergår till beräkningen av växelverkansenergin, som är densamma som den elektrostatiska energin mellan två punktladdningar Q separerade med avståndet b , dvs.

$$W_{e3} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 b}$$

Totalt får vi

$$W_e = 2W_{e1} + W_{e3} = \frac{3Q^2}{10\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 b}$$

S2.17



Den högra kulan friläggs enligt ovan ($\mathbf{T}$ betecknar spännkraften i tråden). Enligt Coulombs lag är

$$F_e = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 (2\ell \sin \alpha)^2}$$

Kraftjämvikt i horisontell led och vertikal led ger

$$\begin{cases} F_e - T \sin \alpha = 0 \\ mg - T \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

Vi eliminerar T och erhåller

$$\tan \alpha = \frac{F_e}{mg} = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0\ell^2mg\sin^2\alpha}$$

eller ekvivalent

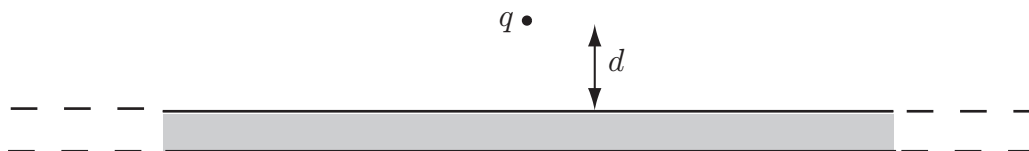
$$\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha} = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0\ell^2mg}$$

För små α är $\cos\alpha \approx 1$ och $\sin\alpha \approx \alpha$ varför

$$\alpha \approx \left(\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0\ell^2mg} \right)^{1/3}$$

3 Speciella lösningsmetoder

3.1



En punktladdning q befinner sig på avståndet d rakt ovanför en mycket stor metallskiva. Skivan har tjockleken t och är jordad. Området runt skivan är luft.

- Skissera fältlinjerna i området mellan laddningen och metallplattan.
- Vad blir skivans totala laddning?
- Var befinner sig denna laddning och vilken typ av laddning är det (rymd-, yt-, linje- eller punktladdning)?
- Vad blir kraften på skivan?
- Vad är det elektriska fältet inuti skivan?
- Vad är det elektriska fältet i punkten rakt under q men strax ovanför metalltan?
- Vad är ytladdningstätheten på den övre ytan i punkten rakt under q ?
- Vad är det elektriska fältet under skivan?

3.2

Ett homogent laddat klot har totala laddningen q . Klotets radie är $d/2$ och det befinner sig på avståndet d rakt ovanför en mycket stor metallskiva. Skivan har tjockleken $d/2$ och är jordad. Området runt skivan är luft.

- Ovanför den övre metallytan är fältbilden densamma som om man inför en spegelladdningsfördelning för klotet. Hur ser denna spegelladdningsfördelning ut och var skall man lägga den?
- Svara på frågorna a)–h) i uppgift 3.1.

3.3

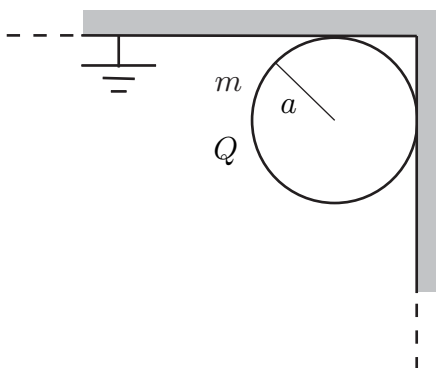
En punktladdning med laddning Q befinner sig på höjden $2h$ ovanför ett stort jordat metallplan. Rakt under Q befinner sig en annan punktladdning med laddning $q \neq 0$ på höjden h ovanför planet. Bestäm laddningen q så att kraften på den är noll. Ovanför jordplanet är det vakuum och det verkar endast elektriska krafter på laddningarna.

3.4

En punktladdning q befinner sig på avståndet h från ett jordat, oändligt stort, ledande plan.

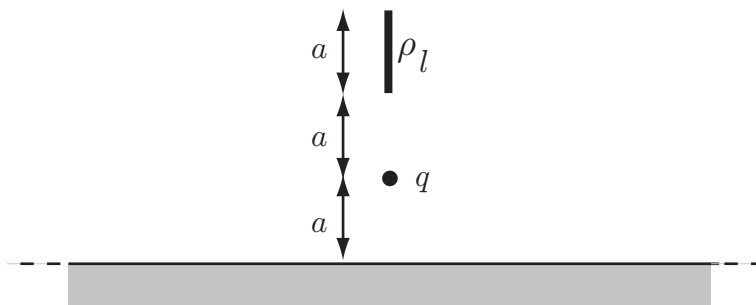
- Bestäm kraften $\mathbf{F}$ på laddningen till storlek och riktning.
- Hur mycket energi krävs för att förflytta laddningen till avståndet $2h$ från planet?

3.5



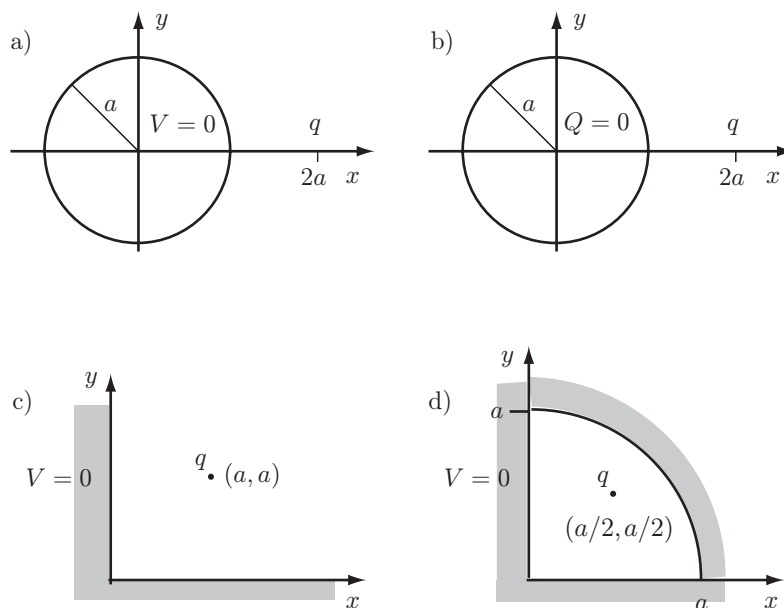
En ballong har blivit uppladdad genom att den gnidits mot en tröja. Ballongen har fastnat mot taket vid kanten till en vägg enligt figur. Antag att ballongen är en sfär med radien a och massan m . Taket och väggen kan antas ha potentialen noll och ballongens laddning antas vara jämnt fördelad över dess yta. Hur stor laddning, Q , på ballongen krävs för vidhäftning vid taket?

3.6



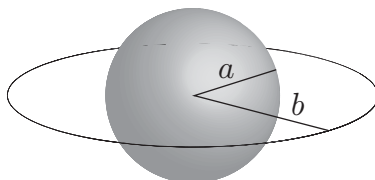
En stav med konstant linjeladdningstäthet ρ_l befinner sig ovanför ett perfekt ledande plan, enligt figur. Under staven finns en punktladdning med laddningen q . I resten av området ovanför planet är det vakuum. Rita först en bild av de spegelladdningar man kan ersätta det ledande planet med och bestäm därefter kraften på punktladdningen.

3.7



I de fyra fallen ovan kan man bestämma potentialen och elektriska fältet i det område punktladdningen q befinner sig i genom att införa fiktiva laddningar. Samtliga laddningar befinner sig i planet $z = 0$. Bestäm samtliga fiktiva laddningars lägen $((x, y)$ -koordinaterna) och styrka. Rita figurer.

3.8

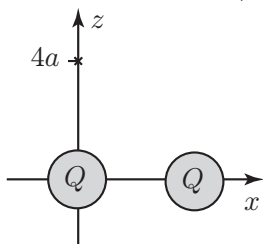


Ett metallklot med radie a är uppladdat med en total laddning Q_{klot} . Utanpå sfären, i vakuum, befinner sig en tunn, plan metallring med radie b och total laddning Q_{ring} . Ringens och klotets centra sammanfaller. Bestäm kvoten mellan Q_{klot} och Q_{ring} så att klotet får potential noll (samma som i oändligheten).

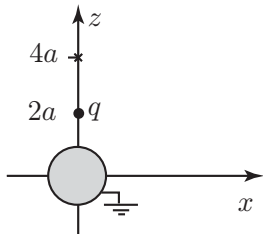
3.9

Bestäm potentialen i punkten $(0, 0, 4a)$ i de fyra fallen. I alla områden gäller $\varepsilon_r = 1$.

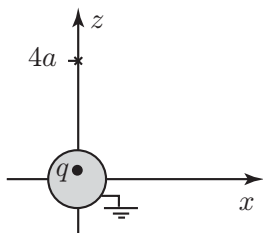
- a) Två homogent laddade sfärer med radien a , laddningen Q och med centrum i origo respektive $(4a, 0, 0)$.



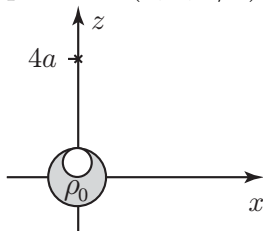
- b) En punktladdning q i punkten $(0, 0, 2a)$ utanför en jordad metallsfär med radien a och med centrum i origo.



- c) En punktladdning q i punkten $(0, 0, a/2)$ inuti en jordad metallsfär med radien a och med centrum i origo.



- d) Ett område med konstant laddningstäthet ρ_0 som befinner sig mellan en sfär med radien a och centrum i origo och en sfär med radien $a/2$ med centrum i punkten $(0, 0, a/2)$. Utanför det homogent laddade området är det vakuum.



3.10

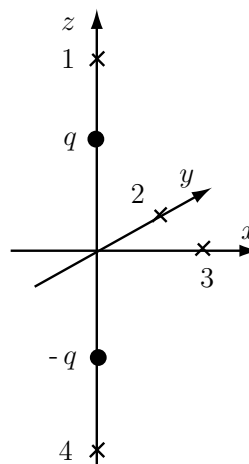
Bestäm totala dipolmomentet $\mathbf{p}$ för följande fyra laddningsfördelningar:

- En punktladdning q i $(0, 0, a)$ och en punktladdning $-q$ i $(0, 0, -a)$.
- En punktladdning q i $(-a, 0, 0)$ och en punktladdning $-q$ i $(0, 0, 0)$.
- En punktladdning q i $(a, 0, 0)$ och en punktladdning $-q$ i $(0, 0, a)$.
- En punktladdning q i $(0, 0, a)$, en punktladdning q i $(0, 0, 0)$ och en punktladdning $-2q$ i $(0, 0, -a)$.

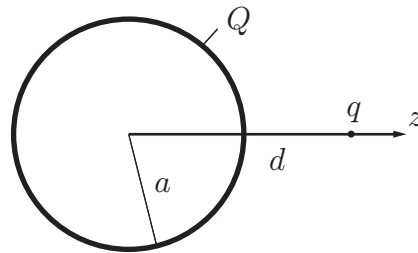
3.11

I figuren ligger den positiva laddningen q i punkten $(0, 0, a/2)$ och $-q$ i punkten $(0, 0, -a/2)$. Svara på följande frågor **utan** att använda formler.

- I vilken/vilka punkter är potentialen noll?
- I vilken/vilka av punkterna 1, 2, 3, 4 är potentialen störst?
- I vilken/vilka av punkterna 1, 2, 3, 4 är potentialen minst?
- Om potentialen är V_1 i punkten $(20a, 20a, 20a)$, vad är den då approximativt i $(40a, 40a, 40a)$?
- Om elektriska fältet är $\mathbf{E}_1$ i punkten $(20a, 20a, 20a)$, vad är det då approximativt i $(40a, 40a, 40a)$?
- Hur är det elektriska fältet riktat i punkterna 1, 2, 3, 4?

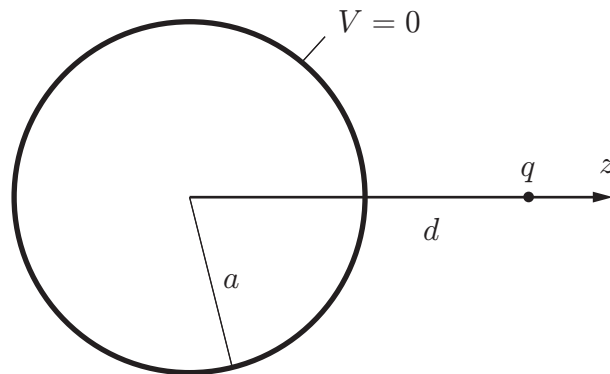


3.12



Ett metallklot med radie a är uppladdat till laddningen Q . Hur stort arbete kvävs för att föra en punktladdning q från ett stort avstånd från klotet till ett avstånd d från dess medelpunkt.

3.13



En elektrisk punktladdning med elektrisk laddning q befinner sig utanför ett jordat metallklot, vars radie är a . Avståndet mellan punktladdningen och klotets centrum är d . Bestäm systemets elektrostatiske energi W_e .

3.14

Det elektriska fältet från en dipol $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{z}}$ som befinner sig i origo kan skrivas på formen

$$\mathbf{E} = E_r \hat{\mathbf{r}} + E_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Bestäm kvoten E_r/E_θ i punkterna

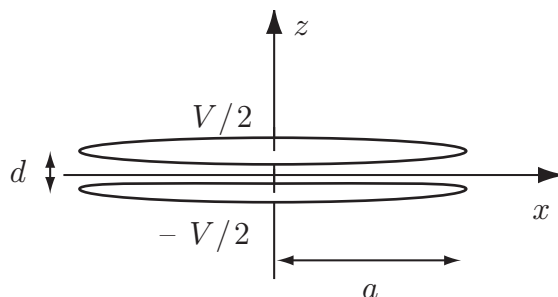
a) $\mathbf{r} = (a, 0, 0)$

b) $\mathbf{r} = (0, a, 0)$

c) $\mathbf{r} = (0, 0, a)$

d) $\mathbf{r} = (a, 0, a)$

3.15



Den cirkulära plattkondensatorn är luftfylld och uppladdad med spänningen V .

- Bestäm den fria laddningen Q och $-Q$ på den övre respektive undre plattan.
- Bestäm ett approximativt uttryck på det elektriska fältet $\mathbf{E}$ i punkten $\mathbf{r} = (20a, 0, 20a)$. Obs både storlek och riktning skall anges.

3.16

Två identiska punktladdningar är separerade med avståndet $2b$ från varandra. En jordad, ledande sfär med radien a , där $a < b$, placeras mitt emellan de båda punktladdningarna. Bestäm ett approximativt värde på a så att punktladdningarnas repulsion neutraliseras.

3.17

Vad är kraften på de givna punktladdningarna i uppgift 3.16 om samma sfär (radie a enligt svaret på uppgift 3.16) istället har potentialen V_0 ?

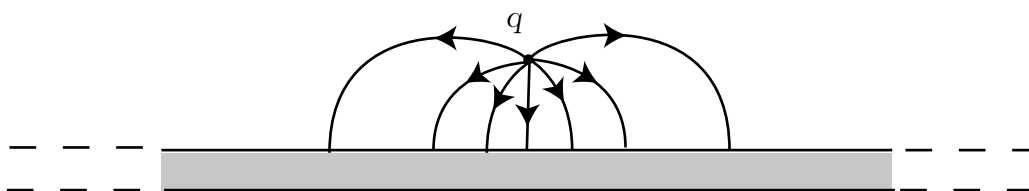
3.18

Ett ledande sfäriskt skal med radien a påverkas av en punktladdning med styrkan $q > 0$ på avståndet $d > a$ från sfärens centrum. Vad är den minsta positiva laddning som måste ges det sfäriska skalet för att ytladdningstätheten överallt på skalet skall vara positiv?

Speciella lösningsmetoder: svar och lösningar

S3.1

a) Se figur

b) $-q$

c) Som en ytladdningstäthet på skivans ovansida.

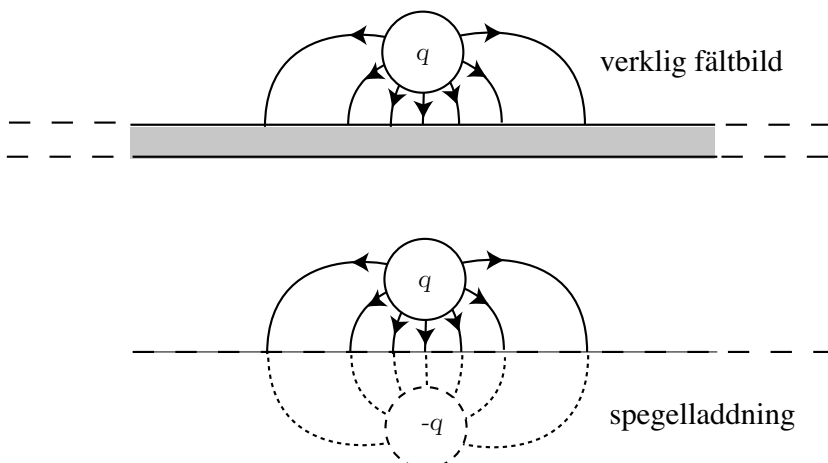
d) $\mathbf{F} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2} \hat{\mathbf{z}}$, där $\hat{\mathbf{z}}$ pekar uppåt.

e) Noll

f) $\mathbf{E} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 d^2} \hat{\mathbf{z}}$ g) $\rho_S = \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{D} = \epsilon_0 \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{E} = -\frac{q}{2\pi d^2}$

h) Försumbart

S3.2

a) Ett likadant klot fast med negativ laddning $-q$. Klotet placeras med sin mittpunkt på avståndet d från den övre sidan på skivan. Se figur.

b-h) Samma svar som i uppgift 3.1.

S3.3

Metallplanets inverkan kan beskrivas med speglade punktladdningar $-Q$ och $-q$ på avståndet $2h$ respektive h under ytan. Kraften på laddningen q är då

$$\mathbf{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 h^2}(-\hat{\mathbf{z}}) + \frac{q(-q)}{4\pi\epsilon_0 (2h)^2}\hat{\mathbf{z}} + \frac{q(-Q)}{4\pi\epsilon_0 (3h)^2}\hat{\mathbf{z}} = \frac{q\hat{\mathbf{z}}}{4\pi\epsilon_0 h^2} \left(-Q - \frac{q}{4} - \frac{Q}{9} \right)$$

Denna kraft är noll då $-Q - q/4 - Q/9 = 0$, dvs $q = -40Q/9$.

S3.4

- a) Laddningen speglas till en laddning $-q$ på avståndet h under planet. Kraften är riktad nedåt och styrkan ges av

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 4h^2}$$

- b) Arbetet ges av $A = 0.5q(V_2 - V_1)$, där V_1 är potentialen från spegelladdningen i utgångsläget och V_2 är potentialen från spegelladdningen i slutläget, dvs

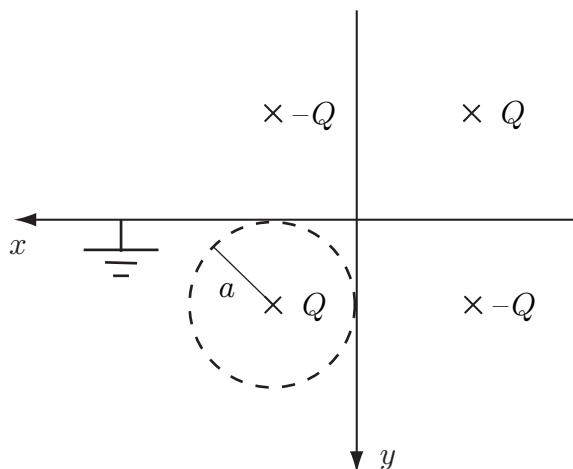
$$V_1 = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 h}$$

$$V_2 = -\frac{q}{16\pi\epsilon_0 h}$$

detta ger

$$A = \frac{q^2}{32\pi\epsilon_0 h}$$

S3.5



Kraften som verkar på ballongen är densamma som kraften på en punktladdning Q i ballongens centrum, vilket med val av koordinataxlar enligt figur blir i punkten (a, a) . Problemet löses sedan med spegling av laddningen Q i taket och i väggen. Tre spegelladdningar krävs för att få rätt randvillkor (konstant potential noll) på tak och vägg, nämligen laddningen $-Q$ i punkten $(a, -a)$ och i punkten $(-a, a)$, samt laddningen Q i punkten $(-a, -a)$. Kraften på ballongen blir densamma som kraften mellan punktladdningen i ballongens centrum och de tre spegelladdningarna. Kraften fås med Coulombs lag med $\mathbf{r} = a\hat{\mathbf{x}} + a\hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{r}'_1 = a\hat{\mathbf{x}} - a\hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{r}'_2 = -a\hat{\mathbf{x}} + a\hat{\mathbf{y}}$ och $\mathbf{r}'_3 = -a\hat{\mathbf{x}} - a\hat{\mathbf{y}}$.

$$\mathbf{F} = -\frac{Q^2 2a\hat{\mathbf{y}}}{4\pi\epsilon_0(2a)^3} - \frac{Q^2 2a\hat{\mathbf{x}}}{4\pi\epsilon_0(2a)^3} + \frac{Q^2 2(a\hat{\mathbf{x}} + a\hat{\mathbf{y}})}{4\pi\epsilon_0(2\sqrt{2}a)^3} = -\frac{Q^2(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}})}{16\pi\epsilon_0 a^2} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

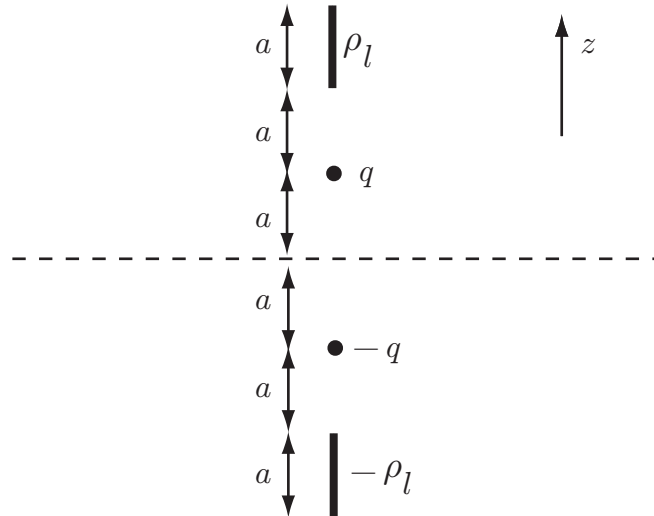
Observera att kraften är uppåtriktad ($\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{y}} < 0$) oavsett laddningens tecken. Ballongens tyngdkraft är $mg\hat{\mathbf{y}}$, där g är jordens tyngdacceleration, vilket ger villkoret för vidhäftning:

$$mg \leq \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2} \frac{4 - \sqrt{2}}{4}$$

eller

$$|Q| \geq \frac{8a\sqrt{mg\pi\epsilon_0}}{\sqrt{4 - \sqrt{2}}}$$

S3.6



De fiktiva spegelladdningarna ges i figuren. Kraften på q ges av $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ där $\mathbf{E}$ är det elektriska fältet från staven och de båda spegelladdningarna. Bidraget från spegelpunktladdningen ges av

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{q}{16\pi\epsilon_0 a^2} \hat{\mathbf{z}}$$

Fältet från staven ges av

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{2a} \frac{1}{r^2} dr \hat{\mathbf{z}} = -\frac{\rho_l}{8\pi\epsilon_0 a} \hat{\mathbf{z}}$$

Fältet från stavens spegelbild ges av

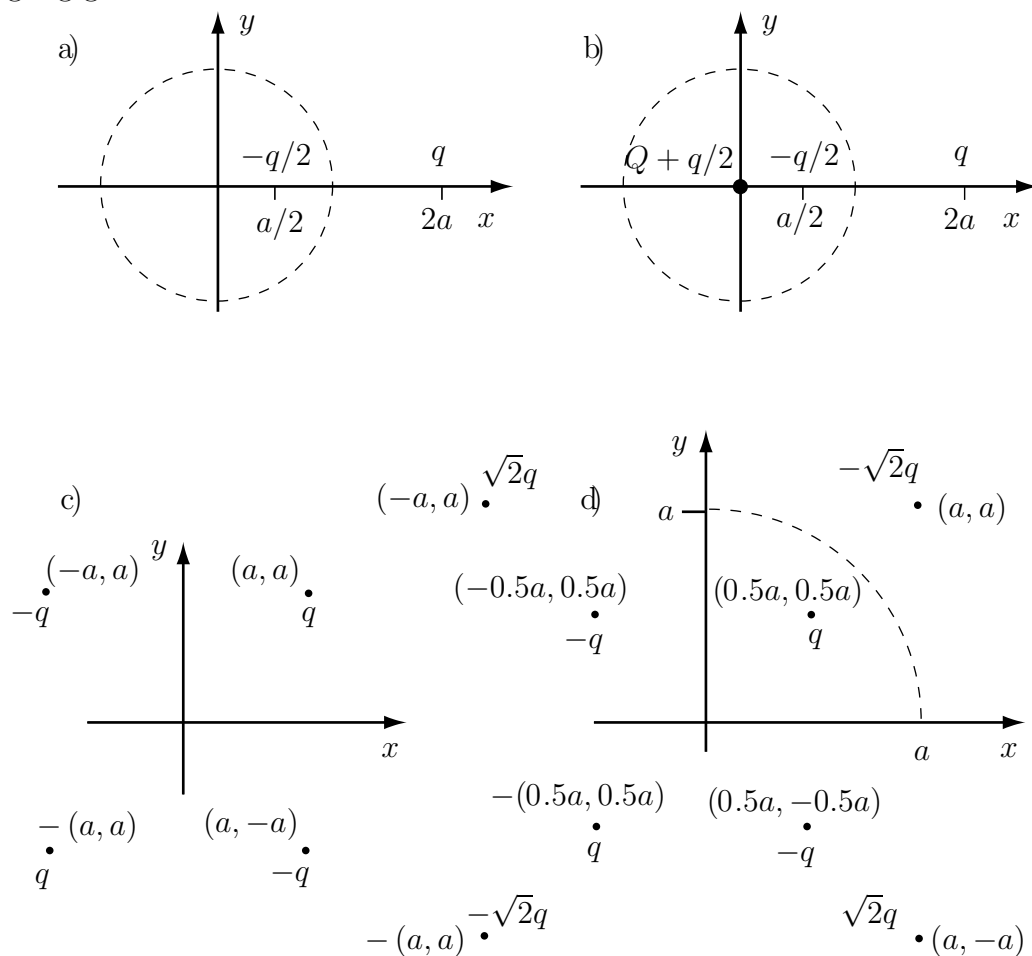
$$\mathbf{E}_3 = -\frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_{3a}^{4a} \frac{1}{r^2} dr \hat{\mathbf{z}} = -\frac{\rho_l}{48\pi\epsilon_0 a} \hat{\mathbf{z}}$$

Svar: Kraften ges av

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3) = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2} \hat{\mathbf{z}} - \frac{7q\rho_l}{48\pi\epsilon_0 a} \hat{\mathbf{z}}$$

S3.7

Spegling ger



S3.8

Lägg ett koordinatsystem med origo i klotets centrum. Eftersom klotet är en ekvipotentialyta spelar det ingen roll var på eller i klotet potentialen beräknas. Vidare ligger klotets laddningar på ytan. Centrpunkten (origo) ger enklast räkningar. Vi väljer referenspotential (jordpunkt) noll på stort avstånd från klot och ring. Potentialen i origo från klotets och ringens (okända) laddningsfördelningar, $\rho_S(\mathbf{r})$ respektive $\rho_\ell(\mathbf{r})$, är

$$\begin{aligned} V(\mathbf{0}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_{\text{klot}}} \frac{\rho_S(\mathbf{r}')}{|\mathbf{0} - \mathbf{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{L_{\text{ring}}} \frac{\rho_\ell(\mathbf{r}')}{|\mathbf{0} - \mathbf{r}'|} d\ell' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} \iint_{S_{\text{klot}}} \rho_S(\mathbf{r}') dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 b} \iint_{L_{\text{ring}}} \rho_\ell(\mathbf{r}') d\ell' = \frac{Q_{\text{klot}}}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q_{\text{ring}}}{4\pi\epsilon_0 b} \end{aligned}$$

vilket leder till att potentialen på klotet är noll om

$$\frac{Q_{\text{klot}}}{Q_{\text{ring}}} = -\frac{a}{b}$$

Alternativ lösning: Dela upp laddningen Q_{ring} på ringen i infinitesimala delar — punktladdningar ΔQ_{ring} — och använd speglingsmetoden på varje delladdning. Varje delladdning ΔQ_{ring} ger upphov till en speglad laddning $-\Delta Q_{\text{ring}}a/b$, som, tillsammans med ursprungsladdningen, ger potential noll på klotet, dvs. samma potential som på stort avstånd från klot och ring. Den totalt speglade laddningen i klotet blir uppsummerat $Q_{\text{klot}} = \sum(-\Delta Q_{\text{ring}}a/b) = -Q_{\text{ring}}a/b$, dvs.

$$\frac{Q_{\text{klot}}}{Q_{\text{ring}}} = -\frac{a}{b}$$

S3.9

a) Utanför kloten är potentialen densamma som från två punktladdningar

$$V(0, 0, 4a) = \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

b) Spegling ger en spegelladdning $q' = -q/2$ i punkten $(0, 0, a/2)$. Därmed fås potentialen

$$V(0, 0, 4a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7} \right) = \frac{5q}{56\pi\epsilon_0 a}$$

c) Eftersom metallsfären är jordad är potentialen noll för $r > a$ och därmed är $V(0, 0, 4a) = 0$.

- d) Potentialen är en superposition av potentialerna från en sfär med radien a , homogen laddningstäthet ρ_0 och centrum i origo och en sfär med radien $a/2$, homogen laddningstäthet $-\rho_0$ och centrum i punkten $(a/2, 0, 0)$, se figur. Laddningarna för de båda sfärerna blir $Q_1 = \rho_0 4\pi a^3/3$ och $Q_2 = -\rho_0 4\pi a^3/24$. Därmed ges potentialen av

$$V(0, 0, 4a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{Q_1}{4} + \frac{2Q_2}{7} \right) = \frac{\rho_0 a^2}{14\epsilon_0}$$



S3.10

- a) $2qa\hat{z}$ b) $-qa\hat{x}$ c) $qa(\hat{x} - \hat{z})$ d) $3qa\hat{z}$

S3.11

- a) Punkt 2 och 3 b) Punkt 1 c) Punkt 4 d) $V_1/4$ e) $\mathbf{E}_1/8$
 f) Positiv z -led i punkt 1 och 4. Negativ z -led i punkt 2 och 3.

S3.12

För att få rätt fältfördelning utanför det uppladdade metallklotet med en tänkt punktladdning q i punkten $r\hat{z}$ inför vi en spegelladdning $q' = -qa/r$ i punkten $\hat{z}a^2/r$ från klotets centrum, samt en punktladdning i origo vars styrka är $Q - q' = Q + qa/r$. Klotets totala laddning blir då Q , som uppgiften föreskriver. Avståndet mellan punktladdningen q och dess spegelladdning q' är $r - a^2/r$ samt avståndet mellan punktladdningen q och origo är r . Kraften $\mathbf{F}(r)$ på punktladdningen q i punkten $r\hat{z}$ p.g.a. spegelladdningarna q' och $Q - q'$ är således

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(r) &= \hat{z} \frac{q(-qa/r)}{4\pi\epsilon_0(r - a^2/r)^2} + \hat{z} \frac{q(Q + qa/r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= -\hat{z} \frac{q^2 ar}{4\pi\epsilon_0(r^2 - a^2)^2} + \hat{z} \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \hat{z} \frac{q^2 a}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{aligned}$$

Arbetet att föra punktladdningen från oändligheten till $d\hat{z}$ är

$$\begin{aligned} W &= - \int_{\infty}^d \mathbf{F}(r) \cdot \hat{z} \, dr = \frac{q^2 a}{8\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^d \frac{2r}{(r^2 - a^2)^2} \, dr - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^d \frac{dr}{r^2} - \frac{q^2 a}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^d \frac{dr}{r^3} \\ &= - \frac{q^2 a}{8\pi\epsilon_0(d^2 - a^2)} + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{q^2 a}{8\pi\epsilon_0 d^2} \end{aligned}$$

S3.13

Den elektrostatiska energin för problemet fås genom att beräkna arbetet att föra punktladdningen q från oändligheten till punkten $d\hat{\mathbf{z}}$.

VI startar med att låta punktladdningen q ligga på avståndet $r\hat{\mathbf{z}}$ från sfärens centrum och löser först detta mer generella fältproblem. Rätt fältfördelning utanför klotet från en punktladdning i $r\hat{\mathbf{z}}$ fås med en spegelladdning $q' = -qa/r$ i punkten $\hat{\mathbf{z}}a^2/r$ längs symmetriaxeln (z -axeln) från klotets centrum. Avståndet mellan punktladdningen och dess spegelladdning är således $r - a^2/r$. Kraften $\mathbf{F}(r)$ på punktladdningen q i punkten $r\hat{\mathbf{z}}$ p.g.a. dess spegelladdning q' är

$$\mathbf{F}(r) = -\hat{\mathbf{z}} \frac{qqa/r}{4\pi\epsilon_0(r - a^2/r)^2} = -\hat{\mathbf{z}} \frac{q^2ar}{4\pi\epsilon_0(r^2 - a^2)^2}$$

Arbetet att föra punktladdningen från oändligheten till $d\hat{\mathbf{z}}$ är

$$W_e = - \int_{\infty}^d \mathbf{F}(r) \cdot \hat{\mathbf{z}} \, dr = \frac{q^2a}{8\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^d \frac{2r}{(r^2 - a^2)^2} \, dr = -\frac{q^2a}{8\pi\epsilon_0(d^2 - a^2)}$$

Alternativ lösning: Utgå från

$$W_e = \frac{1}{2} \iint \rho_S(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \, da + \frac{1}{2} qV' = \frac{qV'}{2}$$

där potentialen $V(\mathbf{r})$ är den totala potentialen, dvs. potentialen från den ensamma punktladdningen plus spegelladdningen ($V = 0$ på klotets yta), och V' är potentialen från enbart spegelladdningen i källpunkten med laddningen q . Den totala elektrostatiska energin för systemet blir

$$W_e = \frac{qV'(P)}{2} = \frac{qq'}{8\pi\epsilon_0(d - d')} = -\frac{q^2a}{8\pi\epsilon_0(d^2 - a^2)}$$

S3.14

a) 0 b) 0 c) ∞ d) 2

S3.15

a) Kapacitansen för en cirkulär plattkondensator ges av

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{d}$$

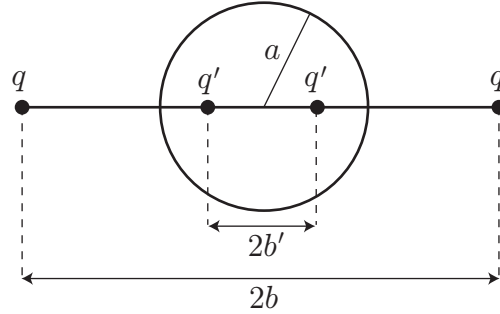
Laddningen ges av

$$Q = CV = \frac{\epsilon_0 \pi a^2 V}{d}$$

- b) Eftersom avståndet till fältpunkten är mycket större än kondensatorn kan vi använda dipolapproximationen. Kondensatorns dipolmoment är $p = Qd$. I punkten $(20a, 0, 20a)$ gäller $\theta = \pi/4$, $r = |(20a, 0, 20a)| = 20\sqrt{2}a$, $\sin \theta = \cos \theta = 1/\sqrt{2}$, $\hat{\theta} = (\hat{x} - \hat{z})/\sqrt{2}$ och $\hat{r} = (\hat{x} + \hat{z})/\sqrt{2}$. Fältet ges då av

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(20a, 0, 20a) &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(2\hat{r} \cos \theta + \hat{\theta} \sin \theta \right) \\ &= \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 (20\sqrt{2}a)^3} \frac{(3\hat{x} + \hat{z})}{2} \\ &= \frac{V}{16 \cdot 20^3 \sqrt{2}a} (3\hat{x} + \hat{z}) \end{aligned}$$

S3.16



Vi använder oss av speglingmetoden. Elektriska fältet utanför sfären ges av fältet från de två givna punktladdningarna och två spegelladdningar q' . Styrkan på spegelladdningarna är $q' = -qa/b$ och de placeras symmetriskt med avseende på sfärens centrumpunkt på avståndet $b' = a^2/b$ från denna. Varje given punktladdning påverkas dels av en repulsiv kraft från den andra givna punktladdningen och dels en attraktiv kraft från de båda spegelladdningarna. Om den resulterande kraften på någon av de givna punktladdningarna skall försvinna kräver vi att

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{(2b)^2} &= -\frac{qq'}{(b-b')^2} - \frac{qq'}{(b+b')^2} = q^2 \frac{a}{b^3} \left\{ \frac{1}{(1-a^2/b^2)^2} + \frac{1}{(1+a^2/b^2)^2} \right\} \\ &= \frac{2q^2 a}{b^3} \left\{ 1 + 3\left(\frac{a}{b}\right)^4 + 5\left(\frac{a}{b}\right)^8 + \dots \right\} \end{aligned}$$

Då $a < b$ kan vi försumma alla termer i parenteserna ovan utom den första varvid vi erhåller

$$\frac{q^2}{4b^2} \approx \frac{2q^2 a}{b^3} \quad \Leftrightarrow \quad a \approx \frac{b}{8}$$

S3.17

Då sfären har potentialen V_0 ökar potentialen utanför sfären med (radiell lösning till Laplace ekvation i sfäriska koordinater)

$$V(r) = \frac{V_0 a}{r} \approx \frac{V_0 b}{8r}$$

där r är avståndet mellan sfärens centrum och fältpunkten. Det extra elektriska fält som svarar mot denna potentialökning är

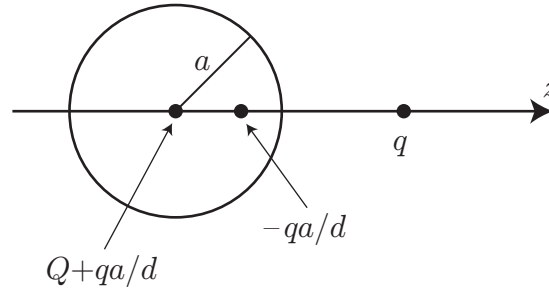
$$\mathbf{E}(r) = -\nabla V = \frac{V_0 b}{8r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Kraften som påverkar de givna punktladdningarna är därför till beloppet

$$F = qE(b) = \frac{qV_0}{8b}$$

och är riktad ut från sfären längs den tänkta linje som binder samman sfärens centrum och de givna punktladdningarna.

S3.18



Inför en z -axel enligt figuren ovan ($z = 0$ i sfärens centrum). Eftersom $q > 0$ följer av symmetriskäl att den till beloppet maximala inducerade ytladdningstätheten återfinns i punkten $z = a$ (i denna punkt är den inducerade ytladdningstätheten negativ). Ersätt det sfäriska skalet med en punktladdning med styrkan $-qa/d$ i punkten $z = a^2/d$ och en punktladdning med styrkan $Q + qa/d$ i punkten $z = 0$, där Q betecknar totala laddningen på det sfäriska skalet. Elektriska fältet i punkten $z = a$ är därmed

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q + qa/d}{a^2} - \frac{q}{(d-a)^2} - \frac{qa/d}{(a - a^2/d)^2} \right) \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{a^2} + \frac{q}{ad} - \frac{q}{(d-a)^2} - \frac{qd/a}{(d-a)^2} \right) \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Villkoret att den inducerade ytladdningstätheten skall vara positiv i denna punkt (och därmed positiv överallt på det sfäriska skalet) är således

$$\rho_S = \epsilon_0 \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{Q}{a^2} + \frac{q}{ad} - \frac{q}{(d-a)^2} - \frac{qd/a}{(d-a)^2} \right) > 0$$

Denna olikhet är ekvivalent med

$$Q > qa^2 \left(\frac{1 + d/a}{(d-a)^2} - \frac{1}{ad} \right) = q \frac{a^2(3d-a)}{d(d-a)^2}$$

som är det sökta svaret.

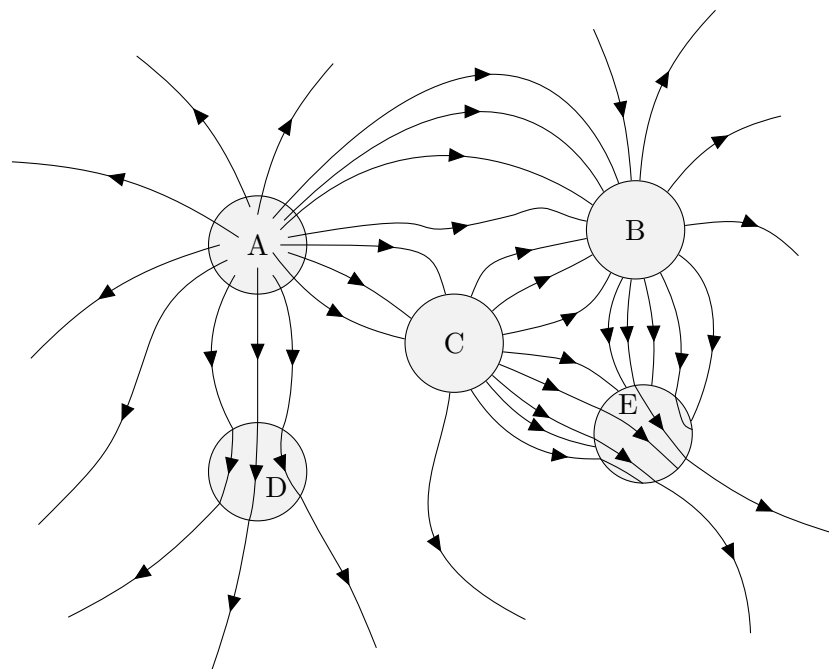
4 Elektriska fält i material

4.1

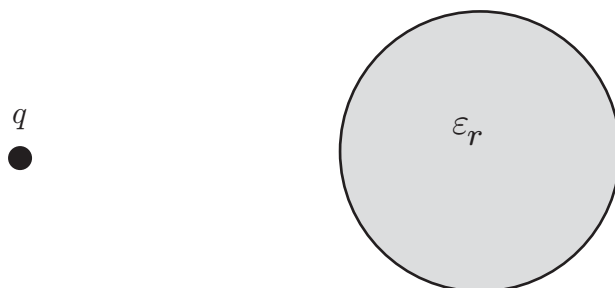
Figuren visar fältlinjer för den elektriska flödestätheten $\mathbf{D}$ i ett område kring fem olika cylindrar A, B, C, D och E. De olika cylindrarna beskrivs av

- a) Metallcylinder utan nettoladdning.
- b) Metallcylinder med nettoladdning.
- c) Dielektrikum (isolator) utan fria laddningar.
- d) Vakuum med rymdladdningstäthet (fria laddningar).
- e) Vakuum med ytladdningstäthet (fria laddningar).

Bestäm vilken cylinder A, B, C, D och E, som svarar mot **a)**, **b)**, **c)**, **d)** och **e)**.



4.2

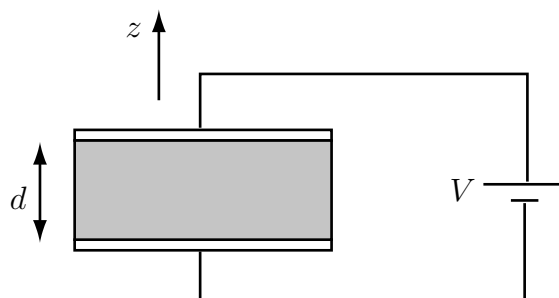


Utanför en dielektrisk sfär med konstant relativ permittivitet ϵ_r placeras en positiv punktladdning q , enligt figuren.

- Det bildas ytladdningar på sfären. Rita en figur där du markerar positiva ytladdningar med plustecken och negativa med minustecken. Det räcker att bilden är approximativt rätt.
- Ange om sfären utsätts för någon kraft. Om det finns en kraft skall du markera kraftens riktning genom att rita en kraftvektor på sfären.

4.3

I figuren är området mellan kondensatorplattorna fyllt med ett oledande linjärt dielektriskt material med relativ permittivitet $\epsilon_r > 1$. Kondensatorplattorna antas som vanligt vara av metall. Antag att spänningen är noll, dvs $V = 0$. Vad är då $\mathbf{E}$, $\mathbf{P}$ och $\mathbf{D}$ mellan plattorna?



4.4

Antag nu att $V = V_0 > 0$. Rita en figur och försök, utan att använda formler, att markera följande (positiva laddningar visas med plustecken och negativa med minustecken):

- metallplattornas laddningar.
- riktningen på det elektriska fältet $\mathbf{E}$ i den dielektriska skivan
- riktningen på de dipoler som finns i den dielektriska skivan (rita antingen som en positiv och en negativ laddning eller som en kort pil som går från den negativa till den positiva laddningen).

- d) riktningen på polarisationen $\mathbf{P}$ i den dielektriska skivan.
- e) riktningen på elektriska flödestätheten $\mathbf{D}$ i den dielektriska skivan
- f) överskottsladdningarna (bundna) som kan finnas i vissa områden av den dielektriska skivan

4.5

Låt fortfarande $V = V_0 > 0$ och svara på följande frågor:

- a) Vad är det elektriska fältet $\mathbf{E}$ inuti den dielektriska skivan?
- b) Vad är den elektriska flödestätheten $\mathbf{D}$ i den dielektriska skivan?
- c) Vad är polarisationen $\mathbf{P}$ i den dielektriska skivan?
- d) Antag att den dielektriska skivan består av endast ett ämne och att det finns N stycken molekyler i skivan. Antag vidare att skivans tvärsnittsytta är S . Hur stort dipolmoment $\mathbf{p}$ har i genomsnitt varje molekyl?

4.6

Antag att spänningskällan hela tiden är inkopplad och hålls vid spänningen V_0 . Vi tar nu bort den dielektriska skivan, vilket gör att utrymmet mellan plattorna blir fyllt med luft ($\epsilon_r = 1$). Vilka av följande alternativ är rätt?

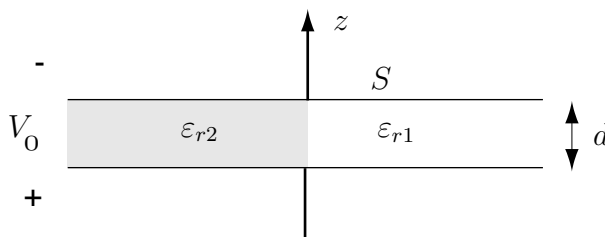
- a) Det elektriska fältet mellan plattorna är oförändrat.
- b) Styrkan av det elektriska fältet mellan plattorna ökar.
- c) Styrkan av det elektriska fältet mellan plattorna minskar.
- d) Den elektriska flödestätheten $\mathbf{D}$ mellan plattorna är oförändrad.
- e) Styrkan av den elektriska flödestätheten mellan plattorna ökar.
- f) Styrkan av den elektriska flödestätheten mellan plattorna minskar.
- g) Ytladdningstätheten på den övre plattan är oförändrad.
- h) Ytladdningstätheten på den övre plattan ökar.
- i) Ytladdningstätheten på den övre plattan minskar.
- j) Polarisationen mellan plattorna blir noll.
- k) Polarisationen mellan plattorna är oförändrad.

4.7

Antag att vi innan vi tar bort den dielektriska skivan kopplar bort spänningskällan så att de båda plattorna blir isolerade från varandra. Spänningen är V_0 innan skivan tas bort. Vilka av alternativen i uppgift 4.6 är rätt då vi tar bort skivan?

4.8

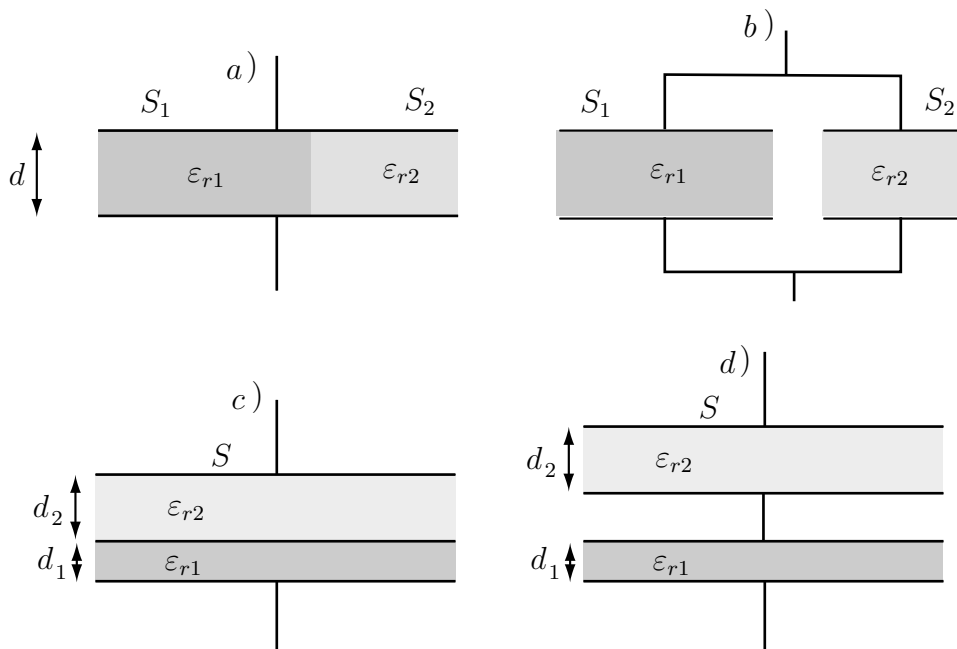
Kondensatorn i figuren har platytan S och tjockleken d . Kondensatorn är delad i två halvor med relativ permittivitet ϵ_{r1} respektive ϵ_{r2} .



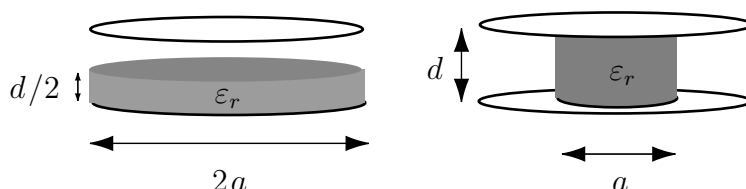
- Bestäm kondensatorns kapacitans.
- Antag att en spänning V_0 läggs över kondensatorn, enligt figur. Vad blir då det elektriska fältet $\mathbf{E}$ och den elektriska flödestätheten $\mathbf{D}$ i de båda områdena?

4.9

Bestäm kapacitansen för kondensatorerna i figurerna.



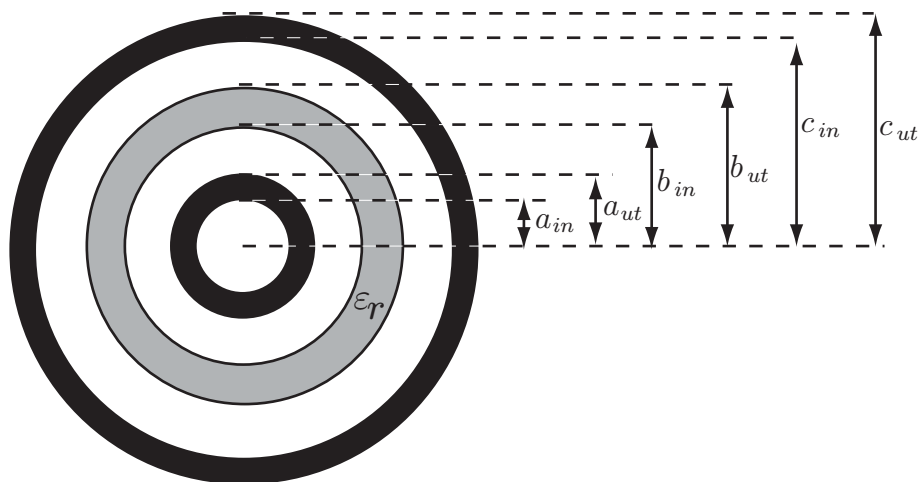
4.10



Bestäm kapacitansen för följande två kondensatorer

- En cirkulär plattkondensator med radien a och avståndet d mellan plattorna. Halva utrymmet $0 < z < d/2$ är fyllt med ett dielektrikum med relativa permittiviteten ϵ_r och den andra halvan är luftfylld ($\epsilon_r = 1$).
- En cirkulär plattkondensator med radien a och avståndet d mellan plattorna. I området $0 < r_c < a/2$ är det ett dielektrikum med relativa permittiviteten ϵ_r . I området $a/2 < r_c < a$ är det luft.

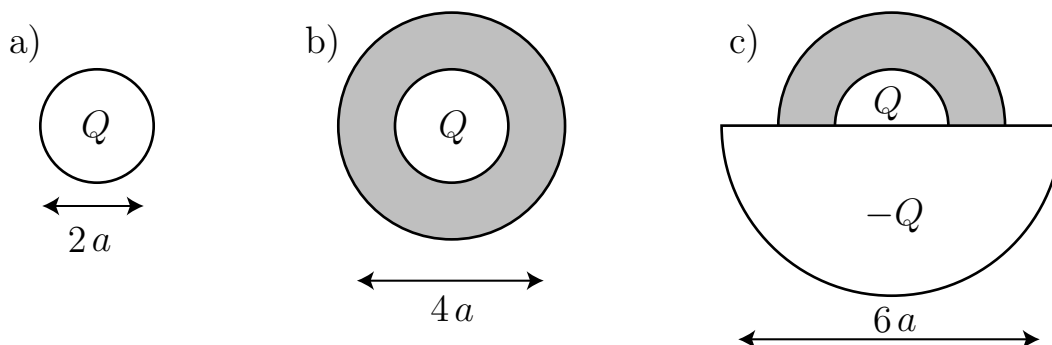
4.11



De tre sfäriska skalerna är koncentrisk. Det innersta och yttersta skalet är av metall och det mellersta av ett icke-ledande dielektriskt material med relativ permittivitet ϵ_r . I övriga områden är det vakuum. På det innersta skalet läggs den positiva potentialen V och på det yttersta potentialen 0.

- a) Ange vad som gäller för de sex ytladdningarna som finns på ytorna $r = a_{\text{in}}$, $r = a_{\text{ut}}$, $r = b_{\text{in}}$, $r = b_{\text{ut}}$, $r = c_{\text{in}}$, $r = c_{\text{ut}}$. Ytladdningen kan antingen vara 0, positiv eller negativ.
- b) Bestäm ytladdningen på ytan $r = a_{\text{ut}}$ om man tar bort det dielektriska skalet.

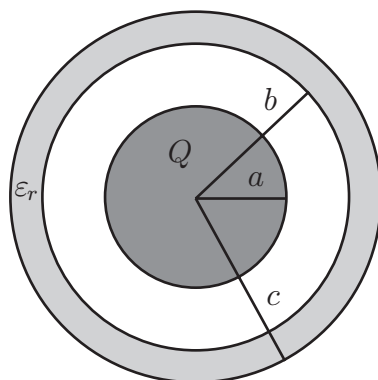
4.12



Det inre sfäriska klotet i de tre figurerna är av metall och har radien a . Ange dess potential i följande tre fall

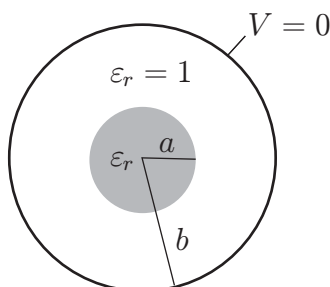
- a) Klotet har laddningen Q och befinner sig i vakuum.
- b) Klotet har den fria laddningen Q och omges av ett koncentriskt dielektriskt skal med relativ permittivitet ε_r . Skalets innerradie är a och dess ytterradie $2a$.
- c) Klot och skal är som i b-uppgiften. Dessutom finns ett tunt halvsfäriskt metallskal med radien $3a$ placerat enligt figuren. Det halvsfäriska skalet har laddningen $-Q$.

4.13



Inuti ett oladdat, dielektriskt, sfäriskt skal (yttre radie c och inre radie $b < c$) finns ett metallklot med radie $a < b$. Dielektrikat har relativ dielektricitetskonstant ϵ_r . Klotets centrum sammanfaller med det sfäriska skalets medelpunkt, och det luftfyllda området mellan skal och klot har dielektricitetskonstant $\epsilon_r = 1$. Metallklotet har en total laddning Q . Bestäm systemets elektrostatiska energi.

4.14



Ett klot med radie a består av ett dielektriskt material med relativ dielektricitetskonstant ϵ_r . Klotet är laddat med total laddning Q , och laddningen är jämnt fördelad i klotet. Utanför klotet, och koncentriskt med detta, finns ett jordat metallskal (radie b), se figur. Området mellan klotet och skalet är vakuum. Bestäm systemets elektrostatiska energi W_e .

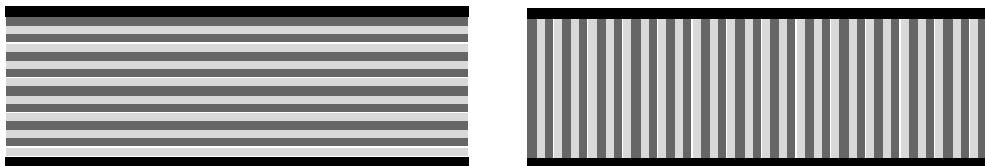
4.15

En koaxialkabel, vars innerledare har radien a och ytterledare har inre radie b , är för $a < r_c < b$ fylld med ett oledande dielektrikum med relativa permittiviteten

$$\epsilon_r(r_c) = \frac{2}{1 + r_c/b}$$

Bestäm koaxialkabelns kapacitans per längdenhet.

4.16



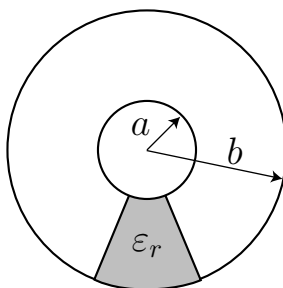
Ett laminerat material består av mycket tunna plana skikt. Vartannat skikt har relativa permittiviteten $\varepsilon_{r1} = 2$ och vartannat $\varepsilon_{r2} = 3$. Alla skikt är lika tjocka. Trula mäter upp ett medelvärde av permittiviteten med hjälp av en plattkondensator med kvadratiska plattor. Hon tillverkar en skiva med tjocklek d och med samma yta som kondensatorplattorna av materialet. Denna skjuts in helt mellan kondensatorplattorna varefter kapacitansen mäts upp. Permittiviteten får Trula fram genom att utnyttja formeln för kapacitansen för en plattkondensator

$$C = \frac{S\varepsilon_0\varepsilon_r}{d}$$

Då skivan tillverkas så att skikten är parallella med kondensatorplattorna (se vänstra figuren) får Trula fram ett värde ε_{rp} medan då skivan tillverkas så att skikten är vinkelräta mot kondensatorplattorna (högra figuren) får hon ett annat värde ε_{rv} .

Vilka värden ε_{rp} och ε_{rv} mätte Trula upp?

4.17



Hos en koaxialkabel med längden L har innerledaren diametern $2a$ och ytterledaren diametern $2b$. Innerledaren centreras med hjälp av ett stöd av ett material med relativa permittiviteten ε_r . Stödet, som sträcker sig längs hela kabeln, har ett tvärsnitt i form av en sektor med vinkeln $\pi/4$ (se figuren). I övrigt är det luft mellan ledarna.

Beräkna koaxialkabelns kapacitans!

Elektriska fält i material: svar och lösningar

S4.1

- a) B (inget fält i sfären, fältlinjerna vinkelrätt mot ytan, lika många pilar in som ut)
- b) C (inget fält i sfären, fältlinjerna vinkelrätt mot ytan, fler pilar pils ut än in)
- c) D (fält inuti, inga pilar slutar eller börjar i sfären, $\hat{n} \times \mathbf{D}$ diskontinuerlig)
- d) A (fältlinjerna börjar inuti sfären)
- e) E (pilar slutar på ytan, $\hat{n} \times \mathbf{D}$ kontinuerlig, vakuum)

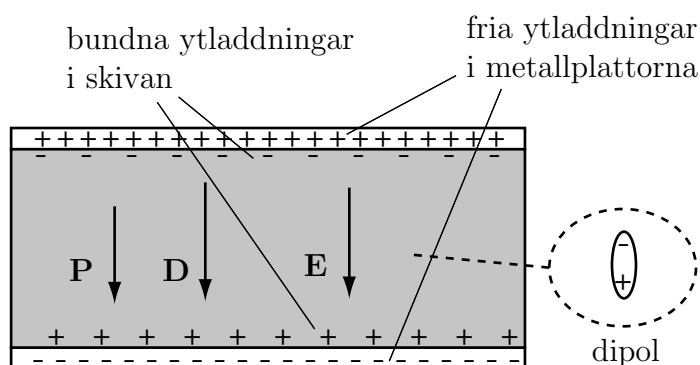
S4.2

- a) En negativ ytladdning på den delen av sfärens yta som är nära punktladdningen. Positiv ytladdning på resten av ytan.
- b) Det blir en attraktiv kraft mellan sfären och punktladdningen.

S4.3

Alla tre är noll

S4.4



S4.5

- a) $\mathbf{E} = -\frac{V_0}{d} \hat{z}$

b) $\mathbf{D} = -\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{V_0}{d} \hat{\mathbf{z}}$

c) $\mathbf{P} = -\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \frac{V_0}{d} \hat{\mathbf{z}}$

d) $\mathbf{p} = \frac{Sd}{N} \mathbf{P} = -\frac{\varepsilon_0 S}{N} (\varepsilon_r - 1) V_0 \hat{\mathbf{z}}$

S4.6

a), f), i), j) är rätt

S4.7

b), d), g), j) är rätt

S4.8

a) Formeln för kapacitansen för en plattkondensator ges av $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$. Kondensatorn kan ses som två parallellkopplade kondensatorer med yta $S/2$. Därmed fås

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{2d} (\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})$$

b) Det elektriska fältet ges av $\mathbf{E} = \frac{V_0}{d} \hat{\mathbf{z}}$ i båda områdena. Den elektriska flödestätheten ges då av

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \frac{V_0}{d} \hat{\mathbf{z}} & \text{i den högra delen} \\ \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \frac{V_0}{d} \hat{\mathbf{z}} & \text{i den vänstra delen} \end{cases}$$

S4.9

a) och b) $C = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_{r1} S_1 + \varepsilon_{r2} S_2)}{d}$

c) och d) $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \varepsilon_{r2} S}{d_1 \varepsilon_{r2} + d_2 \varepsilon_{r1}}$

S4.10

Kapacitanserna fås enklast genom att använda formeln för en plattkondensator

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{h}$$

där S är plattkondensatorns yta och h avståndet mellan plattorna.

- a) Denna kondensator kan ses som två seriekopplade kondensatorer med kapacitanserna

$$C_1 = \frac{2\varepsilon_0\varepsilon_r\pi a^2}{d}$$

$$C_2 = \frac{2\varepsilon_0\pi a^2}{d}$$

Den totala kapacitansen ges av

$$C = \frac{1}{C_1^{-1} + C_2^{-1}} = \frac{2\varepsilon_0\varepsilon_r\pi a^2}{d(1 + \varepsilon_r)}$$

- b) Denna kondensator kan ses som två parallellkopplade kondensatorer med kapacitanserna

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r\pi(a/2)^2}{d}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0\pi(a^2 - (a/2)^2)}{d}$$

Den totala kapacitansen ges av

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0\pi a^2}{4d} (3 + \varepsilon_r)$$

S4.11

- a)

$$\text{Ytladdningen är } \begin{cases} 0 & \text{på ytan } r = a_{\text{in}} \\ \text{positiv} & \text{på ytan } r = a_{\text{ut}} \\ \text{negativ} & \text{på ytan } r = b_{\text{in}} \\ \text{positiv} & \text{på ytan } r = b_{\text{ut}} \\ \text{negativ} & \text{på ytan } r = c_{\text{in}} \\ 0 & \text{på ytan } r = c_{\text{ut}} \end{cases}$$

- b) Antag en laddning Q på den inre sfären. Gauss lag ger

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

för $a_{\text{ut}} < r < c_{\text{in}}$ Integration från $r = a_{\text{ut}}$ till c_{in} ger

$$V = \int_{a_{\text{ut}}}^{c_{\text{in}}} \mathbf{E}(r) \cdot \hat{\mathbf{r}} \, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{a_{\text{ut}}} - \frac{1}{c_{\text{in}}} \right)$$

Totala ytladdningen på ytan $r = a_{\text{ut}}$ ges alltså av

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 V \frac{a_{\text{ut}} c_{\text{in}}}{c_{\text{in}} - a_{\text{ut}}}$$

S4.12

Klotets potential är densamma som potentialen i origo eftersom potentialen är konstant innanför en sluten metallyta.

- a) Eftersom laddningen ligger på avståndet a från origo fås

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

- b) Denna uppgift kan man lösa genom att först bestämma elektriska flödestätheten mha Gauss lag, därefter det elektriska fältet överallt och till slut potentialen genom integration av det elektriska fältet från $r = a$ till $r = \infty$. En alternativ lösningsmetod är följande: För $r = a$ ges sambandet mellan den fria ytladdningstätheten ρ_S , den totala ytladdningstätheten ρ_{Stot} och den bundna ytladdningstätheten ρ_{Sp} av

$$\rho_S = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{D}$$

$$\rho_{Stot} = \epsilon_0 \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_r} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{D}$$

$$\rho_{Sp} = \rho_{Stot} - \rho_S = \left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1\right) \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{D} = \left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1\right) \rho_S$$

Det dielektriska skalet har alltså vid $r = a$ en bunden laddning

$$Q_{pa} = \left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1\right) Q$$

Eftersom dielektrikumet är oladdat är totala ytladdningen på ytan $r = 2a$

$$Q_{p2a} = -Q_{pa} = -\left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1\right) Q$$

Klotets potential ges då av

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q_{pa}}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q_{p2a}}{4\pi\epsilon_0 2a} \\ &= \frac{Q(1 + \epsilon_r)}{8\pi\epsilon_0 \epsilon_r a} \end{aligned}$$

- c) Den laddade halvsfäriska ytan gör att ytladdningsfördelningarna på klotet och det dielektriska skalet fördelas om. Fortfarande gäller att den totala laddningen på klotet är Q och därmed är också de bundna ytladdningarna på dielektrikumet oförändrade från det i b). Bidraget till potentialen från klotet och det dielektriska skalet är alltså oförändrat. Eftersom halvsfärens laddning ligger på avståndet $3a$ från origo ger den ett extra bidrag

$$-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 3a}$$

till potentialen i b). Därmed fås

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q_{pa}}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q_{p2a}}{4\pi\epsilon_0 2a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 3a} = \frac{Q(1 + \epsilon_r)}{8\pi\epsilon_0 \epsilon_r a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 3a}$$

S4.13

Det elektriska fältet i området utanför metallklotet har av symmetriskäl endast en radiell komponent och beror endast på avståndet r från origo, dvs.

$$\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}}$$

Funktionsberoendet hos $E(r)$ ges av Gauss lag (en fri laddning Q existerar på klotets yta, för övrigt finns inga fria laddningar). Vi får följande (S en sfärisk yta med radie $r \geq a$):

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da &= Q \implies \mathbf{D} = \frac{Q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2}, \quad r \geq a \\ \implies E(r) &= \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \begin{cases} 0, & r < a \\ 1, & a \leq r < b \\ 1/\epsilon_r, & b \leq r < c \\ 1, & c \leq r \end{cases} \end{aligned}$$

Den totala elektrostatiske energin blir

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, dv = \frac{4\pi}{2} \frac{Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \left\{ \int_a^b \frac{1}{r^4} r^2 \, dr + \int_b^c \frac{1}{r^4 \epsilon_r} r^2 \, dr + \int_c^\infty \frac{1}{r^4} r^2 \, dr \right\} \\ &= \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \left\{ \frac{1}{a} - \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{1}{b} + \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{1}{c} \right\} = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \left\{ \frac{1}{a} - \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) \right\} \end{aligned}$$

Alternativ lösning: Utgå från

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint \rho V \, dv = \frac{1}{2} Q V(a)$$

där potentialen $V(a) = \int_a^\infty E(r') \, dr'$ på metallklotet är

$$\begin{aligned} V(a) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_a^b \frac{1}{r^2} \, dr + \int_b^c \frac{1}{r^2 \epsilon_r} \, dr + \int_c^\infty \frac{1}{r^2} \, dr \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) \right) \end{aligned}$$

Den elektrostatiske energin blir

$$W_e = \frac{1}{2} Q V(a) = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) \right)$$

S4.14

Klotets rymdladdningstäthet är

$$\rho = \frac{Q}{4\pi a^3/3}$$

Den elektriska flödestätheten innanför/utanför klotet bestäms genom Gauss lag. Av symmetriskäl kan den elektriska flödestätheten endast bero på avståndet till origo, r , och vidare kan fältet endast ha en radiell komponent, dvs. $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = D(r)\hat{\mathbf{r}}$. Funktionsberoendet hos $D(r)$ ges av Gauss lag (klotet innehåller fria laddningar i form av rymdladdningstätheten ρ , och insidan av metallskalet har en fri laddning $-Q$, för övrigt finns inga fria laddningar). Vi får följande (S en sfärisk yta med radie r):

$$\iint_S \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = Q_{\text{enc}} \implies \mathbf{D}(\mathbf{r}) = D(r)\hat{\mathbf{r}} = \frac{Q_{\text{enc}}}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Den inneslutna (fria) laddningen är

$$Q_{\text{enc}} = \begin{cases} \frac{4\pi r^3 \rho}{3} = \frac{Qr^3}{a^3}, & 0 \leq r \leq a \\ Q, & a \leq r < b \\ 0, & b \leq r \end{cases}$$

Detta ger den elektriska flödestätheten och det elektriska fältet, $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\hat{\mathbf{r}}$

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \begin{cases} \frac{r^3}{a^3}, & 0 \leq r \leq a \\ 1, & a \leq r < b \\ 0, & b \leq r \end{cases} \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \begin{cases} \frac{r^3}{a^3 \epsilon_r}, & 0 \leq r \leq a \\ 1, & a \leq r < b \\ 0, & b \leq r \end{cases}$$

Systemets elektrostatiske energi bestäms sedan genom integration

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \, dv$$

Vi får

$$\begin{aligned} W_e &= 2\pi \int_0^a \frac{r^2 Q^2}{16\pi^2 a^6 \epsilon_0 \epsilon_r} r^2 \, dr + 2\pi \int_a^b \frac{Q^2}{16\pi^2 r^4 \epsilon_0} r^2 \, dr \\ &= \frac{Q^2}{40\pi a \epsilon_0 \epsilon_r} + \frac{Q^2}{8\pi a \epsilon_0} - \frac{Q^2}{8\pi b \epsilon_0} \end{aligned}$$

Alternativ lösning: Utgå från

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \, dv = \frac{\rho}{2} \iiint_{r \leq a} V(\mathbf{r}) \, dv$$

eftersom ρ är konstant och potentialen $V = 0$ på metallskalet (inget bidrag till energin från de fria laddningarna på metallskalets insida) Potentialen V beror endast på r och bestäms genom Poissons ekvation

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = \begin{cases} -\rho/(\varepsilon_0 \varepsilon_r), & 0 < r < a \\ 0, & a < r < b \end{cases}$$

Integration i radiell ger

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \begin{cases} r/3 + A/r^2, & 0 < r < a \\ B/r^2, & a < r < b \end{cases}$$

Ytterligare integration i radiell led ger

$$V(r) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \begin{cases} r^2/6 - A/r + C, & 0 < r < a \\ -B/r + D, & a < r < b \end{cases}$$

Potentialen skall vara ändlig i origo, kontinuerlig för $r = a$, samt noll vid $r = b$. Vidare skall $\varepsilon_r V'(a-0) = V'(a+0)$. Detta resulterar i

$$V(r) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \begin{cases} (r^2 - a^2)/6 + \varepsilon_r a^3(1/b - 1/a)/3, & 0 < r < a \\ -\varepsilon_r a^3/(3r) + \varepsilon_r a^3/(3b), & a < r < b \end{cases}$$

Integration ger sedan

$$W_e = 2\pi\rho \int_0^a V(r) r^2 \, dr = -\frac{2\pi\rho^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \int_0^a \frac{r^4 - r^2 a^2}{6} + \frac{\varepsilon_r a^3 r^2}{3} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \, dr$$

eller

$$W_e = \frac{Q^2}{8\pi a \varepsilon_0 \varepsilon_r} \left(\frac{1}{5} + \varepsilon_r a \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right)$$

S4.15

Antag att innerledaren har laddningen ρ_l per längdenhet. Gauss lag ger då att $\mathbf{D}(r_c) = \rho_l/(2\pi r_c) \hat{\mathbf{r}}_c$. Det elektriska fältet ges därmed av

$$\mathbf{E}(r_c) = \frac{\rho_l}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r(r_c) r_c} \hat{\mathbf{r}}_c = \frac{\rho_l(1 + r_c/b)}{4\pi \varepsilon_0 r_c} \hat{\mathbf{r}}_c$$

Potentialen mellan ledarna ges av

$$\begin{aligned} V(a) - V(b) &= \int_a^b \mathbf{E}(r_c) \cdot \hat{\mathbf{r}}_c \, dr_c = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{1 + r_c/b}{r_c} \, dr_c \\ &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{b-a}{b} + \ln(b/a) \right) \end{aligned}$$

Kapacitansen per längdenhet ges av

$$C = \frac{\rho_l}{V(a) - V(b)} = \frac{4\pi\epsilon_0 b}{b - a + b \ln(b/a)}$$

S4.16

De olika skikten kan ses som kapacitanser som är seriekopplade (skikten parallella med metallytorna) eller parallellkopplade (skikten vinkelräta mot metallytorna). Vid seriekoppling adderas inverserna av kapacitanserna, dvs (varje skikt är $d/2N$ tjockt om det finns N skikt av vardera materialet)

$$\frac{1}{C_p} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{C_{2n}} + \frac{1}{C_{3n}} = \sum_{n=1}^N \frac{d/2N}{S\epsilon_0 2} + \frac{d/2N}{S\epsilon_0 3} = \frac{d/2}{S\epsilon_0} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{d}{S\epsilon_0} \frac{5}{12}$$

Detta ger $\epsilon_{rp} = 12/5$. Vid parallellkoppling adderas kapacitanserna, dvs (varje skikt har ytan $S/2N$)

$$C_v = \sum_{n=1}^N C_{2n} + C_{3n} = \sum_{n=1}^N \frac{(S/2N)\epsilon_0 2}{d} + \frac{(S/2N)\epsilon_0 3}{d} = \frac{S\epsilon_0}{d} \frac{2+3}{2} = \frac{S\epsilon_0}{d} \frac{5}{2}$$

I det här fallet fås alltså $\epsilon_{rv} = 5/2$.

S4.17

Rätt randvillkor är uppfyllda om vi antar $\mathbf{E} = E(r_c)\hat{\mathbf{r}}_c$. Antag en laddning Q på innerledaren och bestäm potentialskillnaden $V(a) - V(b)$. Låt S vara ytan av en cirkulär cylinder med radien $a < r_c < b$. Gauss lag ger

$$\begin{aligned} Q &= \int_s \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{r}}_c \, dS = \epsilon_0 E(r_c) \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) r_c L + \epsilon_0 \epsilon_r E(r_c) \frac{\pi}{4} r_c L \\ \Rightarrow E(r_c) &= \frac{4Q}{\epsilon_0 L \pi (7 + \epsilon_r) r_c} \end{aligned}$$

Potentialskillnaden mellan inner- och ytterledaren ge av

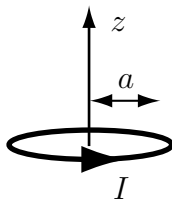
$$V(a) - V(b) = \int_a^b E(r_c) \, dr_c = \frac{4Q}{\epsilon_0 L \pi (7 + \epsilon_r)} \ln \frac{b}{a}$$

Kapacitansen ges av $C = Q/(V(a) - V(b))$ och därmed

$$C = \frac{\varepsilon_0 L \pi (7 + \varepsilon_r)}{4 \ln(b/a)}$$

5 Magnetostatik

5.1



Du skall bestämma den magnetiska flödestätheten i punkten $(0, 0, z)$ från en cirkulär slinga som ligger i planet $z = 0$ med z -axeln som symmetriaxel. Slingan har radien a och det flyter strömmen I i den, enligt figur. I detta fall bör man använda Biot-Savarts lag

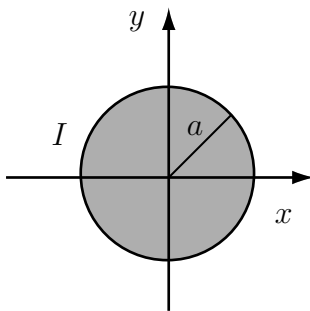
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\boldsymbol{\ell}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

- Ange, utan att räkna, åt vilket håll $\mathbf{B}$ är riktat?
- Vad är kurvan C ? Åt vilket håll skall kurvan C genomlöpas?
- Vilket koordinatsystem är lämpligt att använda?
- Vad är $\mathbf{r}$ i detta fall? Vad kallas denna punkt?
- Vad är vektorn $\mathbf{r}'$ uttryckt i det valda koordinatsystemet? Vad kallas denna punkt?
- Vad är $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$?
- Ge ett lämpligt uttryck för vektorn $d\boldsymbol{\ell}'$.
- Bestäm

$$\frac{d\boldsymbol{\ell}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

- Vad blir $\mathbf{B}(0, 0, z)$?

5.2



Den cirkulära ledaren är lång, rak och för strömmen I i riktning ut ur papperet (positiv z -led). Strömmen är jämnt fördelad över tvärsnittet.

- Vilket koordinatsystem är lämpligt att använda?
- Hur ser de magnetiska fältlinjerna ut?
- Vilken riktning har det magnetiska fältet?
- Beloppet av magnetfältet beror endast av en koordinat. Vilken?
- Vad är strömmen som går igenom en cirkel med radien r_c ?
- Använd Ampères lag för att bestämma $\mathbf{H}$ då $r_c > a$.
- Använd Ampères lag för att bestämma $\mathbf{H}$ för $r_c < a$.

5.3

Studera slingan i uppgift 5.1.

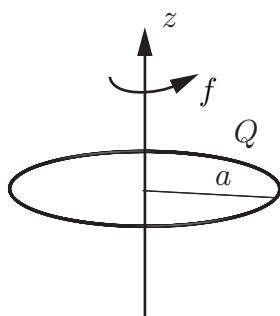
- Vad är slingans dipolmoment $\mathbf{m}$?
- Antag att vi vill bestämma $\mathbf{B}$ på långt avstånd från slingan. Vilket koordinatsystem är det då lämpligt att använda?
- Hur avtar $\mathbf{B}$ med avståndet r då $r \gg a$?
- Vilken approximation använder man lämpligen för att bestämma $\mathbf{B}$ då $r \gg a$?
- Bestäm $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ då $r \gg a$.
- Uttryck punkten $(x, y, z) = (100a, 0, 100a)$ i de sfäriska koordinaterna r , θ och ϕ .
- Uttryck de sfäriska enhetsvektorerna $\hat{\mathbf{r}}$ och $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ i de kartesiska enhetsvektorerna $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ och $\hat{\mathbf{z}}$ i punkten $\mathbf{r} = (100a, 0, 100a)$.
- Bestäm x -, y - och z -komponenterna av $\mathbf{B}$ i punkten $\mathbf{r} = (100a, 0, 100a)$.

5.4

Återigen är det slingan i uppgift 5.1 som gäller. I a) och b) skall du inte använda några formler.

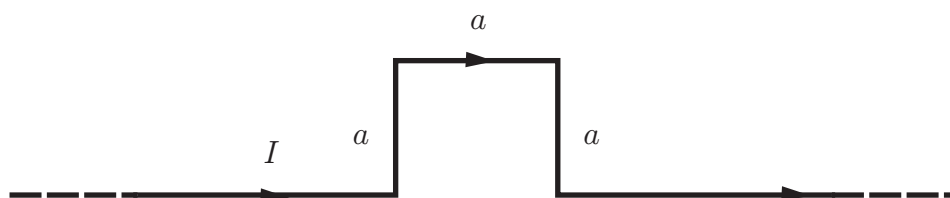
- Antag att man lägger på ett yttre magnetfält $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$. Blir det då någon nettokraft på slingan? Blir det något vridande moment på slingan och hur är detta i så fall riktat?
- Samma som a-uppgiften men med ett yttre magnetfält $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{x}}$.
- Bestäm det vridande momentet $\mathbf{T}$ i uppgift b.

5.5



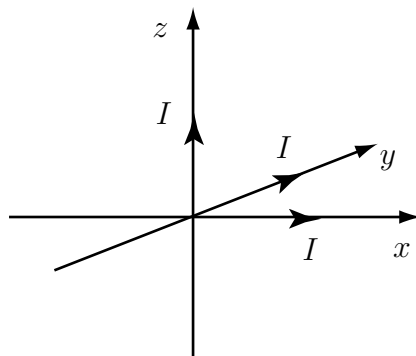
En tunn, cirkulär ring med radie a är jämt uppladdad med total laddning Q , se figur. Ringen roterar med konstant rotationsfrekvens f kring en axel vinkelrät mot ringens plan (z -axeln) och genom dess centrum. Bestäm den uppkomna magnetiska flödestätheten $\mathbf{B}$ längs ringens symmetriaxel, dvs. $\mathbf{B}(z)$.

5.6



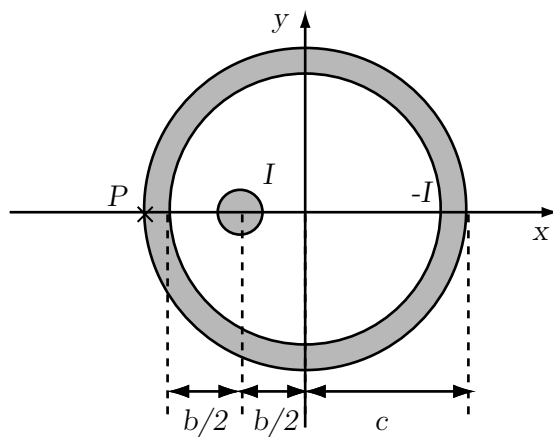
På en oändligt lång, rak ledningstråd har det uppstått en kvadratisk, plan deformation, se figur. Tråden för en likström med styrkan I . Bestäm den magnetiska flödestätheten $\mathbf{B}$ i kvadratens centrum. Det råder vakuum i området.

5.7



Tre långa raka ledare för vardera strömmen I . Ledarna ligger längs de tre koordinataxlarna och strömmarna flyter i positiv x -, y - och z -led. Bestäm magnetfältet $\mathbf{H}$ i punkten $\mathbf{r} = (a, a, a)$.

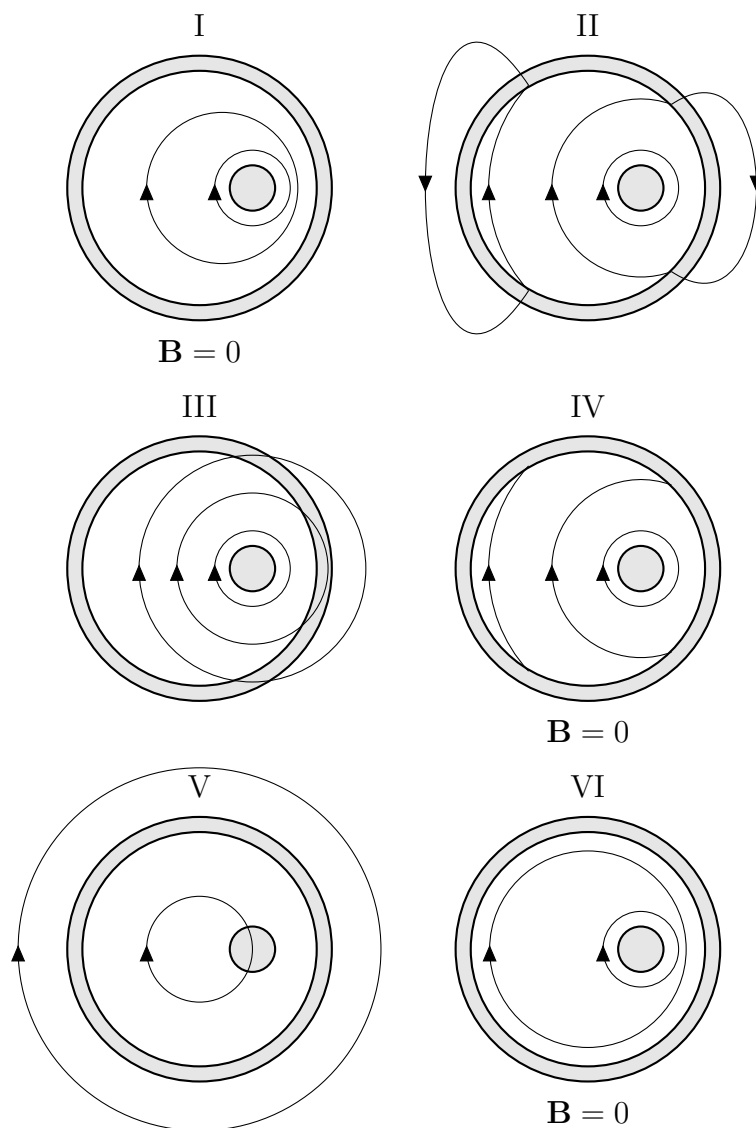
5.8



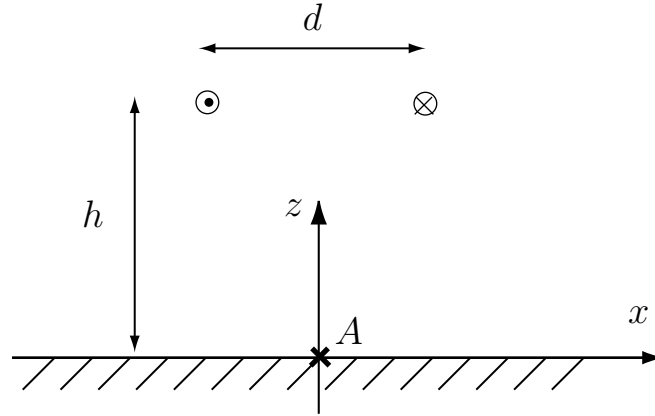
En koaxialkabel har en innerledare med radien a och en ytterledare med innerradien b och yterradien c . Innerledaren är inte centrerad utan ligger på avståndet $b/2$ från ytterledarens centrumlinje. Innerledaren för en likström I och ytterledaren för en lika stor ström i motsatt riktning. Båda strömmarna är jämnt fördelade över respektive tvärsnitt. Överallt är relativa permeabiliteten ett. Bestäm storlek och riktning av den magnetiska flödestätheten $\mathbf{B}$ i punkten P .

5.9

En koaxialkabel består av en cirkulär ytterledare och en excentriskt placerad cirkulär innerledare. I ytter- och innerledaren flyter det samma ström men motsatt riktad (in i pappret för den inre ledaren och ut ur pappret för den yttre). Strömstätheten antas vara jämnt fördelad över respektive ledares tvärsnitt. Vilken av följande fältbilder för den magnetiska flödestätheten $\mathbf{B}$ representerar bäst den rätta fältbilden i problemet:



5.10

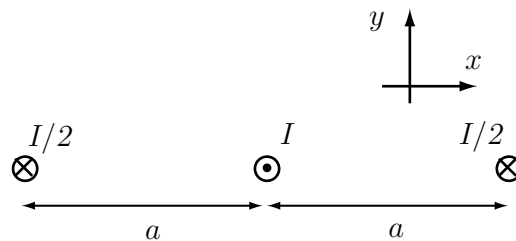


Figuren visar tvärsnittet av en kraftledning på höjden h över marken. Avståndet mellan de två mycket långa raka strömförande ledarna är d . Ledarna för strömmen $i(t) = I_0 \sin \omega t$. Marken antas oledande och dess relativa permeabilitet är $\mu_r = 1$.

Bestäm $\mathbf{B}$ -fältet till storlek och riktning i punkten A rakt under kraftledningen. Frekvensen är så låg att kvasistationära förhållanden antas råda.

5.11

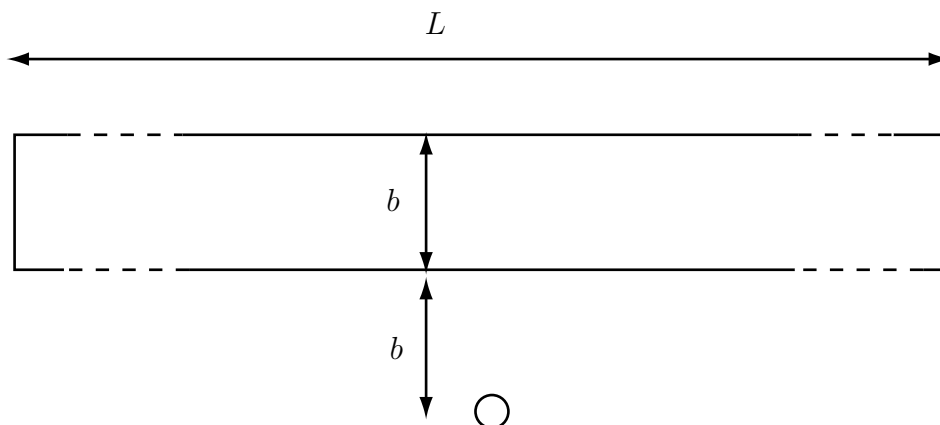
De tre ledarna i figuren är mycket långa. Strömmen I är en likström. Den flyter i positiv z -led i den mittersta ledaren och återledningen sker i de två yttre ledarna.



- Rita ut kraftvektorer som anger vilka magnetiska krafter som verkar på ledarna. Samtliga krafter skall ha rätt riktning och deras inbördes längder skall stämma. Om du anser att någon av ledarna inte utsätts för någon kraft så ritar du inte ut någon vektor på denna ledare.
- Bestäm uttrycken för kraften per längdenhet på var och en av de tre ledarna.

5.12

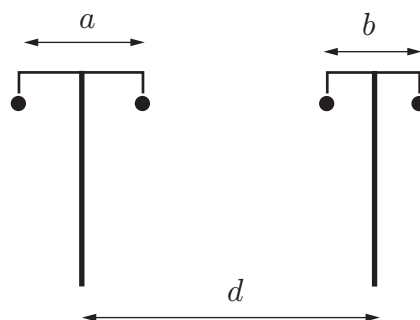
Den cirkulära slingan har radien a . Det gäller att $a \ll b \ll L$.



- Bestäm ett approximativt värde på absolutbeloppet av det magnetiska flödet genom den lilla slingan om strömmen I går genom den stora slingan.
- Bestäm ett approximativt värde på absolutbeloppet av det magnetiska flödet genom den stora slingan om en ström I går genom den lilla slingan.

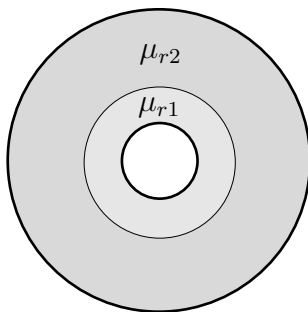
Ledning: Uppgift b) kan lösas på två olika sätt. Ett sätt är mycket enkelt.

5.13



En telefonledning och en kraftledning går parallellt med varandra på samma höjd, se figur. Hur stor blir den ömsesidiga induktansen per km, då $d = 5.0$ m, $a = 1.0$ m och $b = 25$ cm?

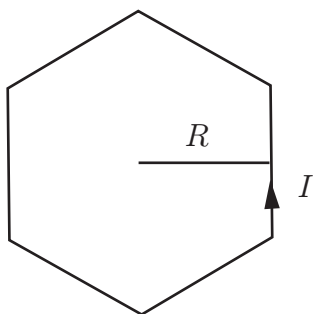
5.14



En koaxialkabel har en innerledare med radien a och en ytterledare med radien $4a$. Mellan ledarna finns två olika material med relativa permeabiliteten $\mu_{r1} = 1$ för $a < r_c < 2a$ och $\mu_{r2} > 1$ för $2a < r_c < 4a$. Inner- och ytterledarna är tunna cylindriska skal. Bestäm koaxialkabelns induktans per längdenhet, L .

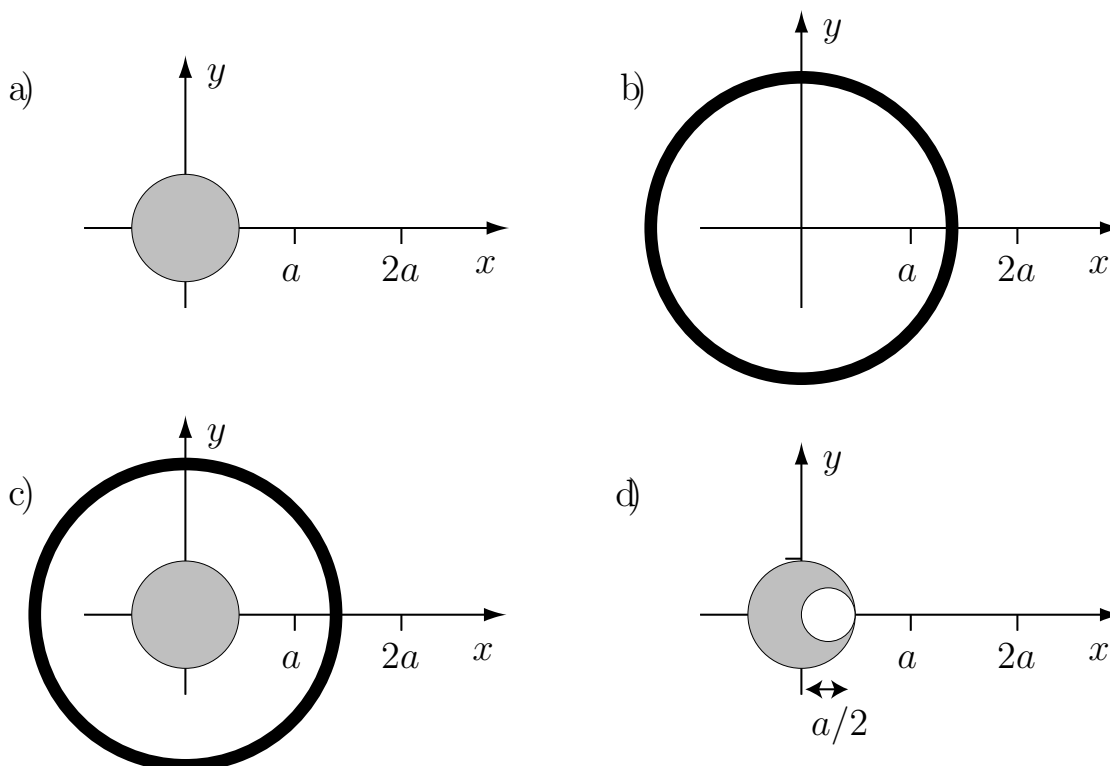
Ledning: Konduktiviteten i området mellan ledarna är såpass liten att den kan försummas. Strömmen som går längs koaxialkabeln går alltså vid $r_c = a$ respektive $r_c = 4a$.

5.15



En trådformig ledare är böjd i form av en reguljär n -hörning, vars inskrivna radie är R . Bestäm den magnetiska flödestätheten $\mathbf{B}$ i n -hörningens centrum då ledaren för strömmen I . Vad sker då $n \rightarrow \infty$. Jämför med ett enklare fall.

5.16



I figurerna ovan visas tvärsnittet av långa raka ledare som alla för strömmen I . I de grå delarna går strömmen ut från papperet (i positiv z -led) och i de svarta delarna går strömmen in i papperet (negativ z -led). Strömmen är jämnt fördelad över tvärsnittet av ledaren. Bestäm magnetfältet $\mathbf{H}$ till riktning och storlek i punkterna $(x, y, z) = (a, 0, 0)$ och $(2a, 0, 0)$ i de fyra fallen a)-d).

Magnetostatik: svar och lösningar

S5.1

- a) Positiv z -led.
- b) Cirkeln som beskriver slingan. Den skall genomlöpas i strömriktningen.
- c) Cylinderkoordinater (r_c, ϕ, z) .
- d) $\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{z}}$. Fältpunkt.
- e) $\mathbf{r}' = a\hat{\mathbf{r}}'_c$. Källpunkt.
- f) $\sqrt{a^2 + z^2}$
- g) $d\ell' = ad\phi'\hat{\phi}'$. Man kan få detta genom att se hur punkten $\mathbf{r}'$ flyttar sig om man ändrar vinkeln ϕ' ett inkrement $d\phi'$. Ett annat alternativ är att utnyttja

$$d\ell' = \frac{d\mathbf{r}'}{d\phi'} d\phi'$$

Den sistnämnda sättet fungerar alltid om man parameterframställt kurvan.

h)

$$\frac{d\ell' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{(az\hat{\mathbf{r}}'_c + a^2\hat{\mathbf{z}})}{(a^2 + z^2)^{3/2}} d\phi'$$

i)

$$\mathbf{B}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 a^2 I}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}$$

S5.2

- a) Planpolära koordinater.
- b) Koncentriska cirklar.
- c) $\hat{\phi}$ (positiv ϕ -led)
- d) r_c
- e)

$$\begin{cases} I \left(\frac{r_c}{a}\right)^2 & \text{om } r_c < a \\ I & \text{om } r_c > a \end{cases}$$

$$\text{f)} \quad \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r_c} \hat{\phi}$$

$$\text{g)} \quad \mathbf{H} = \frac{I r_c}{2\pi a^2} \hat{\phi}$$

S5.3

$$\text{a)} \quad \mathbf{m} = \pi a^2 I \hat{\mathbf{z}}$$

b) Sfäriska

$$\text{c)} \quad r^{-3}$$

d) Dipolapproximationen

$$\text{e)} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\pi a^2 I \mu_0}{4\pi r^3} (2\hat{\mathbf{r}} \cos \theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta)$$

$$\text{f)} \quad r = 100\sqrt{2}a, \theta = \pi/4 \text{ och } \phi = 0.$$

$$\text{g)} \quad \hat{\mathbf{r}} = (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}})/\sqrt{2}, \hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{z}})/\sqrt{2}$$

h)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I \mu_0 10^{-6}}{16\sqrt{2}a} (3\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}})$$

S5.4

a) Ingen nettokraft och inget vridande moment.

b) Ingen nettokraft men ett vridande moment riktat i positiv y -led.

$$\text{c)} \quad \mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = I\pi a^2 B_0 \hat{\mathbf{y}}.$$

S5.5

Vi bestämmer först strömmen som flyter i ringen då den roterar med vinkelhastigheten $\omega = 2\pi f$. Laddningstätheten per längdenhet ρ_ℓ i ringen ges av

$$\rho_\ell = \frac{Q}{2\pi a}$$

vilket ger strömmen I

$$I = \omega a \rho_\ell = \frac{Q\omega}{2\pi} = Qf$$

Ett enklare sätt att komma fram till uttrycket för strömmen I är att notera att under tidsperioden $T = 1/f$ passerar laddningen Q en given punkt på ringen, dvs. $I = Q/T = Qf$.

Biot-Savarts lag evaluerad längs z -axeln, $\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{z}}$, är

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_L \frac{d\mathbf{r}' \times (z\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{r}')}{[z\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{r}']^3}$$

Linjeelementet $d\mathbf{r}' = a\hat{\phi} d\phi$ och källpunkt $\mathbf{r}' = a\hat{\mathbf{r}}_c$ ger

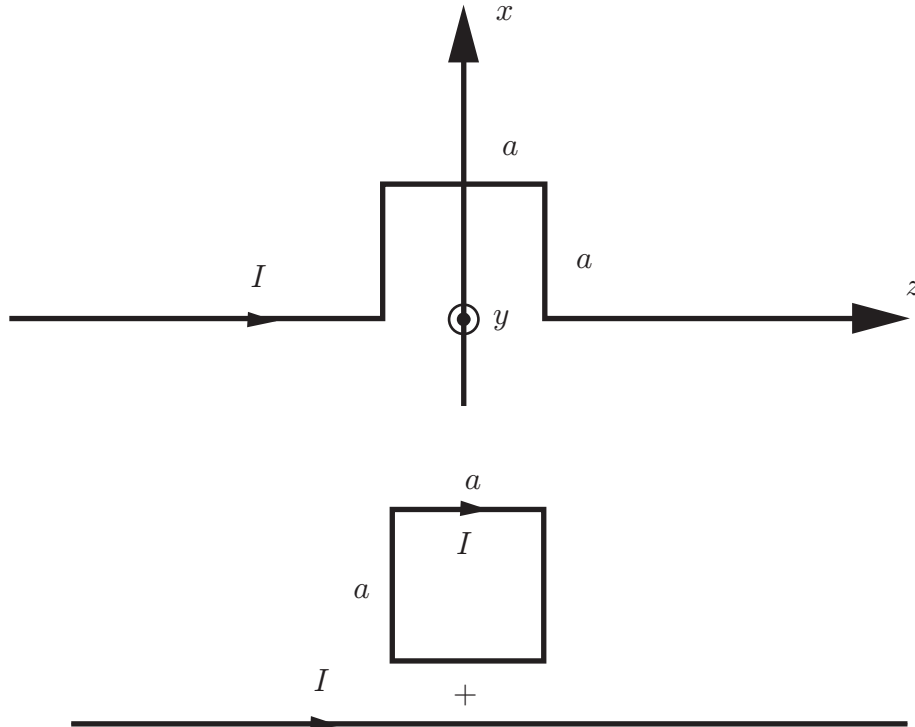
$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \frac{a\hat{\phi} \times (z\hat{\mathbf{z}} - a\hat{\mathbf{r}}_c) d\phi}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

Av symmetriskäl bidrar endast z -komponenten, dvs.

$$\mathbf{B}(z) = \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \frac{a^2 d\phi}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0}{2} I \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$\mathbf{B}(z) = \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 Q f a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

S5.6



Med koordinataxlar som visas i figuren skall vi beräkna den magnetiska flödestätheten i punkten $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}a/2$. Lättast löses problemet genom att lägga till en

strömtråd som kompletterar banan till en hel kvadrat plus en oändligt lång rak ledare. Bidraget $\mathbf{B}_1(\mathbf{r})$ från den oändligt långa ledaren fås enkelt med Ampères lag.

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I \hat{\mathbf{y}}}{2\pi r_c} = \frac{\mu_0 I \hat{\mathbf{y}}}{\pi a}$$

eftersom $r_c = a/2$.

Bidraget $\mathbf{B}_2(\mathbf{r})$ från kvadraten blir fyra gånger bidraget från en av kvadratens sidor, t.ex. det övre linjestycket, som lämpligen parameteriseras genom $\mathbf{r}' = \hat{\mathbf{x}}a + \hat{\mathbf{z}}t$, $t \in [-a/2, a/2]$. Detta bidrag beräknas sedan med mha. Biot-Savarts lag.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_2(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{x}}a/2 - (\hat{\mathbf{x}}a + \hat{\mathbf{z}}t))}{|\hat{\mathbf{x}}a/2 - (\hat{\mathbf{x}}a + \hat{\mathbf{z}}t)|^3} dt \\ &= -\frac{\mu_0 I \hat{\mathbf{y}}}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{a/2}{(a^2/4 + t^2)^{3/2}} dt = -\frac{\mu_0 I \hat{\mathbf{y}}}{2\pi a} \left. \frac{t}{(a^2/4 + t^2)^{1/2}} \right|_{-a/2}^{a/2} = -\frac{\mu_0 I \hat{\mathbf{y}}}{\pi \sqrt{2} a} \end{aligned}$$

vilket sammanlagt blir

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) + 4\mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I \hat{\mathbf{y}}}{\pi a} (1 - 2\sqrt{2})$$

Alternativ, jobbigare lösning: Stömtrådsdelarna, 5 stycken till antalet, parameterframställs som

$$\begin{cases} \mathbf{r}'_1 = \hat{\mathbf{z}}t, & t \in (-\infty, -a/2] \\ \mathbf{r}'_2 = \hat{\mathbf{x}}t - \hat{\mathbf{z}}a/2, & t \in [0, a] \\ \mathbf{r}'_3 = \hat{\mathbf{x}}a + \hat{\mathbf{z}}t, & t \in [-a/2, a/2] \\ \mathbf{r}'_4 = \hat{\mathbf{x}}t + \hat{\mathbf{z}}a/2, & t \in [a, 0] \\ \mathbf{r}'_5 = \hat{\mathbf{z}}t, & t \in [a/2, \infty) \end{cases}$$

Biot-Savarts lag evaluerad $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}a/2$ är

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

där L är hela ledningstråden, dvs. alla 5 strömtrådsdelarna. De olika delarna beräk-

nas var för sig och läggs sedan samman (superposition)

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{-a/2} \frac{\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{x}}a/2 - \hat{\mathbf{z}}t)}{|\hat{\mathbf{x}}a/2 - \hat{\mathbf{z}}t|^3} dt \\ B_2(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^a \frac{\hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}}a/2 - (\hat{\mathbf{x}}t - \hat{\mathbf{z}}a/2))}{|\hat{\mathbf{x}}a/2 - (\hat{\mathbf{x}}t - \hat{\mathbf{z}}a/2)|^3} dt \\ B_3(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{x}}a/2 - (\hat{\mathbf{x}}a + \hat{\mathbf{z}}t))}{|\hat{\mathbf{x}}a/2 - (\hat{\mathbf{x}}a + \hat{\mathbf{z}}t)|^3} dt \\ B_4(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_a^0 \frac{\hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}}a/2 - (\hat{\mathbf{x}}t + \hat{\mathbf{z}}a/2))}{|\hat{\mathbf{x}}a/2 - (\hat{\mathbf{x}}t + \hat{\mathbf{z}}a/2)|^3} dt \\ B_5(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{a/2}^{\infty} \frac{\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{x}}a/2 - \hat{\mathbf{z}}t)}{|\hat{\mathbf{x}}a/2 - \hat{\mathbf{z}}t|^3} dt \end{array} \right.$$

Vi förenklar uttrycken

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1(\mathbf{r}) = B_5(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I \hat{\mathbf{y}}}{4\pi} \int_{-\infty}^{-a/2} \frac{a/2}{(a^2/4 + t^2)^{3/2}} dt \\ B_2(\mathbf{r}) = B_3(\mathbf{r}) = B_4(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I \hat{\mathbf{y}}}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{a/2}{(t^2 + a^2/4)^{3/2}} dt \end{array} \right.$$

Med integralen i problemets ledning får vi

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I \hat{\mathbf{y}}}{2\pi a} \frac{t}{(a^2/4 + t^2)^{1/2}} \Big|_{-\infty}^{-a/2} = \frac{\mu_0 I \hat{\mathbf{y}}}{2\pi a} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ B_2(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I \hat{\mathbf{y}}}{2\pi a} \frac{t}{(a^2/4 + t^2)^{1/2}} \Big|_{-a/2}^{a/2} = -\frac{\mu_0 I \hat{\mathbf{y}}}{\pi \sqrt{2} a} \end{array} \right.$$

Totalt får vi

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 2\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) + 3\mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I \hat{\mathbf{y}}}{\pi a} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 3\frac{\mu_0 I \hat{\mathbf{y}}}{\pi \sqrt{2} a} = \frac{\mu_0 I \hat{\mathbf{y}}}{\pi a} (1 - 2\sqrt{2})$$

S5.7

För en lång rak ledare ger Ampères lag

$$\mathbf{H}(r_c) = \frac{I}{2\pi r_c} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

I punkten $\mathbf{r} = (a, a, a)$ gäller $r_c = \sqrt{2}a$ för alla tre ledarna och

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \begin{cases} \frac{-\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{2}} & \text{för ledaren längs x-axeln} \\ \frac{\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{2}} & \text{för ledaren längs y-axeln} \\ \frac{-\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}} & \text{för ledaren längs z-axeln} \end{cases}$$

Summan av dessa tre vektorer är noll och därmed blir det totala magnetfältet noll, $\mathbf{H}(a, a, a) = \mathbf{0}$. Detta följer också av symmetriskäl.

S5.8

Ampères lag ger

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{(c - b/2)} - \frac{1}{c} \right) \hat{\mathbf{y}}$$

S5.9

Eftersom strömmen är jämnt fördelad i ytterledaren kommer strömmen inte att bidra till flödestätheten innanför ytterledare. Fältbilden innanför ytterledaren kommer därför bestå av koncentriska cirklar kring innerledaren. Därmed är I, V och VI uteslutna. Vidare kan III uteslutas, eftersom inga bidrag från ytterledaren finns med (bilden visar endast fältbilden från innerledaren). Bilden IV representerar inte heller fältbilden korrekt, eftersom fältlinjerna inte är slutna kurvor (divergensen av fältet är inte noll). Flödestätheten utanför ytterledaren i I, IV och VI är identiskt noll, vilket inte går att åstadkomma för två excentriskt placerade ledare med likformig strömfördelning.

Slutsats: Bilden II representerar fältet bäst.

S5.10

Ampères lag ger att bidraget från den vänstra ledaren ges av

$$\mathbf{B}_v = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi(d^2/4 + h^2)} (\hat{\mathbf{x}}h + \hat{\mathbf{z}}d/2)$$

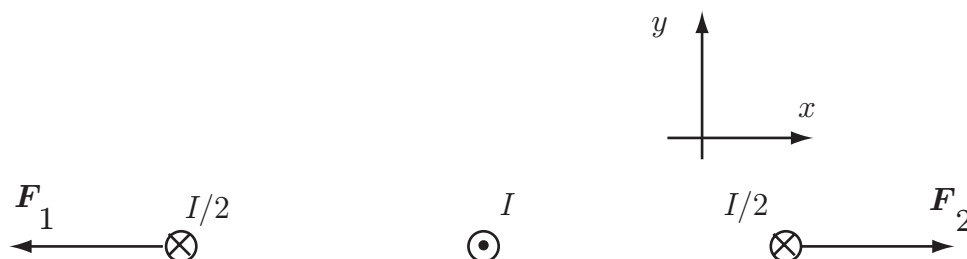
Bidraget från den högra ledaren ges av

$$\mathbf{B}_h = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi(d^2/4 + h^2)} (-\hat{\mathbf{x}}h + \hat{\mathbf{z}}d/2)$$

Totala magnetiska flödestätheten ges därmed av

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_v + \mathbf{B}_h = \frac{\mu_0 i(t)d}{2\pi(d^2/4 + h^2)} \hat{\mathbf{z}}$$

S5.11



- a) Magnetfältet från mittenledaren går moturs och magnetfältet från varje ytterledare går medsols. Totalt ger detta att mittenledaren inte påverkas av något magnetfält, att den vänstra ledaren känner av ett magnetfält som pekar nedåt och att den högra ledaren känner av ett magnetfält som pekar uppåt. Lorentzkraften ger att mittenledaren inte känner av någon kraft, att kraften på den vänstra ledaren pekar åt vänster och att kraften på den högra ledaren pekar åt höger, se figur.
- b) Ampères lag ger att magnetfältet vid den högra ledaren ges av

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{4a} \right) \hat{y} = \frac{3\mu_0 I}{8a\pi} \hat{y}$$

Kraften per längdenhet ges då av BIL -formeln

$$\mathbf{F}_2 = \frac{3\mu_0 I^2}{16a\pi} \hat{x}$$

Kraften på den vänstra ledaren blir på samma sätt

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{3\mu_0 I^2}{16a\pi} \hat{x}$$

Slutligen måste kraften på mittenledaren vara noll.

S5.12

- a) Det magnetiska fältet från en lång rak ledare ges av

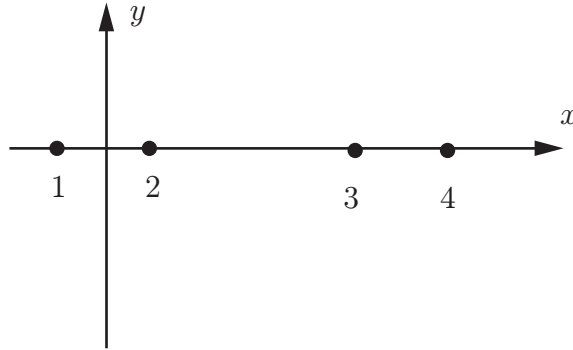
$$\mathbf{B}(r_c) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_c} \hat{\phi}$$

Detta ger flödet

$$|\Phi| = \pi a^2 \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{2b} \right) = \frac{\mu_0 a^2 I}{4b}$$

- b) Vi utnyttjar att $M_{12} = M_{21}$, dvs att den ömsesidiga induktansen mellan två slingor är oberoende av i vilken slinga strömmen går i. Därmed får vi samma flöde som i a)-uppgiften.

S5.13



Introducera ett koordinatsystem enligt figur. Ledarna 1–4 har positionerna

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = -\hat{\mathbf{x}}a/2 \\ \mathbf{r}_2 = \hat{\mathbf{x}}a/2 \\ \mathbf{r}_3 = \hat{\mathbf{x}}(d - b/2) \\ \mathbf{r}_4 = \hat{\mathbf{x}}(d + b/2) \end{cases}$$

Antag att det i ledare 1 flyter en ström $-I$ i positiv z -riktning (ut ur papprets plan), och en ström I i ledare 2. Den magnetiska flödestätheten från en ledare som för strömmen I är

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I\mu_0}{2\pi r_c} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Flödet per längdenhet genom ledarna 3–4 blir därmed (normalriktning $\hat{\mathbf{y}}$ och integrationsvariabel $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}x - \mathbf{r}_{1,2}$)

$$\Phi = \frac{I\mu_0}{2\pi} \int_{d-b/2}^{d+b/2} \left(\frac{1}{x - a/2} - \frac{1}{x + a/2} \right) dx = \frac{I\mu_0}{2\pi} \ln \frac{(d + b/2 - a/2)(d - b/2 + a/2)}{(d - b/2 - a/2)(d + b/2 + a/2)}$$

och den ömsesidiga induktansen $M = \Phi/I$ per längdenhet blir

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{(d + b/2 - a/2)(d - b/2 + a/2)}{(d - b/2 - a/2)(d + b/2 + a/2)}$$

med insatta värden får vi per km

$$M = 2 \cdot 10^{-4} \ln \frac{4.625 \cdot 5.375}{4.375 \cdot 5.625} \text{ H/km} = 2.0 \mu\text{H/km}$$

S5.14

Antag en ström I längs den inre ledaren. Strömmen på den yttre ledaren är då $-I$. Ampéres lag ger

$$\mathbf{H}(r_c) = \begin{cases} \frac{I}{2\pi r_c} \hat{\boldsymbol{\phi}} & a < r_c < 4a \\ \mathbf{0} & \text{annars} \end{cases}$$

Motsvarande B -fält ges av

$$\mathbf{B}(r_c) = \begin{cases} \frac{\mu_0 \mu_{r1} I}{2\pi r_c} \hat{\phi} & a < r_c < 2a \\ \frac{\mu_0 \mu_{r2} I}{2\pi r_c} \hat{\phi} & 2a < r_c < 4a \end{cases}$$

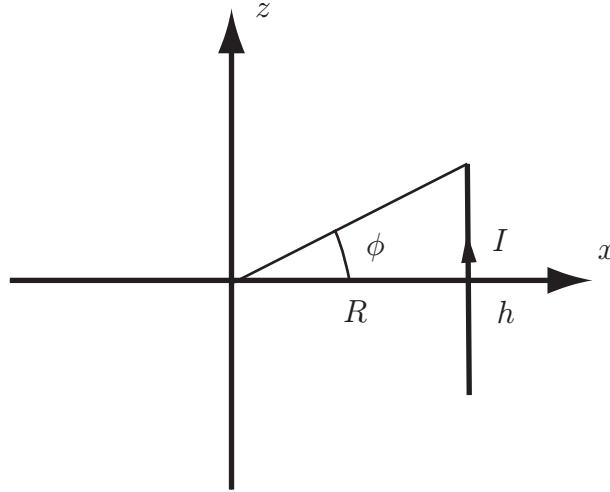
Flödet per längdenhet ges av

$$\Phi = \int_a^{4a} \mathbf{B} \cdot \hat{\phi} \, dr_c = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\mu_{r1} + \mu_{r2}) \ln 2$$

Induktansen per längdenhet ges då av

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} (\mu_{r1} + \mu_{r2}) \ln 2$$

S5.15



Biot-Savarts lag används först för att beräkna den magnetiska flödestätheten från en rak ledare av längd h på avståndet R från ledarens mittpunkt, se figur. Orientera ett koordinatsystem vars z -axel är parallell med den raka ledaren, och mätpunkt i $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Källpunkten betecknas $\mathbf{r}' = R\hat{\mathbf{x}} + z'\hat{\mathbf{z}}$. Fältet i origo blir

$$\mathbf{B}(\mathbf{0}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_L \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-h/2}^{h/2} \frac{dz' \hat{\mathbf{z}} \times (R\hat{\mathbf{x}} + z'\hat{\mathbf{z}})}{(R^2 + z'^2)^{3/2}}$$

Förenklingar ger

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{0}) &= -\frac{IR\mu_0 \hat{\mathbf{y}}}{4\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{dz'}{(R^2 + z'^2)^{3/2}} = -\frac{IR\mu_0 \hat{\mathbf{y}}}{4\pi} \frac{z'}{R^2 (R^2 + z'^2)^{1/2}} \Big|_{-h/2}^{h/2} \\ &= -\frac{I\mu_0 \hat{\mathbf{y}}}{2\pi R} \frac{h}{(4R^2 + h^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

I vårt fall är $h/2 = R \tan \phi$, där $\phi = \pi/n$, se figur. Vi får

$$\frac{h}{(4R^2 + h^2)^{1/2}} = \frac{\tan \phi}{(1 + \tan^2 \phi)^{1/2}} = \sin \phi$$

vilket ger en total magnetisk flödestäthet i origo från de n raka ledarna som utgör n -hörningen

$$\mathbf{B}(\mathbf{0}) = -\frac{In\mu_0\hat{\mathbf{y}}}{2\pi R} \sin \pi/n$$

där $\hat{\mathbf{y}}$ är en enhetsvektor som pekar in i papperets plan med den strömriktning som anges i problemets figur.

I gränsen $n \rightarrow \infty$ får vi

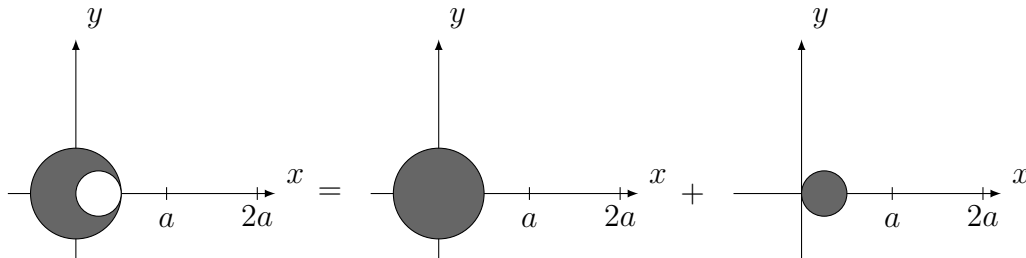
$$\mathbf{B}(\mathbf{0}) = -\frac{I\mu_0\hat{\mathbf{y}}}{2R}$$

vilket är fältet i centrum av en cirkulär slinga med radien R .

S5.16

a)-c) ges av Ampéres lag. $\mathbf{H} = \frac{I_{\text{tot}}}{2\pi r_c} \hat{\phi}$ där I_{tot} är den totala strömmen innanför cirkeln med radien r_c och $\hat{\phi}$ är enhetsvektorn i φ -led. På x -axeln gäller $\hat{\phi} = \hat{\mathbf{y}}$

- a) $I_{\text{tot}} = I$ både för $r_c = a$ och $r_c = 2a$. Detta ger $\mathbf{H}(a, 0, 0) = I/(2\pi a)\hat{\mathbf{y}}$ respektive $\mathbf{H}(2a, 0, 0) = I/(4\pi a)\hat{\mathbf{y}}$
- b) $I_{\text{tot}} = 0$ för $r_c = a$ och $I_{\text{tot}} = -I$ för $r_c = 2a$. Detta ger $\mathbf{H}(a, 0, 0) = \mathbf{0}$ respektive $\mathbf{H}(2a, 0, 0) = -I/(4\pi a)\hat{\mathbf{y}}$.
- c) $I_{\text{tot}} = I$ för $r_c = a$ och $I_{\text{tot}} = I - I = 0$ för $r_c = 2a$. Detta ger $\mathbf{H}(a, 0, 0) = I/(2\pi a)\hat{\mathbf{y}}$ respektive $\mathbf{H}(2a, 0, 0) = \mathbf{0}$.
- d) Man kan lägga till och dra ifrån en ström $I_k = \pi(a/4)^2 I / (0.75\pi(a/2)^2) = I/3$, enligt figur.

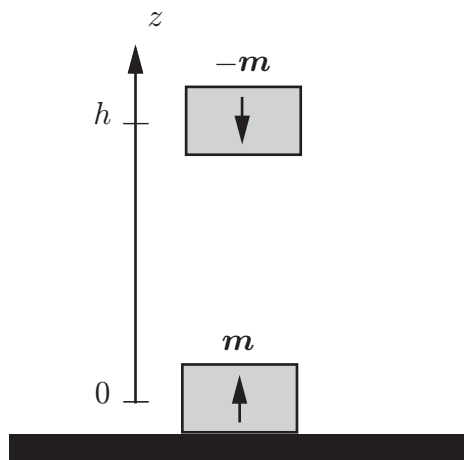


Ampères lag ger

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(a, 0, 0) &= \frac{4I}{6\pi a} \hat{\mathbf{y}} - \frac{I/3}{2\pi 0.75a} \hat{\mathbf{y}} = \frac{4I}{9\pi a} \hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{H}(2a, 0, 0) &= \frac{4I}{6\pi 2a} \hat{\mathbf{y}} - \frac{I/3}{2\pi 1.75a} \hat{\mathbf{y}} = \frac{5I}{21\pi a} \hat{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

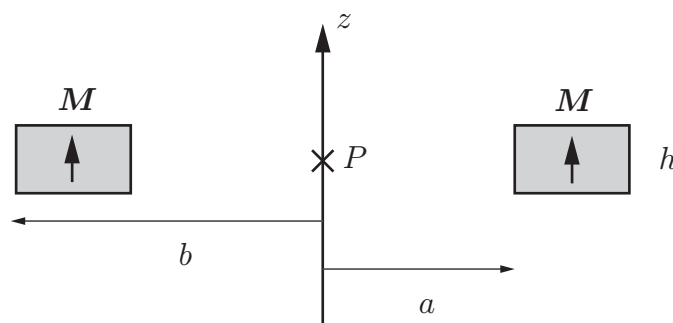
6 Magnetiska fält i material

6.1



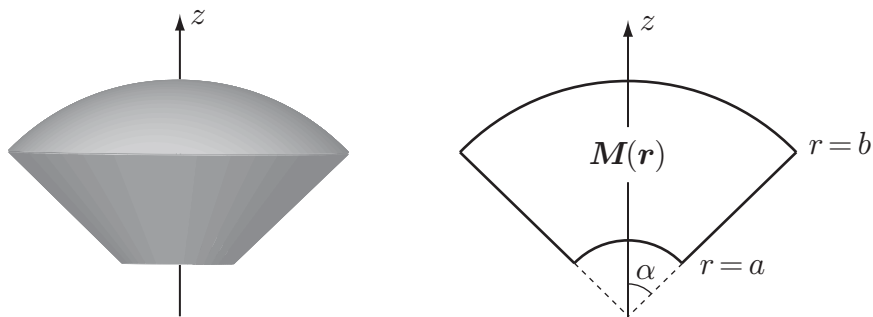
Du har två små, identiska magneter, och bestämmer dig för att undersöka hur starka dessa är. Eftersom de är små, approximerar du vardera magnet med en magnetisk dipol med dipolmoment m . Du arrangerar en uppställning, så att magneternas centra, med antiparallella dipolmoment, i vila befinner sig på ett vertikalt avstånd h från varann under inverkan av tyngdkraften, se figur. Magneternas vägs och vardera massa bestäms till M . Hur stort är magneternas dipolmoment m ? Tyngdaccelerationen betecknas med g .

6.2



En permanentmagnet har formen av en ring med rektangulärt tvärsnitt. Magnetiseringen i ringen antas vara konstant $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{z}}$ och riktad längs ringens symmetriaxel, se figur. Inner- och yttre-radier på ringen är a respektive b , och dess höjd är h . Bestäm den magnetiska flödestätheten $\mathbf{B}$ i magnetens centrum, punkten P .

6.3

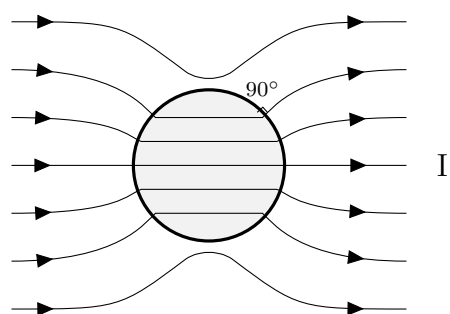


Ett område $\{(r, \theta, \phi) : a \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq \alpha, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$ i sfäriska koordinater har magnetiseringen $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = M_0 \frac{a^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$. Beräkna magnetiska flödestätheten $\mathbf{B}$ i origo.

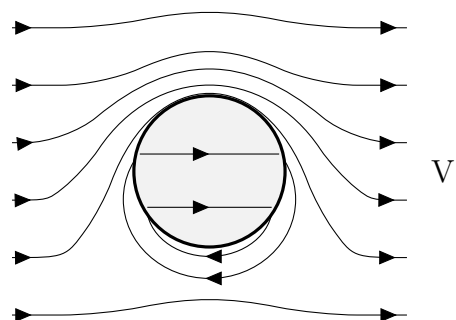
6.4

En lång, homogen cylinder förs in i ett område med konstant $\mathbf{B}$ -fält. Figuren nedan visar ett antal alternativ på den magnetiska flödestätheten för området i och kring cylindern. Vilket (eller vilka) av alternativen representerar den korrekta fältbilden för den magnetiska flödestätheten med följande egenskaper hos cylindern:

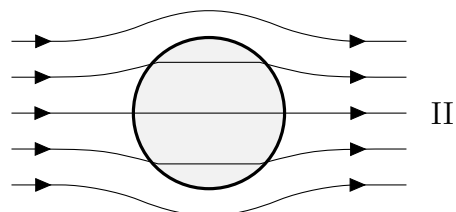
- a) Diamagnetiskt material, $0 < \mu_r < 1$.
- b) Idealt diamagnetiskt material, $\mu_r = 0$.
- c) Paramagnetiskt eller ferromagnetiskt material, $\mu_r > 1$.
- d) Idealt ferromagnetiskt material, $\mu_r = \infty$.
- e) Elektrisk ledare ($\mu_r = 1$), som för en elektrisk ström, som är jämnt fördelad över ledarens *yta*.
- f) Elektrisk ledare ($\mu_r = 1$), som för en elektrisk ström, som är jämnt fördelad över ledarens *tvärsnitt*.



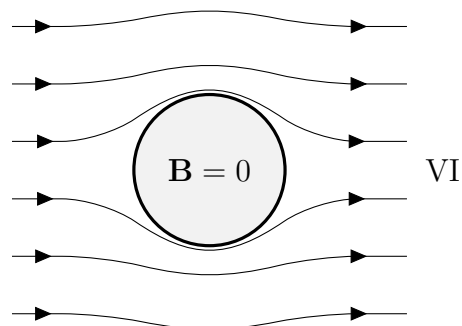
I



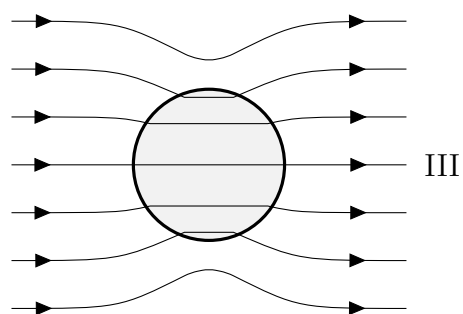
V



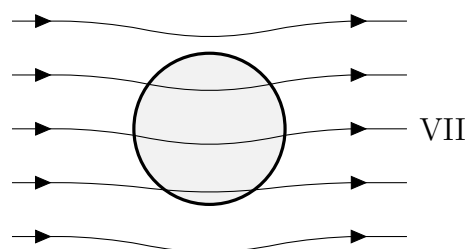
II



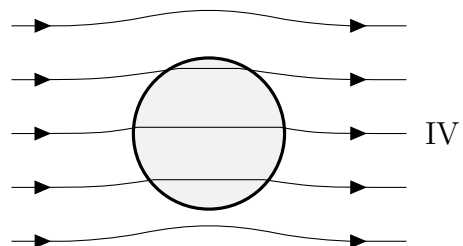
VI



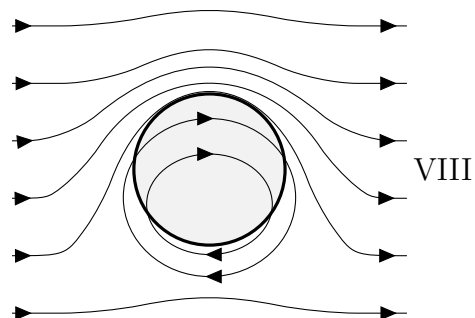
III



VII



IV



VIII

Magnetiska fält i material: svar och lösningar

S6.1

Den magnetiska flödestätheten $\mathbf{B}$ från en magnetisk dipol i origo med magnetiskt dipolmoment $\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{z}}$ är

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2\hat{\mathbf{r}} \cos \theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta)$$

Den magnetiska flödestätheten på symmetriaxeln (z -axeln) blir

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{2\pi |z|^3} \hat{\mathbf{z}}$$

Vi lägger en z -axel pekande vertikalt uppåt i figuren med origo i den nedre magnetens centrum. Kraften $\mathbf{F}$ på den övre magneten från den nedre magneten kan nu tecknas

$$\mathbf{F} = \nabla ((-\mathbf{m}) \cdot \mathbf{B})|_{z=h} = -\frac{\mu_0 m^2}{2\pi} \frac{d}{dz} \frac{1}{z^3} \bigg|_{z=h} \hat{\mathbf{z}} = \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi h^4} \hat{\mathbf{z}}$$

Denna extra kraft balanseras av den övre magnetens tyngd $-Mg\hat{\mathbf{z}}$, dvs.

$$Mg = \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi h^4}$$

ur vilket vi löser ut m

$$m = h^2 \sqrt{\frac{2\pi Mg}{3\mu_0}}$$

S6.2

Den konstanta magnetiseringen $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{z}}$ har en ekvivalent ytströmtäthet $\mathbf{J}_S = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$ på magnetens mantelyta (topp- och botten-ytan bidrar ej då ytnormal och $\mathbf{M}$ där är parallella). Dessa strömmar är en konsekvens av de bundna strömmarna i materialet.

$$\mathbf{J}_S = \begin{cases} -\mathbf{M} \times \hat{\boldsymbol{\rho}} = -M\hat{\boldsymbol{\phi}}, & \rho = a \\ \mathbf{M} \times \hat{\boldsymbol{\rho}} = M\hat{\boldsymbol{\phi}}, & \rho = b \end{cases}$$

Biot-Savarts lag ger nu den magnetiska flödestätheten i centrum $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ (källvektorn $\mathbf{r}' = \rho' \hat{\boldsymbol{\rho}}' + z' \hat{\mathbf{z}}$).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(\mathbf{0}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\mathbf{J}_S(\mathbf{r}') \times (\mathbf{0} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{0} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{a}' \\
 &= \frac{M\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}' \times (a\hat{\boldsymbol{\rho}}' + z'\hat{\mathbf{z}})}{(a^2 + z'^2)^{3/2}} dz' \right) a d\phi' \\
 &\quad - \frac{M\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}' \times (b\hat{\boldsymbol{\rho}}' + z'\hat{\mathbf{z}})}{(b^2 + z'^2)^{3/2}} dz' \right) b d\phi' \\
 &= -\frac{\hat{\mathbf{z}}M a^2 \mu_0}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{dz'}{(a^2 + z'^2)^{3/2}} + \frac{\hat{\mathbf{z}}M b^2 \mu_0}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{dz'}{(b^2 + z'^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{\hat{\mathbf{z}}M\mu_0}{2} \left[\frac{z'}{(b^2 + z'^2)^{1/2}} - \frac{z'}{(a^2 + z'^2)^{1/2}} \right]_{z'=-h/2}^{z'=h/2} \\
 &= \hat{\mathbf{z}}M\mu_0 \left\{ \frac{h}{(4b^2 + h^2)^{1/2}} - \frac{h}{(4a^2 + h^2)^{1/2}} \right\}
 \end{aligned}$$

S6.3

Eftersom $\nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ finns det inte någon bunden volymströmtätheten inuti kroppen. Vidare finns det ingen bunden ytströmtäthet på kalotterna eftersom de utåtriktade enhetsvektorerna på dessa ytor är parallella med magnetiseringen. På mantelytan ($\hat{\mathbf{n}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$) finns dock en bunden ytströmtäthet:

$$\mathbf{J}_{\text{m,S}}(\mathbf{r}) = \mathbf{M}(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{n}} = M_0 \frac{a^2}{r^2} (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}) = M_0 \frac{a^2}{r^2} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Magnetiska flödestätheten i punkten $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ ges av Biot-Savarts lag:

$$\mathbf{B}(\mathbf{0}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_{\text{m,S}}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{0} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{0} - \mathbf{r}'|^3} dS' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_{\text{m,S}}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}'}{r'^3} dS'$$

där integrationen sker över mantelytan och $dS' = r' \sin \alpha dr' d\phi'$. Speciellt är

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_{\text{m,S}}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}' &= M_0 \frac{a^2}{r'^2} (\hat{\boldsymbol{\phi}} \times \mathbf{r}') = M_0 \frac{a^2}{r'} (\hat{\boldsymbol{\phi}} \times \hat{\mathbf{r}}) = M_0 \frac{a^2}{r'} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\
 &= M_0 \frac{a^2}{r'} (\hat{\mathbf{x}} \cos \alpha \cos \phi' + \hat{\mathbf{y}} \cos \alpha \sin \phi' - \hat{\mathbf{z}} \sin \alpha)
 \end{aligned}$$

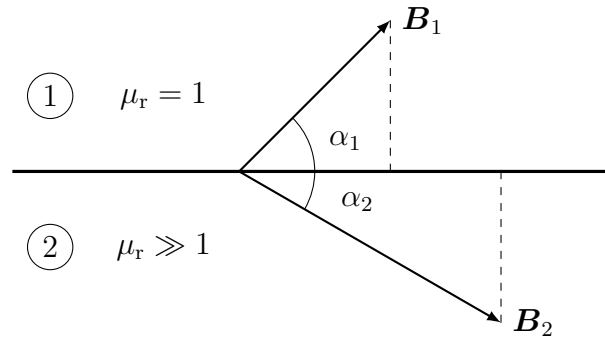
Eftersom $\cos \phi'$ och $\sin \phi'$ integrerat mellan 0 och 2π är noll återstår endast integralen i $\hat{z}$ -led:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(0) &= \hat{z} \frac{\mu_0 M_0 a^2 \sin^2 \alpha}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_a^b \frac{dr'}{r'^3} = \hat{z} \frac{\mu_0 M_0 a^2 \sin^2 \alpha}{4} \left\{ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right\} \\ &= \hat{z} \frac{\mu_0 M_0 \sin^2 \alpha}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

S6.4

Vi konstaterar först att de symmetriska fältbilderna, I, II, III och VI, är associerade med magnetiska material, medan de asymmetriska bilderna, IV, V, VII och VIII, måste vara konsekvenser av en ström som flyter i ledaren.

- a) II. Glesare fältlinjer inuti cylindern.
- b) VI. Inga fältlinjer inuti cylindern, $\mathbf{B}$ -fältet är noll inuti cylindern.
- c) III. Tätare fältlinjer inuti cylindern.
- d) I. Över gränssytan är $\mathbf{H}$ -fältets tangentialkomponent (inga ytströmmar) och $\mathbf{B}$ -fältets normalkomponent kontinuerliga.



Randvillkoren ger

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot \mathbf{B}_1 = \hat{n} \cdot \mathbf{B}_2 \\ \hat{n} \times \mathbf{B}_1 = \frac{1}{\mu_r} \hat{n} \times \mathbf{B}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 \sin \alpha_1 = B_2 \sin \alpha_2 \\ B_1 \cos \alpha_1 = \frac{1}{\mu_r} B_2 \cos \alpha_2 \end{cases}$$

vilket ger $\tan \alpha_1 = \mu_r \tan \alpha_2 \rightarrow \infty$, när $\mu_r \rightarrow \infty$. Således $\alpha_1 \rightarrow \pi/2$, jfr. ekvipotentialyta för det elektriskt fält med metallkropp.

- e) IV och V. En jämnt fördelad ytström ger inget bidrag till fältet inuti cylindern, dvs. fältet inuti cylindern ges av det yttre konstanta fältet. Skillnaden mellan IV och V är strömmens styrka — starkare i V. $\mathbf{B}$ -fältets tangentialkomponent diskontinuerlig p.g.a. ytströmmar. I båda fallen går ytströmmen in i pappret.

- f) VII och VIII. Utanför cylindern finns ingen skillnad i fältbilden om strömmen är jämnt fördelad på ytan eller flyter i hela tvärsnittet. Bilderna V och VIII har samma fältbild utanför cylindern. Det har även IV och VII, bortsett från att strömmarna har motsatt riktning i de två fallen. I fallet med volymströmmar är fälten kontinuerliga över cylinderytan, eftersom både normal- och tangentialkomponenter är kontinuerliga ($\mu_r = 1$), jfr. bilderna på ytströmmar, IV och V, där tangentialkomponenterna är diskontinuerliga. I VII går strömmen ut ur pappret och i VIII in i pappret.

7 Elektrodynamik

7.1

En stav har längden L , tvärsnittsarean A och konduktiviteten σ . I staven går likströmmen I . Lägg z -axeln längs staven och låt strömmen gå i positiv z -riktning

- a) Bestäm strömtätheten $\mathbf{J}$ i staven.
- b) Bestäm det elektriska fältet i staven.
- c) Bestäm spänningen mellan stavens ändar.
- d) Vad är stavens resistans?
- e) Vad är effektutveckling per volymsenhet i staven?
- f) Vilken effekt utvecklas i staven. Räkna ut den dels genom att du vet spänning och ström och dels genom att du vet effektutvecklingen per volymsenhet.

7.2

Området mellan två koncentrisk metallskal är fyllt med en elektrolyt med konduktivitet σ . Den inre sfären har radien a och den yttre radien b . En ström I går från den inre till den yttre sfären.

- a) Bestäm strömtätheten $\mathbf{J}$ som funktion av radien r i området mellan sfärerna.
- b) Bestäm det elektriska fältet i området mellan sfärerna.
- c) Bestäm spänningen mellan sfärerna.
- d) Vad är resistansen mellan sfärerna? Bestäm denna utgående från att du vet spänning och ström.
- e) Bestäm nu resistansen genom att se området mellan sfärerna som seriekopplade resistanser.

7.3

Området mellan två koncentrisk cylindrar är fyllt med en elektrolyt med konduktivitet σ . Cylindrarnas längd är L och den inre cylindern har radien a och den yttre radien b . En ström I går från den inre till den yttre cylindern.

- a) Bestäm strömtätheten $\mathbf{J}$ som funktion av radien r_c i området mellan cylindrarna.
- b) Bestäm det elektriska fältet i området mellan cylindrarna.
- c) Bestäm spänningen mellan cylindrarna.
- d) Vad är resistansen mellan cylindrarna? Bestäm denna utgående från att du vet spänning och ström.
- e) Bestäm nu resistansen genom att se området mellan cylindrarna som seriekopplade resistanser.

7.4

En plan slinga med ytnormal $\hat{\mathbf{x}}$ och yta A utsätts för ett i rummet homogent magnetiskt fält $\mathbf{B} = B_0 \cos \omega t \hat{\mathbf{x}}$. Vad är flödet genom slingan, och vilken elektromotorisk kraft påverkar den?

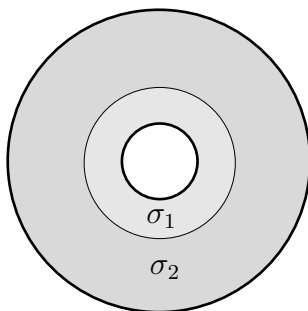
7.5

En plan slinga med ytnormal $\hat{\mathbf{x}}$ och yta A förs med hastigheten $v_0 \hat{\mathbf{y}}$ genom det i tiden konstanta magnetiska fältet $\mathbf{B} = B_0 \cos ky \hat{\mathbf{x}}$. Vid $t = 0$ befinner sig slingan i $y = 0$. Vad är flödet genom slingan, och vilken elektromotorisk kraft påverkar slingan? Ytan S förutsätts liten i förhållande till längdskalan $1/k$.

7.6

Havsvatten kan beskrivas av $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = 81\varepsilon_0$, $\sigma = 20 \text{ S/m}$. Vid vilken frekvens är beloppet av ledningsströmmen $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ 10 gånger större än beloppet av förskjutningsströmmen $\partial_t \mathbf{D}$? Antag tidsharmoniska fält, dvs $\partial_t \mathbf{D} = j\omega \mathbf{D}$.

7.7



En koaxialkabel har en innerledare med radien a och en ytterledare med innerradien $4a$. Mellan ledarna finns två olika material. I området $a < r_c < 2a$ är det ett material med konduktiviteten σ_1 och i området $2a < r_c < 4a$ är det ett material med konduktivitet σ_2 . Bestäm konduktansen G (dvs $1/R$) per längdenhet mellan ledarna.

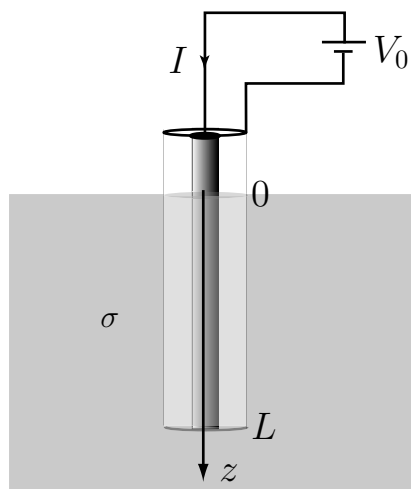
7.8

Två koncentriska metalliska sfärer har radierna a respektive $2a$. Området mellan sfärerna är fyllt med ledande material vars konduktivitet varierar som

$$\sigma(r) = \alpha r$$

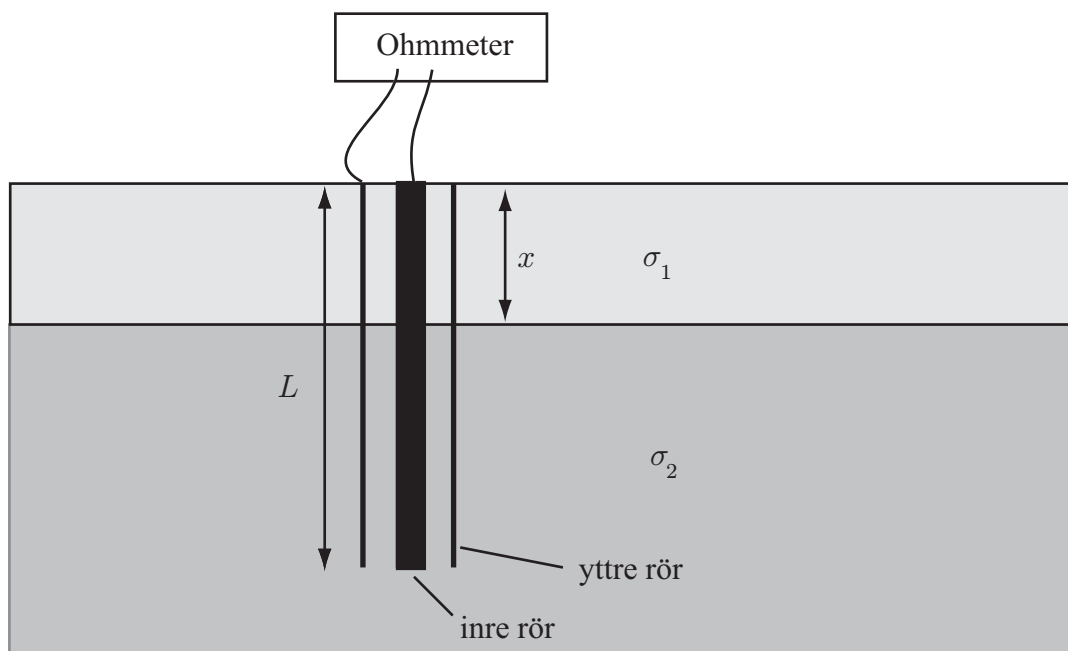
Vad blir strömmen mellan skalerna om det inre skalet jordas och det yttre får potentialen V ?

7.9



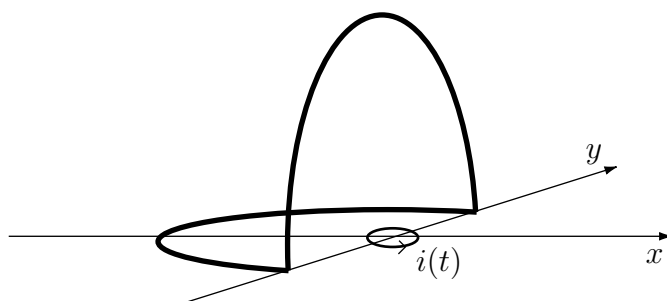
- För att mäta konduktiviteten hos en vätska använder man sig av en koaxialkabel, enligt figur. Området $0 < z < L$ mellan innerledaren och ytterledaren är fyllt med vätskan. En spänning V_0 läggs mellan inner- och ytterledaren och strömmen mäts med en amperemeter. Koaxialkabeln är öppen i båda ändar och området ovanför vätskeytan är fyllt med luft. Bortse från randeffekterna vid $z = L$. Bestäm strömmen I uttryckt i innerledarens yttre radie, a , ytterledarens innerradie, b , längden L , spänningen V_0 samt vätskans konduktivitet σ .
- Antag att man inte kan bortse från randeffekterna vid koaxialkabelns nedre ända. Beskriv hur man skall göra mätningar så att man ändå kan få ett noggrannt värde på σ .

7.10



I en tank finns två vätskor med olika densitet och konduktivitet. Vätskorna kan inte blandas, och, eftersom de har olika densitet, ligger den lättare vätskan i ett skikt ovanpå den tyngre vätskan. För att bestämma volymen av den lättare vätskan använder man en nivåmätare enligt figur. Nivåmätaren består av två koncentriska rör (dvs. de har gemensam symmetriaxel). Den övre delen av rören ligger i nivå med den lättare vätskans övre yta. Det inre rörets ytterradii är a , och det yttre rörets innerradii är b . Konduktiviteten är σ_1 för den lättare vätskan och σ_2 för den tyngre. Båda rören har längden L . Genom att mäta upp resistansen R mellan rören kan man bestämma tjockleken x på skiktet av den lättare vätskan. Bestäm R uttryckt i x , σ_1 , L , a och b .

7.11

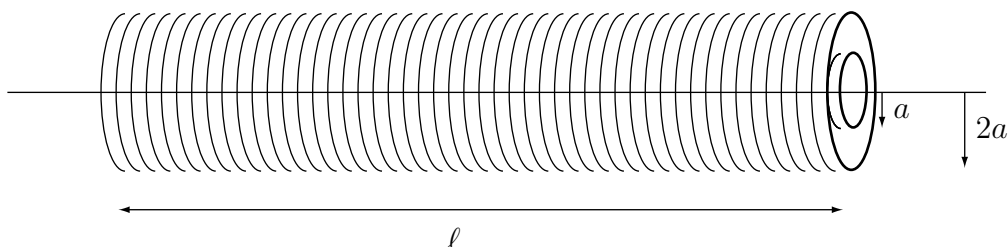


En liten cirkulär slinga med radien a ligger i x - y -planet med centrum i origo. I slingan flyter en ström $i(t) = I_0 \sin \omega t$. En stor yttre slinga består av två halvcirkelformade

trådar med radie $b \gg a$ och är placerad enligt figuren. Den yttre slingans resistans är R . Bestäm först magnetiska flödestätheten från den lilla slingan (på stort avstånd) och därefter den inducerade strömmen i den yttre slingan (du behöver inte ange strömmens riktning).

7.12

En tät lindad spole med cirkulärt tvärsnitt har radien $2a$, längden $\ell \gg a$ och är lindad med N varv. En tät lindad spole med samma antal varv och samma längd men med radien a ligger koncentriskt i den större spolen. Spolarnas ändytter ligger i samma plan. Relativa permeabiliteten är ett överallt.

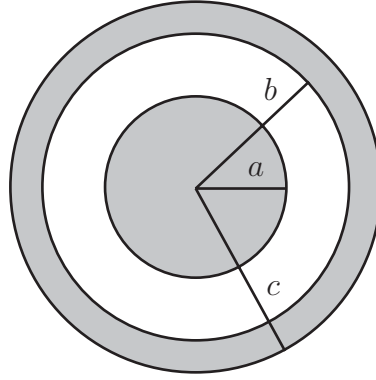


- a) Bestäm den yttre spolens självinduktans.
- b) Bestäm spolarnas ömsesidiga induktans $|M|$.

7.13

Två kvadratiske metallslingor har sidan a . Den ena slingan placeras i x - y -planet med mittpunkten i origo. Den andra slingan placeras med sin mittpunkt i punkten $(R, 0, 0)$ på x -axeln där $R \gg a$. Hur skall den andra slingan orienteras så att den ömsesidiga induktansen mellan slingorna blir maximal och vad blir denna ömsesidiga induktans?

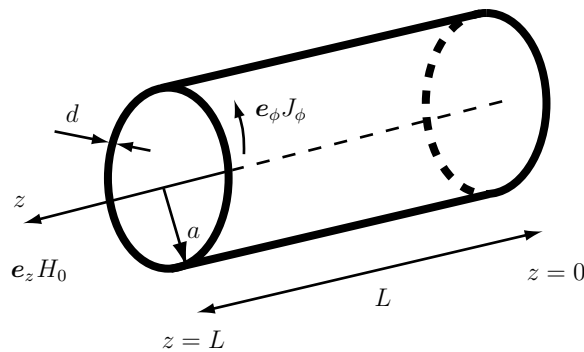
7.14



En koaxialkabel består av en innerledare av massiv koppar, som antas vara omagnetiskt, och vars radie är a . Koaxialkabelns ytterledare är ett kopparrör med innerradie b och ytterradie c . Koaxialkabeln för strömmen I , som antas vara jämnt fördelad över tvärsnittet. Bestäm den magnetiska energin per längdenhet.

7.15

En induktionsugn används till exempel vid metallbearbetning när konventionella ugnar inte kan generera tillräckligt hög värme. Principen är att ett varierande magnetfält inducerar starka strömmar i metallen, vilket leder till värmeutveckling på grund av den ändliga ledningsförmågan.



Låt geometrin vara given enligt figur ovan, dvs vi studerar ett cylindriskt skal av metall med radie a , tjocklek d och längd L . Lämpliga geometriapproximationer är $d \ll a \ll \lambda$, där $\lambda = c_0/\omega$ är våglängden, samt att försumma kanteffekter vid $z = 0$ och $z = L$. Det totala magnetfältet inuti cylindern är då homogent, och om vi antar tidsharmoniska fält med konventionen $\mathbf{H}(t) = \text{Re}\{\mathbf{H}e^{j\omega t}\}$, så blir den komplexa amplituden $\mathbf{H}$ för det totala magnetfältet

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{z}}(H_0 + J_\phi d) = \hat{\mathbf{z}}(H_0 + \sigma E_\phi d),$$

där $J_\phi = \sigma E_\phi$ är den ström som induceras i metallskalet. Detta uttryck tar alltså hänsyn till självinduktionen i metallskalet. I uppgifterna nedan skall varken J_ϕ eller E_ϕ betraktas som given.

- Beräkna E_ϕ i metallskalet med hjälp av Faradays induktionslag, $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -j\omega \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$.
- Beräkna tidsmedelvärdet av den effekt som utvecklas i metallskalet. Vad är gränsvärdet av denna effekt då ledningsförmågan går mot oändligheten?

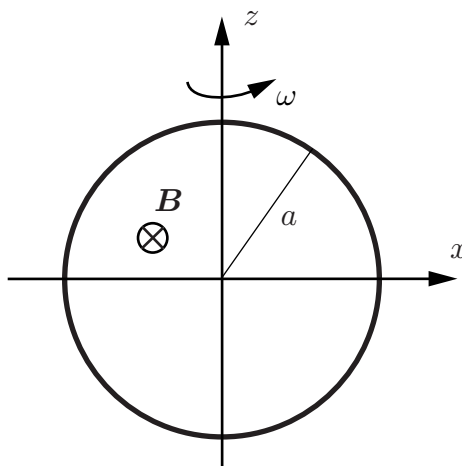
7.16

En induktionsspis fungerar på så sätt att ett tidsvarierande magnetfält inducerar strömmar i kastrullen. Dessa strömmar orsakar värmeutveckling i kastrullen, som i sin tur värmer maten. Fördelen är att man inte behöver värma en spisplatta, utan energiutvecklingen sker direkt i kastrullen.

Kastrullens botten modelleras med en cirkulär metallskiva med radie a och tjocklek d . Skivan ligger i x - y -planet. Metallen har ledningsförmågan σ , och den magnetiska flödestätheten antas vara tidsharmonisk och inte variera över kastrullbottens utsträckning, dvs $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = B_0 \hat{\mathbf{z}} \cos \omega t$.

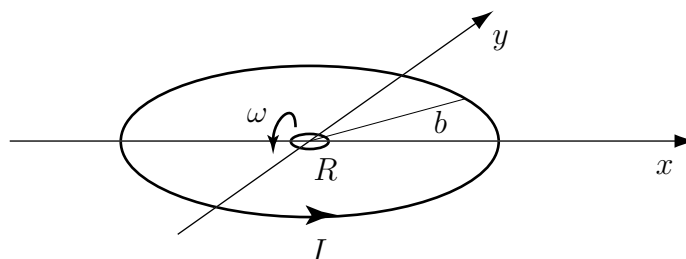
Beräkna tidsmedelvärdet av den totala effektutvecklingen i kastrullbotten. Du behöver inte ta hänsyn till självinduktionen.

7.17



En tunn, cirkulär metallring med radie a och resistansen R roterar med konstant vinkelfrekvens ω i ett område med konstant magnetiskt flödestäthet, $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{y}}$. Rotationen sker kring z -axeln genom ringens centrum i positiv led, se figur. Bestäm effektutvecklingen P i slingan. Försumma metallringens självinduktion.

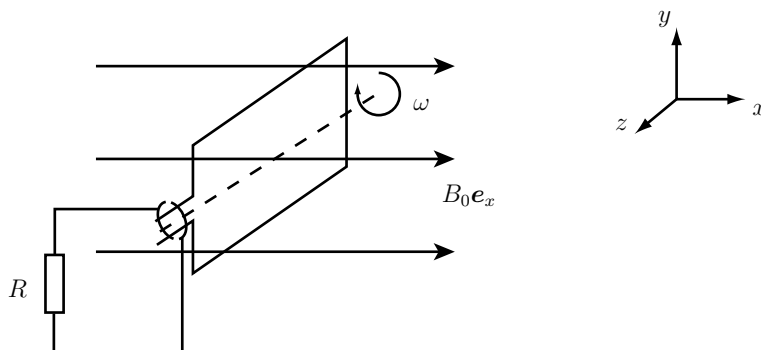
7.18



Den yttre cirkulära slingan för en likström I . Den lilla slingan är cirkulär med radien $a \ll b$ och dess centrum sammanfaller med den stora cirkelns centrum. Bestäm tidsmedelvärdet av effektutvecklingen i den lilla slingan om den har resistansen R och roterar med vinkelfrekvensen ω kring x -axeln.

7.19

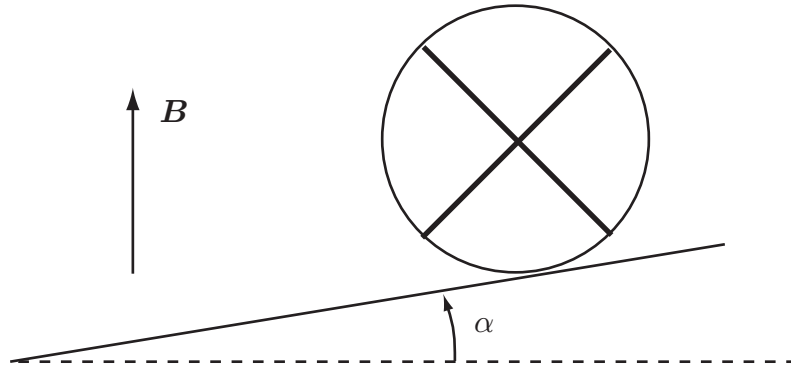
En enkel modell av en växelströmsgenerator är följande: en plan slinga med yta S snurrar med vinkelfrekvens ω kring z -axeln i ett statiskt magnetfält $\mathbf{B} = B_0 \hat{x}$ enligt figur.



Den ström som induceras i den roterande slingan används för att driva en elektrisk apparat, som vi modellerar med en resistans R .

Beräkna tidsmedelvärdet av den effekt som utvecklas i resistansen!

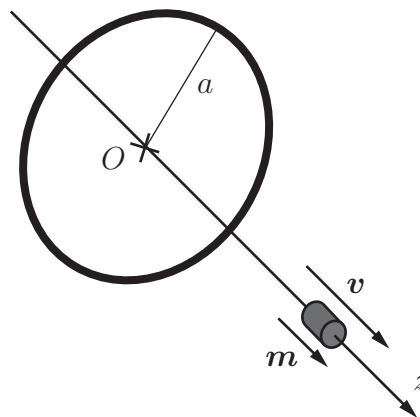
7.20



En oledande sfär har radien a och massan m . Två tunna smala metallband är fastsatta på sfären, enligt figur. Man låter sfären rulla utför ett sluttande plan som bildar vinkeln α med horisontalplanet. I vertikal led finns en stark homogen magnetisk flödestäthet $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$. Ett tag efter det att man släppt sfären rullar den med konstant fart v nedför planet. Vardera bandet bildar en sluten slinga med resistansen R och försumbar självinduktans. Banden är elektriskt isolerade från varandra. Rullmotståndet och luftmotståndet är försumbara. Bestäm farten v .

Ledning: Använd effektkonsivering på hela systemet då konstant hastighet uppnåtts.

7.21

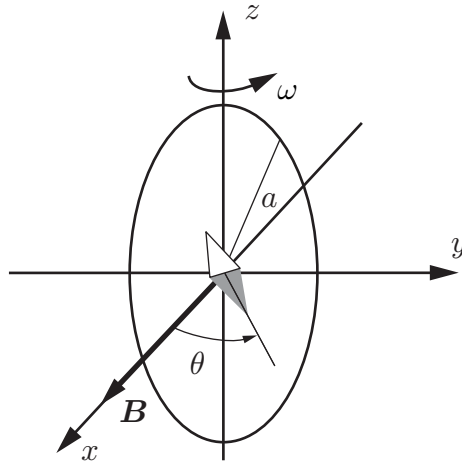


En magnetisk dipol med magnetisk dipolstyrka $\mathbf{m} = m \hat{\mathbf{z}}$ kan röra sig fritt längs z -axeln. I x - y -planet finns en tunn, metallisk ring med radie a och centrum i origo. Ringen har resistansen R och självinduktansen L .

- a) Beräkna flödet Φ från dipolen genom ringen (ytnormal $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$), som funktion av magnetens position z .

- b) Om den magnetiska dipolen rör sig med hastigheten $\mathbf{v} = \frac{dz(t)}{dt} \hat{\mathbf{z}}$, vilken blir den inducerade strömmen $I(t)$ i ringen?
- c) Beräkna magnetiska flödesdestätheten $\mathbf{B}$ på symmetriaxeln till ringen från en ström $I(t)$ i ringen.
- d) Beräkna kraften $\mathbf{F}$ på den magnetiska dipolen p.g.a. magnetiska flödestätheten $\mathbf{B}$ från ringen?
- e) Vilken yttre effekt P måste tillföras, och hur är denna relaterad till effektutvecklingen $RI^2(t)$ i ringen?

7.22



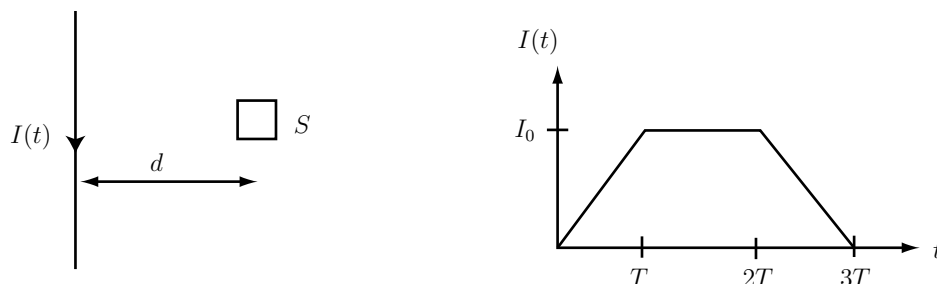
Lord Kelvin utvecklade på 1860-talet en metod för absolut standard av resistans och enheten Ohm (Ω). Uppställningen visas i figuren och utnyttjar den horisontella komponenten av det jordmagnetiska fältet $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{x}}$. En tunn, cirkulär metallring med radie a och resistansen R roterar med konstant vinkelfrekvens ω i det horisontella magnetfältet. Rotationen sker kring den vertikala z -axeln genom ringens centrumpunkt i positiv led, se figur.

- a) Bestäm den inducerade elektromotoriska kraften $\mathcal{E}$ i slingan.
- b) Bestäm den inducerade strömmen I i slingan. Försumma metallringens självinduktans.
- c) Uttryck en liten kompassnåls medelavvikelse θ från sin ostörda riktning (riktningen om slingan står still). Kompassnålen är fritt upphängd, men hinner inte följa de snabba vinkelvariationer som uppstår. Det är således medelvärdet av vinkelavvikelserna som är intressanta. Kompassnålen approximeras med en magnetisk dipol i slingans centrum.

- d) Uttryck resistansen R i ω , a och θ (även konstanten vakuums permeabilitet μ_0 ingår i uttrycket).

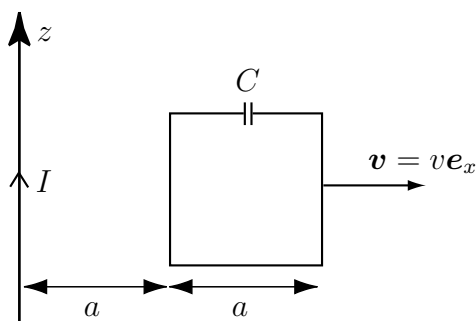
7.23

Vi modellerar ett blixtnedslag med en ström $I(t)$ längs z -axeln enligt figur nedan.



Hur mycket energi utvecklas i slingan genom induktion? Slingan är liten, har yta S och resistans R . Den ligger tillräckligt nära urladdningen för att vi ska kunna försumma vågutbredningsaspekter, och är orienterad så att dess ytnormal pekar ut ur papperets plan.

7.24

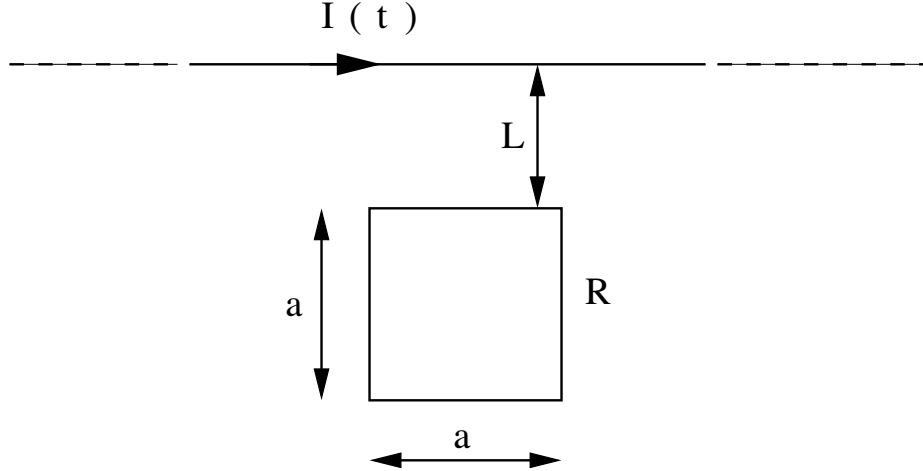


En krets består av en liten kondensator med kapacitansen C som är kortsluten via en kvadratisk slinga med sidan a . Kretsen rör sig med konstant hastighet $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$. Figuren visar dess läge vid tiden $t = 0$. Slingan har försumbar självinduktans och resistans. Längs z -axeln går en ledning som för strömmen I . Bestäm laddningen på de båda kondensatorplattorna som funktion av tiden för $t > 0$. Rita figur och ange tecknet på laddningen på respektive platta. ($\mu_r = 1$)

7.25

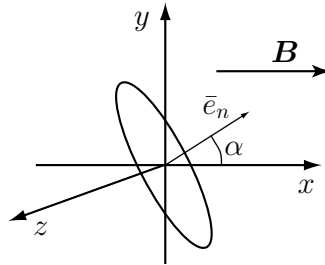
I denna uppgift ska vi beräkna den effekt som utvecklas i ett får under en kraftledning på grund av induktion. För att göra situationen så enkel som möjligt modellerar

vi fåret med en plan slinga med resistans R enligt figur, och kraftledningen representeras med en oändligt lång, rak ledare med en tidsharmonisk ström $I(t) = I_0 \cos \omega t$.



Beräkna tidsmedelvärdet av effektutvecklingen i fåret.

7.26



I ett område ges magnetiska inductionen av

$$\mathbf{B}(t) = B_0 \frac{t}{T} \hat{\mathbf{x}},$$

för $0 < t < T$. I området finns en cirkulär slinga med radien b och resistansen R . Slingan är orienterad så att dess normal $\hat{\mathbf{n}}$, ligger i x - y -planet och bildar en vinkel α med x -axeln (se figur). Betäm vridmomentet, $\mathbf{T}_m$, på slingan för tiden $0 < t < T$. Slingans självinduktans kan försummas.

7.27

En plan slinga med resistansen R och försumbar självinduktans spänner upp ytan S . Slingan kan rotera kring en axel som sammanfaller med z -axeln. Slingan befinner

sig i ett homogent magnetfält $\mathbf{B} = B(t)\hat{\mathbf{x}}$ där

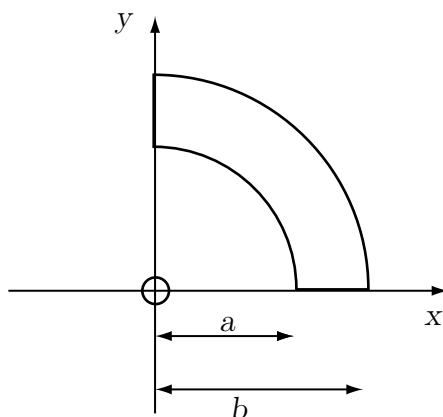
$$B(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ B_0 \frac{t}{T} & 0 \leq t \leq T \\ B_0 & t > T \end{cases}$$

Vid $t = 0$ är slingan parallell med xz -planet. För $t > 0$ roterar slingan med vinkel-frekvensen ω kring z -axeln.

- Bestäm effekten som utvecklas i slingan som funktion av tiden.
- Bestäm den mekaniska effekt som krävs för att rotera slingan som funktion av tiden.

Ledning: Den mekaniska effekten ges av $P_m = T\omega$ där $\mathbf{T} = T\hat{\mathbf{z}}$ är det vridande moment som krävs för att vrida slingan.

7.28

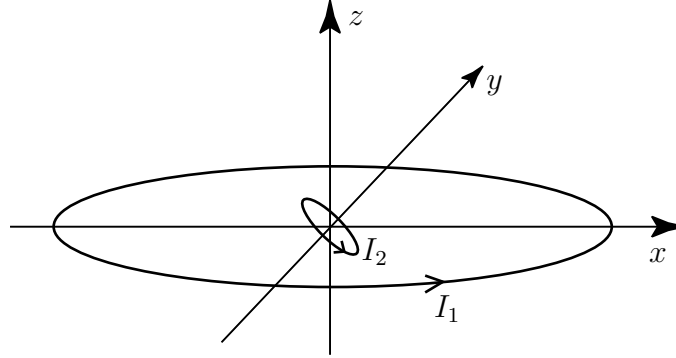


En liten metallslinga med yta S befinner sig i x - y -planet med centrum i origo. I samma plan befinner sig en annan plan metallslinga med geometri som ges av figuren. Bestäm ömsesidiga induktansen mellan slingorna.

7.29

En enkellagrig cylinderspole med cirkulärt tvärsnitt har radien a , längden h och varvantalet N (a och h är av samma storleksordning). En liten slinga med radien b ($b \ll a$) befinner sig i spolens centrum. Bestäm maximala värdet på ömsesidiga induktansen.

7.30

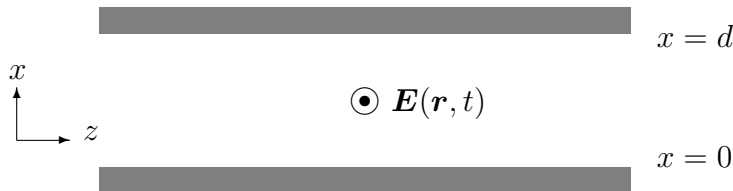


En cirkulär slinga med radien b befinner sig i planet $z = 0$. I planet $z = -x$ befinner sig en liten cirkulär slinga med radien a , där $a \ll b$. Båda slingorna har centrum i origo och normalerna till ytorna som cirklarna spänner upp är $\hat{z}$ respektive $(\hat{x} + \hat{z})/\sqrt{2}$. Strömmen i den stora slingan är I_1 och i den lilla slingan I_2 och dessa går i positiv led kring normalerna. ($\mu_r = 1$)

- Bestäm magnetiska flödestätheten i punkten $(0, 0, b)$.
- Bestäm absolutbeloppet av ömsesidiga induktansen mellan slingorna.
- Bestäm det vridande momentet $\mathbf{T}$ på den stora slingan.

7.31

Studera det luftfyllda utrymmet mellan två platta metallytor enligt figur nedan.



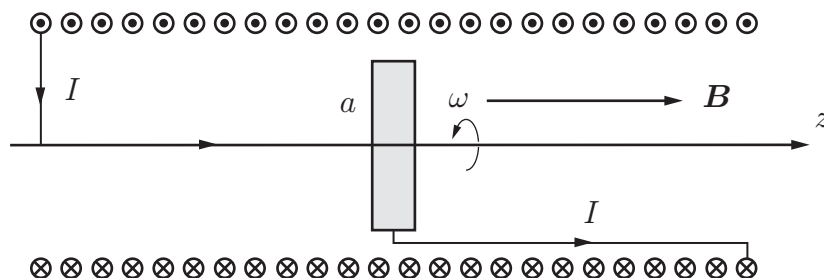
Det går att generera elektromagnetiska vågor sådana att det elektriska fältet i detta utrymme kan skrivas $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$, där de två plana vågorna $\mathbf{E}_1$ och $\mathbf{E}_2$ ges av

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = E_1 \sin(\omega t - k_x x - k_z z) \hat{y}$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = E_2 \sin(\omega t + k_x x - k_z z) \hat{y}$$

Vilka samband måste gälla mellan (1) E_1 och E_2 , (2) mellan k_x och d , samt (3) mellan k_x (eller d enligt (2)), k_z och ω för att denna lösning ska stämma med randvillkoren och respektive planvåg ha utbredningshastighet c_0 ? Det finns flera lösningar för (2), men det räcker att du svarar med en av dem.

7.32

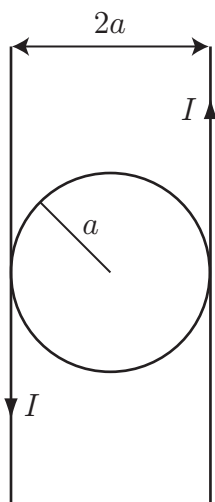


Om en cirkulär metallskiva roterar med vinkelhastigheten ω kring sin symmetriaxel (positiv z -axel) i ett område med en konstant magnetisk flödestäthet $\mathbf{B} = B\hat{z}$ induceras en elektromotorisk kraft $\mathcal{E}$ mellan skivans axel och dess periferi. Skivan kopplas till en spole, som genererar den konstanta magnetiska flödestätheten. Spolen är en lång, tätlindad, rät cylinder (n varv per längdenhet). Den uppkomna kopplingen utgör en självexciterande dynamo. Du skall visa följande:

- Beräkna den elektromotoriska kraften $\mathcal{E}$ mellan skivans axel och dess periferi för en given konstant magnetisk flödestäthet $\mathbf{B} = B\hat{z}$.
- Om kopplingens självinduktans är L och dess resistans R , bestäm den första ordningens differentialekvation som den uppkomna strömmen i spolen $I(t)$ satisfierar.
- Lös differentialekvationen för strömmen och fastställ att systemet är instabilt vid en kritisk vinkelfrekvens ω_c (strömmen växer exponentiellt vid rotationshastigheter $\omega > \omega_c$).

Anmärkning: Principen med en självexciterande dynamo har använts som modell för att förklara det jordmagnetiska fältet och dess instabiliteter.

7.33



Två oändligt långa, raka ledare separerade med avståndet $2a$, för strömmen I enligt figuren ovan. En cirkulär, ledande ring med radien a ligger i samma plan som de raka ledarna och är isolerad från dessa. Bestäm den ömsesidiga induktansen mellan den cirkulära ledaren och de två raka ledarna.

Elektrodynamik: svar och lösningar

S7.1

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \mathbf{J} = I/A\hat{\mathbf{z}} & \text{b) } \mathbf{E} = E\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{J}/\sigma = I/(A\sigma)\hat{\mathbf{z}} & \text{c) } V = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{z}}L = IL/(A\sigma) \\ \text{d) } R = V/I = L/(A\sigma) & \text{e) } p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = I^2/(A^2\sigma) & \text{f) } P = I^2L/(A\sigma) \end{array}$$

S7.2

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \mathbf{J} = I/(4\pi r^2)\hat{\mathbf{r}} & \text{b) } \mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma = I/(\sigma 4\pi r^2)\hat{\mathbf{r}} \\ \text{c) } V_{ab} = V(a) - V(b) = \int_a^b E(r) \, dr = I/(\sigma 4\pi)(1/a - 1/b) & \\ \text{d) } R = 1/(\sigma 4\pi)(1/a - 1/b) & \end{array}$$

S7.3

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \mathbf{J} = I/(2\pi r_c L)\hat{\mathbf{r}}_c & \text{b) } \mathbf{E} = E(r_c)\hat{\mathbf{r}}_c = I/(2\pi\sigma r_c L)\hat{\mathbf{r}}_c \\ \text{c) } V_{ab} = \int_a^b E(r_c) \, dr_c = I/(2\pi\sigma L) \ln(b/a) & \text{d) } R = 1/(2\pi\sigma L) \ln(b/a) \end{array}$$

S7.4

$B_0 A \cos \omega t$ respektive $B_0 A \omega \sin \omega t$.

S7.5

$B_0 A \cos(kv_0 t)$ respektive $B_0 A k v_0 \sin(kv_0 t)$

S7.6

$$f = 20/(2\pi \cdot 10 \cdot 81 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}) \text{ Hz} = 444 \text{ MHz}.$$

S7.7

Antag en läckström I_L per längdenhet mellan inner och yttreledare. Detta ger strömtätheten

$$\mathbf{J}(r_c) = \frac{I_L}{2\pi r_c} \hat{\mathbf{r}}_c$$

Motsvarande elektriska fält ges av

$$\mathbf{E}(r_c) = \begin{cases} \frac{I_L}{\sigma_1 2\pi r_c} \hat{\mathbf{r}}_c & a < r_c < 2a \\ \frac{I_L}{\sigma_2 2\pi r_c} \hat{\mathbf{r}}_c & 2a < r_c < 4a \end{cases}$$

Potentialen mellan inner- och ytterledare ges av

$$V = \int_a^{4a} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{r}}_c \, dr_c = \int_a^{2a} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{r}}_c \, dr_c + \int_{2a}^{4a} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{r}}_c \, dr_c = \frac{I_L}{2\pi} \left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} \right) \ln 2$$

Konduktansen ges av

$$G = \frac{I_L}{V} = \frac{2\pi\sigma_1\sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2) \ln 2}$$

S7.8

Vi delar in området mellan sfärerna i sfäriska skal med tjocklek dr . Resistansen för ett skal är

$$dR = \frac{dr}{4\pi r^2 \sigma(r)} = \frac{dr}{4\pi \alpha r^3}$$

Seriekoppling ger totala resistansen mellan skalen

$$R = \int_a^{2a} \frac{1}{4\pi \alpha r^3} \, dr = \frac{3}{32\pi \alpha a^2}$$

Om man lägger spänningen V på det yttre skalet och jordar det inre får man en ström $I = V/R = 32\pi \alpha a^2 V/3$ som flyter från det yttre till det inre skalet.

S7.9

- a) Strömtätheten i koaxialkabeln är (genom varje cylinderyta flyter p.g.a. stationära strömmar samma ström I)

$$\mathbf{J}(r_c) = \frac{I}{2\pi r_c L} \hat{\mathbf{r}}_c$$

Detta ger mha. Ohms lag det elektriska fältet

$$\mathbf{E}(r_c) = \frac{\mathbf{J}(r_c)}{\sigma} = \frac{I}{2\pi \sigma r_c L} \hat{\mathbf{r}}_c$$

Integration från a till b ger

$$V_0 = \int_a^b \mathbf{E}(r_c) \cdot \hat{\mathbf{r}}_c \, dr_c = \frac{I}{2\pi \sigma L} \ln(b/a)$$

vilket ger strömmen

$$I = 2\pi \frac{V_0 L \sigma}{\ln(b/a)}$$

- b) Enklast är att göra mätningar med två olika nedsänkingsdjup L_1 och L_2 . Genom att bilda skillnaden ΔI mellan de två uppmätta strömmarna fås

$$\Delta I = 2\pi \frac{V_0(L_1 - L_2)\sigma}{\ln(b/a)}$$

Ur detta uttryck kan σ bestämmas.

S7.10

Vi bestämmer först resistansen för den övre delen, som har den lättare vätskan. Om vi driver en ström I från innerledaren blir strömtätheten i vätskan mellan rören

$$\mathbf{J}(r_c) = \frac{I}{2\pi r_c x} \hat{\mathbf{r}}_c$$

Motsvarande elektriska fält ges av Ohms lag, dvs.

$$\mathbf{E}(r_c) = \sigma_1^{-1} \mathbf{J}(r_c)$$

Spänningen mellan inner- och ytterledare ges av

$$V(a) - V(b) = \sigma_1^{-1} \int_a^b \mathbf{J}(r_c) \cdot \hat{\mathbf{r}}_c \, dr_c = \frac{I}{2\pi\sigma_1 x} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Resistansen för den övre delen av röret ges då av

$$R_1 = \frac{V(a) - V(b)}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma_1 x} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

På samma sätt fås resistansen för den nedre delen av röret

$$R_2 = \frac{1}{2\pi\sigma_2(L-x)} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Totala resistansen fås genom parallellkoppling av de båda erhållna resistanserna

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \frac{1}{\sigma_2(L-x) + \sigma_1 x}$$

S7.11

Den lilla slingan fungerar som en magnetisk dipol med dipolmomentet $\mathbf{m} = \pi a^2 i(t) \hat{\mathbf{z}}$. Magnetiska födestätheten ges av

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\pi a^2 i(t) \mu_0}{4\pi} \frac{(2\hat{\mathbf{r}} \cos \theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta)}{r^3}$$

Flödet genom den stora slingan ges av

$$\Phi(t) = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da$$

där S är en yta som spänns upp av den stora slingan. Enklarest är att välja denna yta till en kvartssfär. Enhetsnormalen ges då av $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$. Integralen ger

$$\Phi(t) = \frac{m\mu_0}{4\pi b^3} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=\pi/2}^{3\pi/2} 2 \cos \theta b^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta = \frac{\mu_0}{4b} \pi a^2 i(t)$$

Den inducerade strömmen ges av

$$i_{\text{ind}}(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0}{4bR} \pi a^2 \omega I_0 \cos \omega t$$

S7.12

Antag en ström I som flyter i spolen. Approximativt gäller att magnetfältet är konstant inuti spolen och noll utanför. Amperes lag ger att den magnetiska flödestätheten inuti spolen ges av

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{NI}{\ell} \hat{\mathbf{z}}$$

där $\hat{\mathbf{z}}$ är parallell med spolarnas symmetriaxel.

a) Självinduktansen ges av

$$L = N \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi 4a^2$$

b) Genom den mindre spolen flyter flödet $\Phi_1 = \pi a^2 \mu_0 \frac{NI}{\ell}$. Ömsesidiga induktansen ges av

$$|M| = N \frac{\Phi_1}{I} = \pi a^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell}$$

S7.13

Vi får maximal ömsesidig induktans då det ömsesidiga flödet mellan slingorna är maximalt. För att detta skall uppnås skall även slinga 2 ligga i x - y -planet. Om vi driver en ström I genom slingan som ligger i origo fås magnetiska flödet genom den andra slingan av dipolapproximationen, dvs

$$\Phi = a^2 B(R, 0, 0) = a^2 \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} |(2\hat{\mathbf{r}} \cos \theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta)|$$

där $m = a^2 I$ är magnetiska momentet och $\theta = \pi/2$. Därmed fås den ömsesidiga induktansen

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 a^4}{4\pi R^3}$$

S7.14

Vi låter strömmen I flyta i innerledaren och $-I$ i ytterledaren och vi delar in området i fyra delar: I: $0 < r_c < a$, II: $a < r_c < b$, III: $b < r_c < c$, och IV: $c < r_c$.

Ampères lag ger i respektive område (r_c är avståndet till koaxialkabelns centrum).

Område I:

$$2\pi r_c B = \mu_0 I \frac{\pi r_c^2}{\pi a^2}$$

vilket ger

$$B = \frac{\mu_0 I r_c}{2\pi a^2}$$

Område II:

$$2\pi r_c B = \mu_0 I$$

vilket ger

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_c}$$

Område III:

$$2\pi r_c B = \mu_0 I - \mu_0 I \frac{\pi r_c^2 - \pi b^2}{\pi c^2 - \pi b^2} = \mu_0 I \frac{\pi c^2 - \pi r_c^2}{\pi c^2 - \pi b^2}$$

vilket ger

$$B = \mu_0 I \frac{c^2 - r_c^2}{2\pi(c^2 - b^2)r_c}$$

Område IV:

$$B = 0$$

Den magnetiska energin W_m per längdenhet får vi sedan genom uttrycket

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \iint B^2 \, da = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 2\pi r_c \, dr_c$$

Integralerna i vardera området blir:

Område Område I:

$$\frac{1}{2\mu_0} \iint B^2 \, da = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 a^4} 2\pi \int_0^a r_c^2 r_c \, dr_c = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

Område II:

$$\frac{1}{2\mu_0} \iint B^2 \, da = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2} 2\pi \int_a^b r_c^{-2} r_c \, dr_c = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Område III:

$$\frac{1}{2\mu_0} \iint B^2 \, da = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 (c^2 - b^2)^2} 2\pi \int_b^c \frac{(c^2 - r_c^2)^2}{r_c^2} r_c \, dr_c$$

Integralen beräknas till

$$\begin{aligned} \int_b^c \frac{(c^2 - r_c^2)^2}{r_c} \, dr_c &= c^4 \ln \frac{c}{b} - 2c^2 \frac{c^2 - b^2}{2} + \frac{c^4 - b^4}{4} \\ &= c^4 \ln \frac{c}{b} - \frac{c^2 - b^2}{4} (3c^2 - b^2) \end{aligned}$$

Den totala magnetiska energin blir

$$W_m = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left\{ \frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{(c^2 - b^2)^2} \left(c^4 \ln \frac{c}{b} - \frac{c^2 - b^2}{4} (3c^2 - b^2) \right) \right\}$$

eller

$$W_m = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left\{ \ln \frac{b}{a} + \frac{c^4}{(c^2 - b^2)^2} \ln \frac{c}{b} - \frac{c^2}{2(c^2 - b^2)} \right\}$$

S7.15

a) Faradays induktionslag på integralform är

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -j\omega \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

där kurvan C omsluter ytan S . Med den givna geometrin fås

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{\phi=0}^{2\pi} E_\phi \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} a d\phi = 2\pi a E_\phi \\ -j\omega \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da &= -j\omega \int_{r<a} \mu_0 \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{z}} da = -j\omega \mu_0 (H_0 + \sigma E_\phi d) \cdot \pi a^2 \end{aligned}$$

Genom att sätta dessa uttryck lika får vi $E_\phi = -j\omega \mu_0 a (H_0 + \sigma E_\phi d)/2$, och får

$$E_\phi = \frac{-j\omega \mu_0 a/2}{1 + j\omega \mu_0 a \sigma d/2} H_0$$

b) Tidsmedelvärde av effekten som utvecklas är

$$\begin{aligned} P_{\text{medel}} &= \int_{\text{skalet}} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{J} \} dV = 2\pi a d L \frac{1}{2} \sigma |E_\phi|^2 \\ &= \pi a d L \sigma \frac{(\omega \mu_0 a/2)^2}{1 + (\omega \mu_0 a \sigma d/2)^2} H_0^2 \end{aligned}$$

Denna effekt har gränsvärdet

$$P_{\text{medel}} = \pi a d L \sigma \frac{(\omega \mu_0 a/2)^2}{1 + (\omega \mu_0 a \sigma d/2)^2} H_0^2 \rightarrow 0, \quad \sigma \rightarrow \infty$$

dvs en perfekt ledare absorberar ingen energi. Hade vi inte tagit hänsyn till självinduktionen hade detta gränsvärde blivit oändligt i stället för noll.

S7.16

Faradays lag ger

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi(t)}{dt}$$

där $\Phi(t) = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$. Från symmetri har vi $\mathbf{E} = E_\phi \hat{\phi}$, så med en cirkulär integrationsväg i x - y -planet får vi $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r_c E_\phi$. Med $\mathbf{B} = B_0 \cos \omega t \hat{\mathbf{z}}$ får vi $\Phi = \pi r_c^2 B_0 \cos \omega t$, vilket ger $E_\phi(r_c, t) = \frac{1}{2} B_0 r_c \omega \sin \omega t$. Effekttätheten ges av

$$p(r_c, t) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \sigma (E_\phi(r_c, t))^2 = \sigma \left(\frac{1}{2} B_0 r_c \omega \sin \omega t \right)^2$$

med tidsmedelvärdet

$$p(r_c) = \frac{1}{T} \int_0^T p(r_c, t) dt = \frac{1}{8} \sigma (B_0 r_c \omega)^2$$

Tidsmedelvärdet av den totala effektutvecklingen är

$$\begin{aligned} P &= \int p(r_c) dV = d \int_0^{2\pi} \int_0^a p(r_c) r_c dr_c d\phi = 2\pi d \frac{\sigma \omega^2 B_0^2}{8} \int_0^a r_c^3 dr_c \\ &= 2\pi d \frac{\sigma \omega^2 B_0^2}{8} \frac{a^4}{4} = \frac{\pi d \sigma \omega^2 B_0^2 a^4}{16} \end{aligned}$$

S7.17

Vi använder ett koordinatsystem enligt figuren så att

$$\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{y}}$$

Ringens ytnormal beskrivs av (vi antar att vid tiden $t = 0$ så är ytnormalen riktad längs y -axeln)

$$\hat{\mathbf{n}}(t) = -\hat{\mathbf{x}} \sin \omega t + \hat{\mathbf{y}} \cos \omega t$$

Flödet genom ringen är

$$\Phi(t) = \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}(t) da = \pi a^2 B \cos \omega t$$

Den inducerade elektromotoriska kraften $\mathcal{E}$ blir

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = \pi a^2 B \omega \sin \omega t$$

och den inducerade strömmen

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\pi a^2 B \omega \sin \omega t}{R}$$

vars positiva riktning är riktad medur i figuren (positiv $\hat{\mathbf{n}}$ -riktning). Effektutvecklingen P beräknas nu genom

$$P = RI^2 = \frac{\pi^2 a^4 B^2 \omega^2 \sin^2 \omega t}{R}$$

S7.18

Den stora cirkulära slingan ger följande magnetiska flödestäthet i origo

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2b} \hat{\mathbf{z}}$$

Eftersom $a \ll b$ kan vi anta att $\mathbf{B}$ är konstant över ytan av den lilla slingan. Vinkeln mellan $\hat{\mathbf{z}}$ och normalen $\hat{\mathbf{n}}$ till ytan som spänns upp av den lilla slingan är $\omega t + \text{konstant}$. Flödet genom den lilla slingan ges av

$$\Phi = \pi a^2 \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \pi a^2 \frac{\mu_0 I}{2b} \cos(\omega t + \text{konstant})$$

I den lilla slingan induceras emk:n

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \pi a^2 \frac{\mu_0 I}{2b} \omega \sin(\omega t + \text{konstant})$$

Momentanvärdet av den utvecklade effekten i den lilla slingan ges av

$$P(t) = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{\pi^2 a^4 \mu_0^2 I^2 \omega^2}{4b^2 R} \sin^2(\omega t + \text{konstant})$$

Tidsmedelvärdet av effekten ges av

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{\pi^2 a^4 \mu_0^2 I^2 \omega^2}{8b^2 R}$$

S7.19

Slingans normalriktning är

$$\hat{\mathbf{n}} = \cos \omega t \hat{\mathbf{x}} - \sin \omega t \hat{\mathbf{y}}$$

vilket ger flödet

$$\phi = \int \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \int B_0 \hat{\mathbf{x}} \cdot (\cos \omega t \hat{\mathbf{x}} - \sin \omega t \hat{\mathbf{y}}) da = B_0 S \cos \omega t$$

Den inducerade elektromotoriska kraften $\mathcal{E}$ är

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = B_0 S \omega \sin \omega t$$

Denna spänning lägger sig över resistansen, varför effekten i varje tidpunkt är

$$p(t) = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{B_0^2 S^2 \omega^2 \sin^2 \omega t}{R}$$

Detta ger slutligen att tidsmedelvärdet av effekten är ($T = 2\pi/\omega$ är som vanligt periodtiden)

$$\frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{B_0^2 S^2 \omega^2}{R} \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{B_0^2 S^2 \omega^2}{2R}$$

S7.20

Vid konstant fart v är vinkelfrekvensen $\omega = v/a$. Om vi låter $t = 0$ då slinga 1 är i horisontalplanet och slinga 2 är i vertikalplanet ges flödet genom slingorna av

$$\begin{cases} \Phi_1(t) = B_0 \pi a^2 \cos \omega t & \text{för slinga 1} \\ \Phi_2(t) = B_0 \pi a^2 \sin \omega t & \text{för slinga 2} \end{cases}$$

Motsvarande inducerade emk:er ges av

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1(t) = -\frac{d\Phi_1(t)}{dt} = B_0 \pi a^2 \omega \sin \omega t & \text{för slinga 1} \\ \mathcal{E}_2(t) = -\frac{d\Phi_2(t)}{dt} = -B_0 \pi a^2 \omega \cos \omega t & \text{för slinga 2} \end{cases}$$

Summan av effektutvecklingarna i de båda banden ges av

$$P = \frac{(\mathcal{E}_1(t)^2 + \mathcal{E}_2(t)^2)}{R} = \frac{\pi^2 a^4 \omega^2 B_0^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)}{R} = \frac{\pi^2 a^4 \omega^2 B_0^2}{R} = \frac{\pi^2 v^2 a^2 B_0^2}{R}$$

Energien är konserverad och därmed är effektutvecklingen i banden lika med den mekaniska effekten

$$P_{\text{mek}} = mg \frac{dh(t)}{dt} = mgv \sin \alpha$$

Detta ger

$$\frac{\pi^2 v^2 a^2 B_0^2}{R} = mgv \sin \alpha$$

och

$$v = \frac{mgR}{\pi^2 a^2 B_0^2} \sin \alpha$$

Alternativ lösning: Beräkning med vridmomentsbalans ger

$$\frac{\omega \pi^2 a^4 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) B_0^2}{R} = mga \sin \alpha$$

vilket ger samma resultat.

S7.21

a) Vektorpotentialen $\mathbf{A}$ från en magnetisk dipol i $\mathbf{r}'$ är

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Käll- och mätpunkt är $\mathbf{r}' = z\hat{\mathbf{z}}$ respektive $\mathbf{r} = a\hat{\mathbf{r}}_c$.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{m\mu_0}{4\pi} \frac{\hat{\mathbf{z}} \times (a\hat{\mathbf{r}}_c - z\hat{\mathbf{z}})}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{ma\mu_0}{4\pi} \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

och flödet Φ genom ringen blir (linje-elementet $d\boldsymbol{\ell} = a\hat{\boldsymbol{\phi}}$)

$$\Phi = \oint_L \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{ma^2\mu_0}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

Flödet kan också beräknas genom att integrera den magnetiska flödestätheten $\mathbf{B}$ från den magnetiska dipolen över en sfärisk konisk sektor med öppningsvinkel θ_0 . Vi får

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = 2\pi \int_0^{\theta_0} \frac{2m\mu_0 \cos \theta}{4\pi (a^2 + z^2)^{3/2}} (a^2 + z^2) \sin \theta \, d\theta \\ &= \frac{m\mu_0 \sin^2 \theta_0}{2(a^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{ma^2\mu_0}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

eftersom $\sin \theta_0 = a/\sqrt{a^2 + z^2}$.

b) Flödesförändringarna blir

$$\frac{d\Phi}{dt} = -3z(t)v(t) \frac{ma^2\mu_0}{2(a^2 + z^2(t))^{5/2}}$$

och den inducerade elektromotoriska kraften $\mathcal{E}$ p.g.a. ett varierande magnetiskt flöde från den magnetiska dipolen (linje-elementet $d\boldsymbol{\ell} = a\hat{\boldsymbol{\phi}} \, d\phi$)

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{3z(t)v(t)ma^2\mu_0}{2(a^2 + z^2(t))^{5/2}}$$

Ekvationen som bestämmer strömmen $I(t)$ i ringen blir

$$\mathcal{E} - L \frac{dI(t)}{dt} = RI(t)$$

där självinduktansen L bidrar med en extra emk. Lösningen till

$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L}I(t) = \frac{3z(t)v(t)ma^2\mu_0}{2L(a^2 + z^2(t))^{5/2}} = -\frac{d}{dt} \frac{ma^2\mu_0}{2L(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

blir (antag $I(t) \rightarrow 0$, då $t \rightarrow -\infty$)

$$I(t) = - \int_{-\infty}^t e^{-(t-t')R/L} \frac{d}{dt'} \frac{ma^2\mu_0}{2L(a^2 + z(t')^2)^{3/2}} dt'$$

c) Biot-Savarts lag ger

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(z, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I(t) \oint_L \frac{d\mathbf{r}' \times (z\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}'|^3} = \frac{I(t)\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a d\hat{\boldsymbol{\phi}}' \times (z(t)\hat{\mathbf{z}} - a\hat{\mathbf{r}}'_c)}{(a^2 + z^2(t))^{3/2}} \\ &= \frac{I(t)a^2\mu_0}{2(a^2 + z^2(t))^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

d) Kraften på den magnetiska dipolen blir

$$\mathbf{F}(z) = \nabla (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = -\frac{3z(t)I(t)ma^2\mu_0}{2(a^2 + z^2(t))^{5/2}} \hat{\mathbf{z}}$$

e) Den yttre effekt som måste tillföras blir (motriktad kraft)

$$\begin{aligned}P &= -\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = \frac{3z(t)vI(t)ma^2\mu_0}{2(a^2 + z^2(t))^{5/2}} \\ &= \mathcal{E}I(t) = LI(t)\frac{dI(t)}{dt} + RI^2(t) = \frac{1}{2}L\frac{dI^2(t)}{dt} + RI^2(t)\end{aligned}$$

vilket resulterar i en effektutveckling $RI^2(t)$ i ledaren och en upplagrad magnetisk effekt $L\frac{dI^2(t)}{dt}/2$.

S7.22

Vi använder ett koordinatsystem enligt figuren så att

$$\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{x}}$$

Ringens ytnormal beskrivs av (vi antar att vid tiden $t = 0$ så är ytnormalen riktad längs x -axeln)

$$\hat{\mathbf{n}}(t) = \hat{\mathbf{x}} \cos \omega t + \hat{\mathbf{y}} \sin \omega t$$

a) Flödet genom ringen är

$$\Phi(t) = \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}(t) da = \pi a^2 B \cos \omega t$$

Den inducerade elektromotoriska kraften $\mathcal{E}$ blir

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = \pi a^2 B \omega \sin \omega t$$

b) och den inducerade strömmen I

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\pi a^2 B \omega \sin \omega t}{R}$$

vars positiva riktning är kopplad med högerregeln till $\hat{\mathbf{n}}$ -riktningen.

c) För att bestämma den inducerade magnetiska flödestätheten $\mathbf{B}_i$ i slingans centrum beräknar vi först den magnetiska flödestäthets styrka i centrum från en cirkulär slinga (radie a) som för strömmen I . Detta gör vi med Biot-Savarts lag. Fältet i centrum

$$\mathbf{B}_i = \frac{I \mu_0}{2a} \hat{\mathbf{n}}(t)$$

Detta uttryck kan också hämtas från formelsamlingen.

Den totala magnetiska flödestätheten i slingans centrum blir då

$$\mathbf{B}_{\text{total}}(t) = B \hat{\mathbf{x}} + \frac{\mu_0 I}{2a} \hat{\mathbf{n}}(t) = B \hat{\mathbf{x}} + \frac{\mu_0 \pi a B \omega \sin \omega t}{2R} (\hat{\mathbf{x}} \cos \omega t + \hat{\mathbf{y}} \sin \omega t)$$

Medelvärdet av denna vektors x - respektive y -komponenter är

$$\begin{cases} B_x = B \\ B_y = \frac{\mu_0 \pi a B \omega}{4R} \end{cases}$$

eftersom tidsmedelvärdet av

$$\begin{cases} \int_{\text{period}} \sin \omega t \cos \omega t \, dt = 0 \\ \int_{\text{period}} \sin^2 \omega t \, dt = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Kompassens avvikelse θ bestäms sedan av

$$\tan \theta = \frac{B_y}{B_x} = \frac{\mu_0 \pi a \omega}{4R}$$

d) Resistansen R blir

$$R = \frac{\mu_0 \pi a \omega}{4 \tan \theta}$$

S7.23

Magnetiska flödestätheten från en lång rak ledare är

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi d} \hat{\phi}$$

Eftersom slingan är liten ges flödet av $\phi(t) = \mathbf{B}(t) \cdot \hat{\mathbf{n}}S = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi d} S$, och effektutvecklingen i slingan är

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{V(t)^2}{R} = \frac{1}{R} \left(\frac{d\phi(t)}{dt} \right)^2 = \frac{1}{R} \left(\frac{\mu_0 I'(t)}{2\pi d} S \right)^2 \\ &= \frac{\mu_0^2 S^2}{4\pi^2 d^2 R} \cdot \begin{cases} (I_0/T)^2 & 0 < t < T \text{ eller } 2T < t < 3T \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \end{aligned}$$

Den energi som utvecklas ges av

$$W = \int p(t) dt = \frac{\mu_0^2 S^2}{4\pi^2 d^2 R} \left(\frac{I_0}{T} \right)^2 2T = \frac{\mu_0^2 S^2 I_0^2}{2\pi^2 d^2 R T}$$

S7.24

Magnetiska flödestätheten ges i xz -planet av

$$\mathbf{B}(x, 0, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{\mathbf{y}}$$

Flödet genom slingan ges för $t > 0$ av

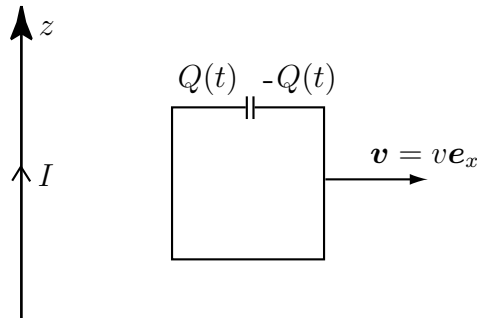
$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_{a+vt}^{2a+vt} \frac{1}{x} dx = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \left(\frac{2a+vt}{a+vt} \right)$$

Den inducerade emk:n ges av

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{\mu_0 I a v}{2\pi} \left(\frac{1}{2a+vt} - \frac{1}{a+vt} \right)$$

Denna ger upphov till en spänning $U = \mathcal{E}$ över kondensatorn, se figur. Laddningen på kondensatorn ges av

$$Q(t) = CU = C \frac{\mu_0 I a v}{2\pi} \left(\frac{1}{a+vt} - \frac{1}{2a+vt} \right)$$



S7.25

Magnetiska flödestätheten från en lång rak ledare med strömmen I är

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_c} \hat{\phi}$$

där r_c är det vinkelräta avståndet från ledaren. Flödet genom strömslingan är

$$\phi(t) = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = \int_L^{L+a} \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r_c} a \, dr_c = \frac{\mu_0 I(t) a}{2\pi} \ln \frac{L+a}{L}$$

Den inducerade emk:n är tidsderivatan av flödet

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{\mu_0 I'(t) a}{2\pi} \ln \frac{L+a}{L} = \frac{\mu_0 I_0 a \omega \sin \omega t}{2\pi} \ln \frac{L+a}{L}$$

och effektutvecklingen är

$$p(t) = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{\mu_0^2 I_0^2 a^2 \omega^2}{4\pi^2 R} \left(\ln \frac{L+a}{L} \right)^2 \sin^2 \omega t$$

Tidsmedelvärdet av $\sin^2 \omega t$ är $1/2$, vilket ger

$$\langle p(\cdot) \rangle = \frac{\mu_0^2 I_0^2 a^2 \omega^2}{8\pi^2 R} \left(\ln \frac{L+a}{L} \right)^2$$

S7.26

Bestäm först flödet Φ genom slingan, därefter den inducerade strömmen och sist vridmomentet. Flödet ges av

$$\Phi(t) = B_0 \frac{t}{T} \pi b^2 \cos \alpha$$

Den inducerade emk:n blir $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0 \frac{1}{T} \pi b^2 \cos \alpha$ och därmed fås strömmen

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{B_0}{RT} \pi b^2 \cos \alpha$$

Magnetiska momentet för slingan ges av $\mathbf{m} = i(t) \pi b^2 \hat{\mathbf{n}} = -\frac{B_0}{RT} \pi^2 b^4 \cos \alpha \hat{\mathbf{n}}$ och vridmomentet fås ur $\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$. Eftersom $\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{x}} = -\sin \alpha \hat{\mathbf{z}}$ fås

$$\mathbf{T} = \frac{t}{R} \left(\frac{B_0 \pi b^2}{T} \right)^2 \cos \alpha \sin \alpha \hat{\mathbf{z}}$$

S7.27

Den i slingan inducerade emk:n ges av $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$. För $t < 0$ är $\Phi = 0$ och därmed $\mathcal{E} = 0$. För $t \geq 0$ gäller $\Phi = B(t)S \sin \omega t$ vilket ger

$$\mathcal{E} = -S \left(\frac{\partial B}{\partial t} \sin \omega t + B \omega \cos \omega t \right) = \begin{cases} -\frac{B_0 S}{T} (\sin \omega t + \omega t \cos \omega t) & 0 \leq t < T \\ -B_0 S \omega \cos \omega t & t \geq T \end{cases}$$

a) Den utvecklade effekten ges av

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \begin{cases} \frac{1}{R} \left(\frac{B_0 S}{T} \right)^2 (\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)^2 & 0 \leq t < T \\ \frac{1}{R} (B_0 S \omega)^2 \cos^2 \omega t & t \geq T \end{cases}$$

b) Det vridande momentet på slingan ges av $\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}(t)$. Det magnetiska momentet är givet av

$$\mathbf{m} = i(t) S \hat{\mathbf{n}}$$

där $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}} \sin \omega t - \hat{\mathbf{y}} \cos \omega t$ är normalen till slingans plan och $i(t) = \mathcal{E}/R$ är strömmen i slingan. Det vridande momentet ges då av $\mathbf{T}(t) = T(t) \hat{\mathbf{z}}$ där

$$T(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} S B(t) \cos \omega t$$

Effekten som krävs för att vrida runt slingan är

$$P_m(t) = -T(t) \omega = \begin{cases} \frac{1}{R} \left(\frac{B_0 S}{T} \right)^2 \omega t \cos \omega t (\sin \omega t + \omega t \cos \omega t) & 0 \leq t < T \\ \frac{1}{R} (B_0 S \omega \cos \omega t)^2 & t \geq T \end{cases}$$

Notera att $P_m(t) = P(t)$ för $t > T$.

S7.28

Ömsesidiga induktansen beräknas genom att beräkna flödet genom den stora spolen som orsakas av den lilla spolen. Om strömmen I_1 går i den lilla spolen kan den approximeras med en magnetisk dipol $\mathbf{m} = I_1 S \hat{\mathbf{z}}$. Detta ger en magnetisk flödestäthet

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1 S}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}})$$

Då vi beräknar detta fält genom den stora spolen är $\theta = \pi/2$ och $\hat{\theta} = -\hat{z}$. Låt den stora spolen ha moturs omloppsriktning, svarande mot ytnormal $\hat{n} = \hat{z}$. Då är flödet

$$\begin{aligned}\phi_{21} &= \int_{\text{stor spole}} \mathbf{B} \cdot \hat{n} \, da = \int_{r=a}^b \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{\mu_0 I_1 S}{4\pi r^3} (-\hat{z}) \cdot \hat{z} r \, d\varphi \, dr \\ &= \frac{\mu_0 I_1 S}{4\pi} \frac{\pi}{2} \int_a^b \frac{-dr}{r^2} = \frac{\mu_0 I_1 S}{8} \left[\frac{1}{r} \right]_a^b = \frac{\mu_0 I_1 S}{8} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)\end{aligned}$$

Ömsesidiga induktansen är då

$$|M| = \frac{|\phi_{21}|}{I_1} = \frac{\mu_0 S}{8} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

S7.29

Biot-Savarts lag ger följande uttryck för flödestätheten i origo från en cirkulär slinga kring z -axeln med radien a och ström dI

$$d\mathbf{B}(\mathbf{0}) = \frac{dI\mu_0}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Totala flödestätheten i centrum av spolen ges då av ($dI = dzNI/h$)

$$\mathbf{B}(\mathbf{0}) = \hat{z} \frac{\mu_0 NI}{2h} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \, dz = (\text{se formelsaml.}) = \hat{z} \frac{\mu_0 NI}{h} \frac{h}{(4a^2 + h^2)^{1/2}}$$

Flödet genom den lilla slingan är maximalt om den ligger i x - y -planet, dvs $\Phi = \pi b^2 B_z(\mathbf{0})$. Ömsesidiga induktansen ges av $M = \Phi/I$ och därmed

$$M = \frac{\mu_0 N \pi b^2}{(4a^2 + h^2)^{1/2}}$$

S7.30

- a) Eftersom $a \ll b$ kan den lilla slingan approximeras med en magnetisk dipol med magnetiskt moment $\mathbf{m} = I_2 \pi a^2 (\hat{x} + \hat{z})/\sqrt{2}$. Fältet på z -axeln från den cirkulära slingan ges av

$$\mathbf{B}_1(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I_1}{2} \frac{b^2}{(z^2 + b^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Fältet från den lilla slingan ges av dipolfältet

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \left(2\hat{r} \cos \theta + \hat{\theta} \sin \theta \right)$$

där θ är polvinkeln från den lilla slingans symmetriaxel. I punkten $\mathbf{r} = (0, 0, b)$ gäller $\theta = \pi/4$, $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{z}}$ och $\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\mathbf{x}}$. Därmed fås det totala fältet

$$\mathbf{B}(0, 0, b) = \frac{\mu_0 I_1}{4\sqrt{2}b} \hat{\mathbf{z}} + \frac{\mu_0 I_2 a^2}{4b^3} \left(2\hat{\mathbf{z}} \frac{1}{\sqrt{2}} - \hat{\mathbf{x}} \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

b) Fältet i origo från den stora slingan ges av

$$\mathbf{B}_1(0, 0, 0) = \frac{\mu_0 I_1}{2b} \hat{\mathbf{z}}$$

Flödet genom den lilla slingan ges av

$$\Phi = \frac{\pi a^2}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}) \cdot \mathbf{B}_1(0, 0, 0) = \frac{\mu_0 I_1}{2\sqrt{2}b} \pi a^2$$

Ömsesidiga induktansen ges av

$$M = \frac{\Phi}{I_1} = \frac{\mu_0}{2\sqrt{2}b} \pi a^2$$

c) Eftersom det inte verkar några yttre moment är summan av vridmomentet på den stora slingan och den lilla slingan noll. Därmed ges det vridande momentet på den stora slingan av

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= -\mathbf{m} \times \mathbf{B}_1(0, 0, 0) = -\frac{I_2 \pi a^2}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}) \times \frac{\mu_0 I_1}{2b} \hat{\mathbf{z}} \\ &= I_2 \pi a^2 \frac{\mu_0 I_1}{2\sqrt{2}b} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

S7.31

Inför beteckningen $\alpha = \omega t - k_z z$. Tangentiella elektriska fält är noll på metallytor, vilket medför villkoren

$$\begin{aligned} x = 0 : & \quad E_1 \sin \alpha + E_2 \sin \alpha = 0 \\ x = d : & \quad E_1 \sin(\alpha - k_x d) + E_2 \sin(\alpha + k_x d) = 0 \end{aligned}$$

Den första ekvationen ger $E_1 = -E_2$, vilket insatt i den andra ger $\sin(\alpha - k_x d) = \sin(\alpha + k_x d)$. Detta innebär att $k_x d = n\pi$, där n är ett heltal.

För att en planvåg $\mathbf{E}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ ska ha utbredningshastighet c_0 , krävs att

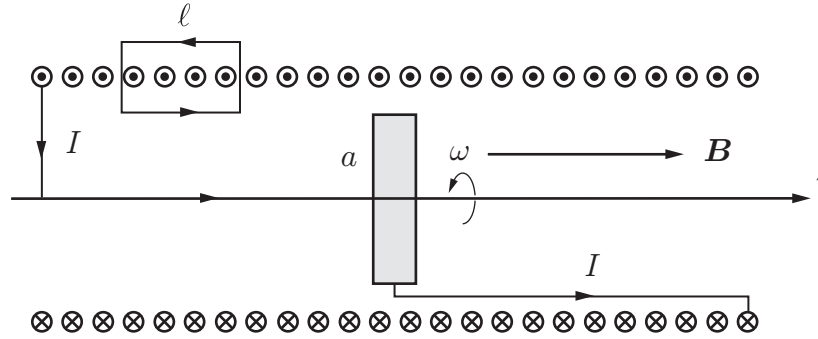
$$\frac{\omega}{c_0} = |\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$$

Sammantaget har vi alltså följande samband

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= 0 \\ k_x d &= n\pi \\ k_z^2 &= \frac{\omega^2}{c_0^2} - k_x^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} - n^2 \frac{\pi^2}{d^2} \end{aligned}$$

Observera att om n väljes tillräckligt stort, blir k_z^2 negativ. Detta är inte ett fel, utan avspeglar att vågen är exponentiellt dämpad i z -led (i vågledarteori kallar man sådana lösningar för evanescenta moder).

S7.32



Vi löser de olika delproblemen i tur och ordning.

- a) Vi låter vinkelhastigheten ω vara positiv för positiv rotation enligt högerregeln enligt figur. Uttryckt i polära cylinderkoordinater (r_c, ϕ, z) blir hastigheten på den cirkulära metallskivan på avståndet r_c från rotationsaxeln (z -axeln)

$$\mathbf{v}(r_c) = \omega r_c \hat{\phi}$$

Kraften/laddning ("impressed force") på laddningsbärarna i metallskivan blir $\mathbf{E}_i(r_c) = \mathbf{v}(r_c) \times \mathbf{B} = \omega r_c B \hat{r}_c$, och den elektromotoriska kraften $\mathcal{E}$ blir

$$\mathcal{E} = \int_N^P \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{r} = \int_0^a \omega r_c B dr_c = \frac{\omega a^2 B}{2}$$

- b) En ström I genom spolen genererar en magnetisk flödestäthet $\mathbf{B}$ som är konstant $B\hat{z}$ inuti spolen och noll utanför eftersom spolen antas tät lindad och lång. Ampères lag på slingan ℓ ger relationen mellan B och strömmen I . Vi får

$$B\ell = \mu_0 n \ell I$$

eftersom den inneslutna strömmen i slingan är $n\ell I$. Detta ger

$$B = \mu_0 n I$$

Självinduktansen L innebär att en extra elektromotorisk kraft måste tas med. Med kretsens resistans R får vi (detta är en konsekvens av att $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt}\Phi(t)$)

$$\mathcal{E} - L \frac{dI(t)}{dt} = RI(t)$$

eller

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = \frac{\omega a^2 B}{2} = \frac{\mu_0 \omega a^2 n I(t)}{2}$$

c) Ekvationen för strömmen skriver vi som

$$\frac{dI(t)}{dt} + \left(\frac{R}{L} - \frac{\mu_0 \omega a^2 n}{2L} \right) I(t) = 0$$

Lösningen till denna första ordningens ordinära differentialekvation är

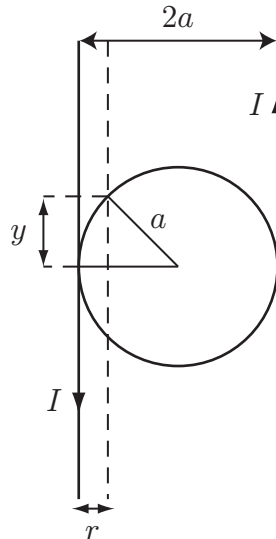
$$I(t) = I(0) e^{-\left(\frac{R}{L} - \frac{\mu_0 \omega a^2 n}{2L}\right)t}$$

där $I(0)$ är strömmens värde vid tiden $t = 0$. Vi ser att för rotationshastigheter $\omega < \omega_c$, där

$$\omega_c = \frac{2R}{\mu_0 n a^2}$$

ger en ström som avtar exponentiellt i tiden. För $\omega > \omega_c$ får vi en exponentiell tillväxt av strömmen.

S7.33



Magnetiska flödestätheten i en punkt mellan de raka ledarna på avståndet r från en av ledarna är ($\hat{z}$ pekar ut ur papprets plan)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2a-r} \right) \hat{z}$$

Det magnetiska flödet som passerar ringens yta är därmed

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \hat{z} \, dS = 2 \int_0^a B(r) \, 2y \, dr \\ &= 2 \int_0^a \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2a-r} \right) 2\sqrt{a^2 - (a-r)^2} \, dr \end{aligned}$$

Sätt $x = a - r$ och integrera:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{2\mu_0 I}{\pi} \int_0^a \left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x} \right) \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{4\mu_0 I a}{\pi} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ &= \frac{4\mu_0 I a}{\pi} \arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^a = 2\mu_0 I a \end{aligned}$$

Således är den ömsesidiga induktansen

$$M = \frac{\Phi}{I} = 2\mu_0 a$$

8 Konserveringslagar

Konserveringslagar: svar och lösningar

9 Elektromagnetiska vågor

9.1

Skriv följande tidsberoende fält som komplexa fält ($\cos \omega t$ riktfas):

a) $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4 \cos(\omega t - 3x - 10^\circ) \hat{\mathbf{y}} - \sin(\omega t + 3x + 20^\circ) \hat{\mathbf{z}}$

b) $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{a \sin \theta}{r} \cos(\omega t - 5r) \hat{\boldsymbol{\theta}}$

c) $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = 6e^{-3x} \sin(\omega t - 2x) \hat{\mathbf{y}} + 10e^{-x} \cos(\omega t - 5x) \hat{\mathbf{z}}$

9.2

Skriv följande komplexa fält som tidsberoende fält ($\cos \omega t$ riktfas):

a) $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = (4 + 3i)e^{i\beta x} \hat{\mathbf{y}}$

b) $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \frac{20}{\rho} e^{i2z} \hat{\boldsymbol{\rho}}$

c) $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{10}{r^2} (1 - i2) e^{i\phi} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}$

9.3

En plan, tidsharmonisk våg utbreder sig i vakuum i riktningen $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{x}}$. Det komplexa elektriska fältet är $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 e^{ikx} \hat{\mathbf{y}}$. Vad är det komplexa fältet $\mathbf{H}(\mathbf{r})$?

9.4

En plan, tidsharmonisk våg utbreder sig i vakuum i riktningen $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{x}}$. Det komplexa magnetiska fältet är $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = H_0 e^{ikx} \hat{\mathbf{y}}$. Vad är det komplexa fältet $\mathbf{E}(\mathbf{r})$?

9.5

En plan, linjärpolariserad elektromagnetisk våg utbreder sig i vakuum i positiv z -led. Om elektriska fältet är $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 e^{ikz} \hat{\mathbf{x}}$, vad är då det tillhörande magnetiska fältet $\mathbf{H}(\mathbf{r})$? Vad händer om utbredningsriktningen byts till negativ z -led?

9.6

Två plana, linjärpolariserade elektromagnetiska vågor utbreder sig samtidigt i vakuum, en i positiv och en i negativ z -led. I en given punkt i rummet är det komplexa elektriska fält som hör till vardera vågen $E_0\hat{x}$ respektive $E_0\hat{x}$, dvs totala elektriska fältet är $2E_0\hat{x}$. Vad är det magnetiska fält som hör till respektive våg i denna punkt, och vad är totala magnetiska fältet?

9.7

En skiljeyta mellan ett dielektrikum med relativ permittivitet ε_r och vakuum har normalvektor $\hat{n} = \hat{z}$. På vakuumsidan är det elektriska fältet $\mathbf{E}_{\text{vak.}} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y}$. Vad är elektriska fältet i dielektrikumet?

9.8

En skiljeyta mellan ett dielektrikum med relativ permittivitet ε_r och vakuum har normalvektor $\hat{n} = \hat{z}$. På vakuumsidan är det elektriska fältet $\mathbf{E} = E_x\hat{x} + E_z\hat{z}$. Vad är elektriska fältet i dielektrikumet?

9.9

En monokromatisk planvåg utbreder sig i vakuum och har det elektriska fältet

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{z}E_0 \sin(\omega t - k(x + y)/\sqrt{2})$$

- a) Bestäm vågens utbredningsriktning.
- b) Bestäm vågens magnetfält $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$.
- c) Bestäm den tidsberoende strålningsvektorn $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$.

9.10

En elektromagnetisk våg i vakuum har följande elektriska fält:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \left\{ \cos\left(\frac{k(x - z)}{\sqrt{2}} - \omega t\right) \hat{y} - \sin\left(\frac{k(x - z)}{\sqrt{2}} - \omega t\right) \frac{\hat{x} + \hat{z}}{\sqrt{2}} \right\}$$

där $k = \omega/c_0$.

- a) Bestäm vågens utbredningsriktning $\hat{k}$.

- b) Bestäm magnetfältet $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$.
- c) Bestäm strålningsvektorn $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$.

9.11

Det elektriska och magnetiska fältet från en tidsharmonisk planvåg som utbreder sig i vakuum mäts upp i origo. Fälten har endast x - och y -komponenter. Det elektriska fältets x -komponent varierar som $E_x = E_0 \sin \omega t$ och dess y -komponent som $E_y = E_0 \sin \omega t$. För det magnetiska fältet fås att x - och y -komponenten varierar som $H_x = -\alpha E_0 \sin \omega t$ respektive $H_y = \alpha E_0 \sin \omega t$ där α är en positiv konstant.

- a) Vilket värde bör α ha om man mätt rätt? (Du kan antingen ange ett numeriskt värde eller uttrycka α i kända konstanter.)
- b) Vilken typ av planvåg är det? Välj bland linjärpolariserad, cirkulärpolariserad och elliptiskt polariserad. Ge en förklaring
- c) Bestäm den totala elektriska fältvektorn som funktion av både rum och tid.

9.12

En plan, linjärt polariserad, våg utbreder sig i vakuum. Elektriska fältstyrkan ges av

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = E_0 \sin \left(\omega t - \frac{k}{\sqrt{10}}x + \frac{3k}{\sqrt{10}}y + \frac{\pi}{4} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

- a) Bestäm vågens utbredningsriktning.
- b) Bestäm magnetiska flödestätheten $\mathbf{B}(x, y, z, t)$.

9.13

Halvrymden $z > 0$ är fyllt med ett fibermaterial där fibrerna är riktade längs x -axeln och i området $z < 0$ är det vakuum. Fibermaterial är uniaxiala. Det betyder att då fibrerna är riktade längs x -axeln kommer en linjärpolariserad planvåg med elektriska fältet riktat i x -led att känna av en relativ permittivitet ε_{rx} och en linjärpolariserad planvåg med elektriska fältet riktat i y -led att känna av en relativ permittivitet ε_{ry} . Antag nu att fibermaterialet är förlustfritt och att $\varepsilon_{rx} = 2$ och $\varepsilon_{ry} = 4$. En linjärpolariserad våg

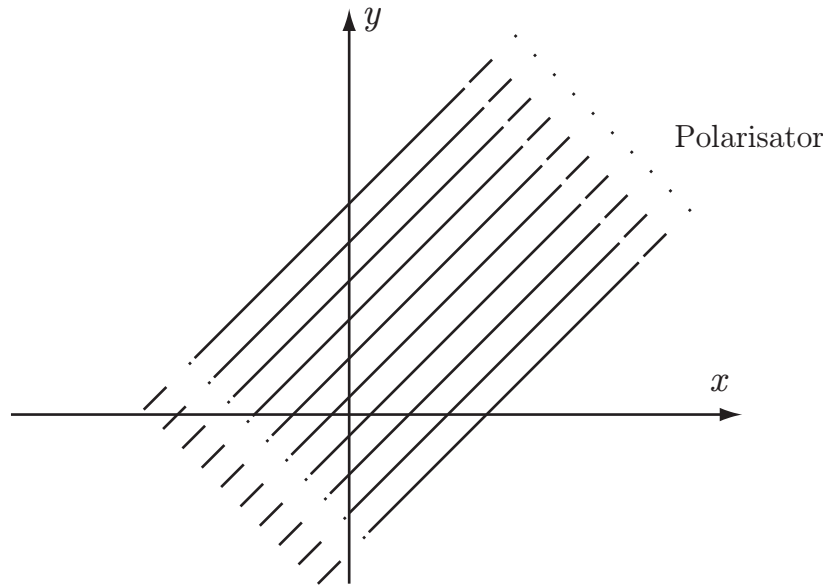
$$\mathbf{E}(z, t) = (|E_1|\hat{\mathbf{x}} + |E_2|\hat{\mathbf{y}}) \cos(\omega t - k_0 z)$$

faller in mot $z = 0$. Genom att välja kvoten $|E_1|/|E_2|$ på rätt sätt kan man få en cirkulärpolariserad våg vid $z = z_0 > 0$ (och även vid $z = 3z_0, 5z_0, \dots$). Bestäm kvoten $|E_1|/|E_2|$ och z_0 (uttryckt i k_0).

Ledning: En planvåg som är linjärpolariserad i x -led behandlas på samma sätt som om halvrymden $z > 0$ är fyllt med ett isotropt material med relativ permittivitet ε_{rx} . En planvåg som är linjärpolariserad i y -led behandlas på samma sätt som om halvrymden $z > 0$ är fyllt med ett isotropt material med relativ permittivitet ε_{ry} . Transmissionskoefficienten vid normalt infall mot ett dielektrikum med permittivitet ε_r ges av

$$T = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon_r} + 1}$$

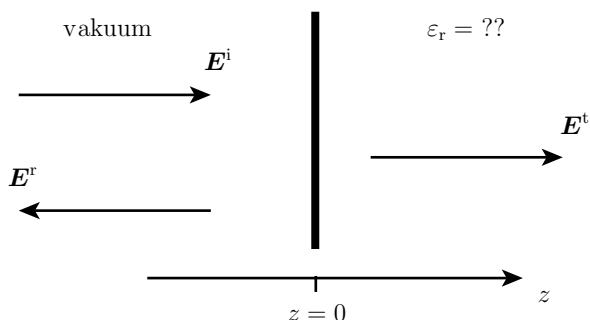
9.14



Det elektriska fältet för en elektromagnetisk våg, som utbreder sig i vakuum, är $\mathbf{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \hat{\mathbf{x}}$. I planet $z = 0$ sätts en polarisator i form av ett stort metallgaller upp, vilket påverkar vågen. Gallret består av tunna metalltrådar, som är riktade parallellt med linjen $x = y$, se figur. Ett elektriskt fält polariserat längs metalltrådarna skapar strömmar i trådarna, vilket gör att vågen reflekteras som från ett metalliskt jordplan. Ett elektriskt fält polariserat vinkelrätt mot trådarna skapar inga strömmar i trådarna, och därmed passerar vågen gallret utan att påverkas.

- Bestäm det elektriska fältet för $z > 0$
- Bestäm det elektriska fältet för den reflekterade vågen i området $z < 0$

9.15



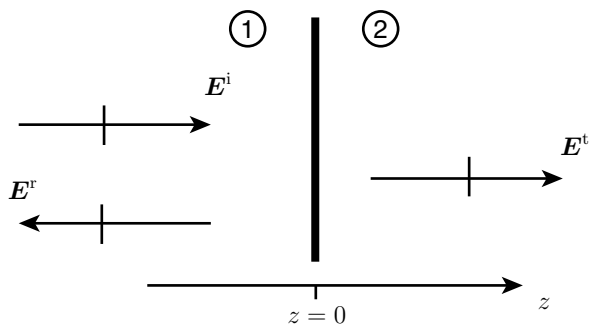
En plan våg $\mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) = f(t - z/c_0)\hat{\mathbf{x}}$ utbreder sig i vakuum. Vid $z = 0$ reflekteras den mot en halvrymd av ett förlustfritt, omagnetiskt material.

- Härled ett uttryck för reflektionsfaktorn. (Om du vill får du gärna anta tidsberoendet $f(t) = \cos \omega t$.)
- Beräkna den relativa permittiviteten ε_r i materialet, om den reflekterade vågen är $\mathbf{E}^r(\mathbf{r}, t) = -0.2f(t + z/c_0)\hat{\mathbf{x}}$.

9.16

Vi ska nedan beräkna hur mycket effekt som kan tas emot inuti ett område med förluster. Tillämpningar finns till exempel inom kommunikation med undervattensfarkoster eller pacemakers.

En planvåg $\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = E_0 e^{ik_1 z} \hat{\mathbf{x}}$ som utbreder sig i område 1 faller in mot ett område 2 enligt figur.



Vågutbredningsparametrarna i de båda områdena är

$$k_1 = k_0$$

$$k_2 = k_0 e^{i\psi}$$

$$\eta_1 = \eta_0$$

$$\eta_2 = \eta_0 e^{-i\psi}$$

där k_0 , η_0 och ψ är reella och positiva storheter.

Vad är tidsmedelvärdet av Poyntings vektor vid $z = d > 0$?

9.17

I halvrymden $z < 0$ är det vakuum och i halvrymden $z > 0$ är det ett dielektrikum med $\epsilon_r = 4$, $\sigma = 0$ och $\mu_r = 1$. En planvåg med det elektriska fältet

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \sin(\omega t - z\omega/c_0) \hat{\mathbf{x}}$$

faller in mot halvrymden $z > 0$. Härled uttrycken för de reflekterade elektriska och magnetiska fälten.

9.18

En koaxialkabel, vars innerledare har ytterradien a och ytterledare har innerradien b , för strömmen $I = I_0 \cos(\omega t - \beta z)$ där $\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}$. Området mellan inner- och ytterledaren består av ett förlustfritt dielektrikum med relativa permittiviteten ϵ_r . Bestäm tidsmedelvärdet av strålningsvektorn på avståndet $(a + b)/2$ från symmetriaxeln.

9.19

Det komplexa elektromagnetiska fältet för en plan våg som propagerar i ett homogent, omagnetiskt, ledande material ges av

$$\mathbf{E}(z) = |E_0| e^{ikz} \hat{\mathbf{x}}$$

med $\cos \omega t$ som riktfas. Materialet har relativa permittiviteten ϵ_r och konduktiviteten σ . Visa att om materialet är en god ledare, vid den aktuella frekvensen, så ges tidsuttrycket för det elektriska fältet av

$$\mathbf{E}(z, t) = |E_0| e^{-az} \cos(\omega t - az) \hat{\mathbf{x}}$$

Uttryck a i kända storheter. Alla approximationer skall motiveras!

9.20

I frekvensplanet gäller att ett material är en god ledare om $\sigma \gg \omega \epsilon_0 \epsilon_r$. I tidsplanet motsvarar detta att förskjutningsströmmen $\epsilon_0 \epsilon_r (\partial \mathbf{E} / \partial t)$ är försumbar i jämförelse med ledningsströmmen $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. Antag ett område med $\rho = 0$, relativ permittivitet ϵ_r , relativ permeabilitet μ_r och konduktivitet σ . De fält som finns i området antas variera såpass långsamt i tiden att området är en god ledare. Utgå från Maxwells ekvationer och härled följande ekvation för det elektriska fältet:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \mu_r \sigma \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (1)$$

Ledning: $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$.

Kommentar: Ekvationen (1) är diffusionsekvationen, dvs samma ekvation som används för diffusion och värmeledning. Den är egentligen ofysikalisk eftersom den säger att utbredningshastigheten är oändlig, vilket strider mot den speciella relativitetsteorin. I de flesta tillämpningar har detta ingen betydelse.

9.21

En tidsharmonisk planvåg som utbreder sig i ett ledande material kan i frekvensplanet skrivas

$$\mathbf{E}(z) = E_0 e^{ik_c z} \hat{\mathbf{x}} = E_0 e^{-\alpha z} e^{i\beta z} \hat{\mathbf{x}}$$

där

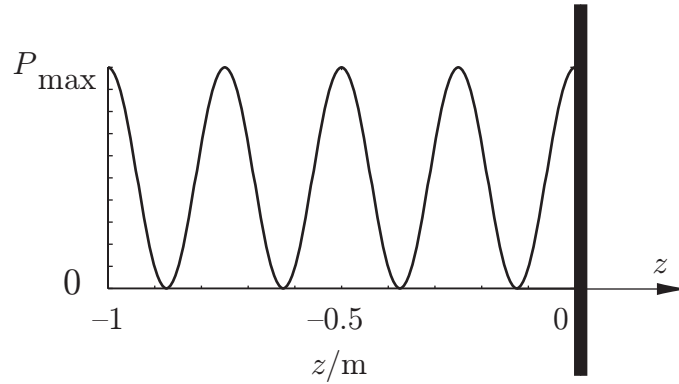
$$k_c = \omega \sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_c} = \omega \sqrt{\mu_0 \mu_r \left(\varepsilon_0 \varepsilon_r + i \frac{\sigma}{\omega} \right)}$$

- a) Bestäm approximativa uttryck för α och β då materialet är en god ledare, dvs då $\sigma \gg \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r$.
- b) Bestäm approximativa uttryck för α och β då materialet är en dålig ledare, dvs då $\sigma \ll \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r$. (Använd MacLaurinutveckling)

9.22

En plan våg faller in vinkelrätt mot en halvrymd, $z > 0$, med ledningsförmågan σ , relativa permittiviteten ε_r och relativa permeabiliteten $\mu_r = 1$. I området $z < 0$ är det vakuum. Tidsmedelvärdet av den infallande vågens effektflödestäthet är S_0 . Bestäm ett uttryck för tidsmedelvärdet av den reflekterade vågens effektflödestäthet om halvrymden kan antas vara en god ledare ($\sigma \gg \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r$). *Ledning:* Den reflekterade vågen är en planvåg med amplitud $R|\mathbf{E}^i| = RE_0$, där den infallande vågen är $\mathbf{E}^i(z) = E_0 e^{ikz} \hat{\mathbf{x}}$ och $R = (\eta_c - \eta_0)/(\eta_c + \eta_0)$.

9.23



En linjärpolariserad elektromagnetisk våg (vinkelfrekvens ω), som utbreder sig i vakuum i positiv z -led, reflekteras mot en stor metallskiva vid $z = 0$. Vågen faller in vinkelrätt mot skivan. Det elektromagnetiska fältet mäts upp med en prob som har formen av en cirkulär slinga. Slingans radie a är betydligt mindre än våglängden och slingans självinduktans är försumbar. Proben är kopplad till ett instrument med resistans R . Instrumentet mäter upp tidsmedelvärdet av effekten som utvecklas i resistansen. När probens slinga ligger i y - z -planet blir tidsmedelvärdet av effekten noll, oavsett var man placerar proben. När probens slinga ligger i x - z -planet varierar tidsmedelvärdet av effekten med koordinaten z enligt figuren, där det maximalt uppmätta värdet på tidsmedelvärdet av effekten är $P_{\max}$.

- Längs vilken riktning svänger den infallande vågens elektriska fält
- Bestäm vågens våglängd λ
- Bestäm amplituden på den infallande vågens elektriska fält uttryckt i $P_{\max}$, a , R och ω (nödvändiga naturkonstanter kan förekomma)

9.24

En plan våg faller in vinkelrätt mot en halvrymd med ledningsförmågan σ , relativa permittiviteten ε_r och relativa permeabiliteten $\mu_r = 1$. Halvrymden behöver inte vara en god ledare.

- Bestäm ett uttryck på vågens inträngningsdjup δ .
- Vid 900 MHz (dvs en frekvens som används vid mobiltelefoni) gäller för hjärnsubstans att $\varepsilon_r = 42$ och $\sigma = 1.1 \text{ S/m}$. Hur stort blir inträngningsdjupet?

9.25

Visa att för tidsharmoniska fält, så kan tidsmedelvärdet av Poyntings vektor uttryckas med hjälp av de komplexa fälten, dvs $\frac{1}{T} \int \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) dt = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})\}$. Tips: skriv $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}\{\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\} = \frac{1}{2}\{\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}\}$.

Elektromagnetiska vågor: svar och lösningar

S9.1

$$\text{a)} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4e^{i(3x+10^\circ)}\hat{\mathbf{y}} - e^{-i(3x-70^\circ)}\hat{\mathbf{z}}.$$

$$\text{b)} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{a \sin \theta}{r} e^{i5r} \hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

$$\text{c)} \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}) = 6e^{-3x} e^{i(\pi/2+2x)}\hat{\mathbf{y}} + 10e^{-x} e^{i5x}\hat{\mathbf{z}}.$$

S9.2

$$\text{a)} \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = (4 \cos(\omega t - \beta x) + 3 \sin(\omega t - \beta x))\hat{\mathbf{y}} = 5 \cos(\omega t - \beta x - 37^\circ)\hat{\mathbf{y}}.$$

$$\text{b)} \quad \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \frac{20}{\rho} \cos(\omega t - 2z)\hat{\boldsymbol{\rho}}.$$

$$\text{c)} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{10}{r^2} (\cos(\omega t - \phi) - 2 \sin(\omega t - \phi)) \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{22.4}{r^2} (\cos(\omega t - \phi + 63^\circ)) \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

S9.3

$$\frac{1}{\eta_0} E_0 e^{ikx} \hat{\mathbf{z}}.$$

S9.4

$$-\eta_0 H_0 e^{ikx} \hat{\mathbf{z}}.$$

S9.5

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta_0} E_0 e^{ikz} \hat{\mathbf{y}} \text{ respektive } \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\eta_0} E_0 e^{-ikz} \hat{\mathbf{y}}.$$

S9.6

De magnetiska fälten är $\frac{1}{\eta_0} E_0 \hat{\mathbf{y}}$ respektive $-\frac{1}{\eta_0} E_0 \hat{\mathbf{y}}$, dvs totala magnetiska fältet är 0.

S9.7

$$\mathbf{E}_{\text{diel.}} = E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{E}_{\text{vak.}}$$

S9.8

$$\mathbf{E}_{\text{diel.}} = E_x \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{\varepsilon_r} E_z \hat{\mathbf{z}}.$$

S9.9

- a) Det elektriska fältet för en allmän linjärpolariserad planvåg kan skrivas

$$\mathbf{E} = E_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi) \hat{\mathbf{e}}$$

där $\mathbf{k}$ är vågvektorn och utbredningsriktningen ges av $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$. I vårt fall gäller $\mathbf{k} = k(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ och därmed utbreder sig vågen i riktningen

$$\hat{\mathbf{k}} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$$

- b) Magnetfältet ges av $\mathbf{H} = \eta_0^{-1} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} = \eta_0^{-1} E_0 (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) \times (0, 0, 1)$ där $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$. Därmed

$$\mathbf{H} = \eta_0^{-1} E_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi) (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$$

- c) Den tidsberoende strålningsvektorn ges av $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ Detta ger

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) &= \eta_0^{-1} E_0^2 (0, 0, 1) \times (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0) \sin^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi) \\ &= \eta_0^{-1} E_0^2 \sin^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi) (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) \end{aligned}$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \eta_0^{-1} E_0^2 \sin^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi) (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$$

S9.10

- a) En allmän tidsharmonisk plan elektromagnetisk våg har rums- och tidsberoendet $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$ där $\mathbf{k}$ är vågvektorn och $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ är utbredningsriktningen. I vårt fall gäller

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \frac{k(x - z)}{\sqrt{2}}$$

och därmed är $\mathbf{k} = k(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{z}})/\sqrt{2}$. Det ger utbredningsriktningen

$$\hat{\mathbf{k}} = \frac{(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{z}})}{\sqrt{2}}$$

b) Magnetfältet ges av regeln om högersystem

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\eta_0} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

Detta ger

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{\eta_0} \left\{ \cos \left(\frac{k(x-z)}{\sqrt{2}} - \omega t \right) \frac{\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{2}} + \sin \left(\frac{k(x-z)}{\sqrt{2}} - \omega t \right) \hat{\mathbf{y}} \right\}$$

c) Strålningsvektorn ges av $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$. Detta ger

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0^2}{\eta_0} \frac{(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{z}})}{\sqrt{2}}$$

Kommentar: Vågen är en cirkulärpolariserad planvåg och då skall gälla att strålningsvektorn är riktad i utbredningsriktningen och har en amplitud som är konstant i rum och tid.

S9.11

Totala elektriska och magnetiska fältet ges i origo av

$$\mathbf{E}(\mathbf{0}, t) = (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) E_0 \sin \omega t$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{0}, t) = (-\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) \alpha E_0 \sin \omega t$$

a) Kvoten mellan det elektriska och magnetiska fältet för en planvåg ges av vågimpedansen. Därmed fås

$$\alpha = \frac{1}{\eta_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \frac{1}{120\pi} \Omega^{-1}$$

b) $\mathbf{E}$ svänger parallellt med linjen $x = y$. Planvågen är därmed linjärpolariserad.

c) Utbredningsriktningen ges av

$$\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{|\mathbf{E} \times \mathbf{H}|} = \hat{\mathbf{z}}$$

Det elektriska fältet ges därmed av

$$\mathbf{E}(z, t) = (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) E_0 \sin(\omega t - \omega/c_0 z)$$

S9.12

- a) En allmän planvåg som är linjärpolariserad i z -led ges av

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = E_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi) \hat{\mathbf{z}}$$

Vågens utbredningsriktning är $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$. Jämförelse med den givna planvågen ger utbredningsriktningen

$$\hat{\mathbf{n}} = (1, -3, 0)/\sqrt{10}$$

- b) Regeln om högersystem ger magnetiska flödestätheten

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x, y, z, t) &= \frac{1}{c_0} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}(x, y, z, t) \\ &= -\frac{E_0}{c_0} \sin\left(\omega t - \frac{k}{\sqrt{10}}x + \frac{3k}{\sqrt{10}}y + \frac{\pi}{4}\right) \frac{(3, 1, 0)}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

S9.13

Vågimpedanserna ges av

$$\begin{cases} \eta_1 = \frac{\eta_0}{\sqrt{2}} & \text{för polarisering i } x\text{-led} \\ \eta_2 = \frac{\eta_0}{2} & \text{för polarisering i } y\text{-led} \end{cases}$$

Transmissionskoefficienterna för en planvåg som är linjärpolariserad i x - respektive y -led ges av

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{2\eta_1}{\eta_0 + \eta_1} = \frac{2}{\sqrt{2} + 1} \\ T_2 &= \frac{2\eta_2}{\eta_0 + \eta_2} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Den transmitterade vågen ges då av

$$\mathbf{E}^t(z, t) = |E_1|T_1 \cos(\omega t - k_1 z) \hat{\mathbf{x}} + |E_2|T_2 \cos(\omega t - k_2 z) \hat{\mathbf{y}}$$

där vågtalen ges av

$$\begin{aligned} k_1 &= k_0 \sqrt{\varepsilon_{r1}} = \sqrt{2}k_0 \\ k_2 &= k_0 \sqrt{\varepsilon_{r2}} = 2k_0 \end{aligned}$$

En cirkulärpolariserad våg kan skrivas

$$\mathbf{E}(z, t) = E_n (\cos(\omega t - k_n z) \hat{\mathbf{x}} \pm \cos(\omega t - k_n z - \pi/2) \hat{\mathbf{y}})$$

Detta är uppfyllt för $\mathbf{E}^t(z, t)$ vid $z = z_0$ om (det finns flera möjligheter)

$$|E_1|T_1 = |E_2|T_2$$

och

$$k_2 z_0 = k_1 z_0 + \pi/2 + n\pi, \quad n = \text{positivt heltal}$$

Då ges det minsta z_0 och $|E_1|/|E_2|$ av

$$z_0 = \frac{\pi}{2(k_2 - k_1)} = \frac{\pi}{2k_0(2 - \sqrt{2})}$$

$$\frac{|E_1|}{|E_2|} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{3}$$

Kommentar: Effekten som beskrivs i uppgiften går att påvisa i mikrovågsområdet genom att skicka in mikrovågor mot träskivor.

S9.14

Vi delar upp vågen i två linjärpolariserade vågor på följande sätt:

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \{ E_0 \cos(\omega t - kz) (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) + E_0 \cos(\omega t - kz) (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}) \}$$

Den första linjärpolariserade vågen har sitt elektriska fält riktat längs trådarna och reflekteras medan den andra vågen har sitt elektriska fält vinkelrätt mot trådarna och fortsätter därmed genom gallret utan att påverkas.

a) För $z > 0$ fås därmed det elektriska fältet

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{1}{2} E_0 \cos(\omega t - kz) (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}})$$

b) För $z < 0$ fås det reflekterade fältet

$$\mathbf{E}(z, t) = -\frac{1}{2} E_0 \cos(\omega t + kz) (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}})$$

S9.15

a) Vi gör följande ansats för de reflekterade och transmittade fälten:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) &= f(t - z/c_0) \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{E}^r(\mathbf{r}, t) &= R f(t + z/c_0) \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{E}^t(\mathbf{r}, t) &= T f(t - z/c) \hat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

vilket med högerregeln $\mathbf{H} = \frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}$ ger följande magnetiska fält:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\eta_0} f(t - z/c_0) \hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{H}^r(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{\eta_0} R f(t + z/c_0) \hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{H}^t(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\eta} T f(t - z/c) \hat{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

där $c = c_0/\sqrt{\epsilon_r}$ och $\eta = \eta_0/\sqrt{\epsilon_r}$. Randvillkoret att tangentiella $\mathbf{E}$ - och $\mathbf{H}$ -fält är kontinuerliga ger nu ekvationerna

$$\begin{aligned}1 + R &= T \\ \frac{1}{\eta_0} - \frac{1}{\eta_0} R &= \frac{1}{\eta} T\end{aligned}$$

med lösningen

$$\begin{aligned}R &= \frac{\eta - \eta_0}{\eta + \eta_0} = \frac{1 - \sqrt{\epsilon_r}}{1 + \sqrt{\epsilon_r}} \\ T &= \frac{2\eta}{\eta + \eta_0} = \frac{2}{1 + \sqrt{\epsilon_r}}\end{aligned}$$

(endast uttrycket för R krävs för poäng).

b) Här är reflektionsfaktorn given i uppgiften, $R = -0.2$, vilket ger

$$R = \frac{\eta - \eta_0}{\eta + \eta_0} = \frac{1 - \sqrt{\epsilon_r}}{1 + \sqrt{\epsilon_r}} \Rightarrow \sqrt{\epsilon_r} = \frac{1 - R}{1 + R} = \frac{1.2}{0.8} = \frac{3}{2} \Rightarrow \epsilon_r = \frac{9}{4} = 2.25$$

S9.16

Ansätt på vanligt vis reflekterade och transmitterade planvågor med hjälp av reflektions- och transmissionskoefficienter R och T

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^r(\mathbf{r}) &= R E_0 e^{-ik_1 z} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{E}^t(\mathbf{r}) &= T E_0 e^{ik_2 z} \hat{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

Högerregeln ger då

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^r(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{\eta_1} R E_0 e^{-ik_1 z} \hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{H}^t(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\eta_2} T E_0 e^{ik_2 z} \hat{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

och randvillkoret att tangentiella fält är kontinuerliga ger

$$\frac{1}{\eta_1} - \frac{R}{\eta_1} = \frac{T}{\eta_2} \Rightarrow T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

Tidsmedelvärde av Poyntings vektor är

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_S(d\hat{\mathbf{z}}) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{E}^t(d\hat{\mathbf{z}}) \times \mathbf{H}^t(d\hat{\mathbf{z}})^*\} = \frac{1}{2} |TE_0|^2 \operatorname{Re}\{e^{ik_2d} \frac{1}{\eta_2^*} e^{-ik_2^*d} \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}}\} \\ &= \frac{1}{2} |T|^2 E_0^2 e^{-2\operatorname{Im} k_2d} \operatorname{Re}\{\frac{1}{\eta_2^*}\} \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{2} \left| \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \right|^2 E_0^2 e^{-2\operatorname{Im} k_2d} \operatorname{Re}\{\frac{1}{\eta_2^*}\} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Eftersom $\eta_1 = \eta_0$ och $\eta_2 = \eta_0 e^{-i\psi}$ och $k_2 = k_0 e^{i\psi}$ får vi

$$\begin{aligned} \left| \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \right|^2 &= \left| \frac{2}{1 + e^{i\psi}} \right|^2 = \frac{4}{(1 + \cos \psi)^2 + \sin^2 \psi} \\ &= \frac{4}{1 + 2\cos \psi + \cos^2 \psi + \sin^2 \psi} = \frac{2}{1 + \cos \psi} \end{aligned}$$

och

$$\operatorname{Re}\{\frac{1}{\eta_2^*}\} = \operatorname{Re}\{\frac{e^{-i\psi}}{\eta_0}\} = \frac{\cos \psi}{\eta_0}$$

Slutligen fås alltså

$$\mathbf{P}_S(d\hat{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2} \frac{2}{1 + \cos \psi} E_0^2 e^{-2k_0d \sin \psi} \frac{\cos \psi}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} = \frac{E_0^2 \cos \psi}{1 + \cos \psi} \frac{1}{\eta_0} e^{-2k_0d \sin \psi} \hat{\mathbf{z}}$$

S9.17

Med $\sin \omega t$ som riktfas fås det komplexa elektriska fältet för den infallande vågen

$$\mathbf{E}^i(z) = E_0 e^{ik_0 z} \hat{\mathbf{x}}$$

där $k_0 = \omega/c_0$. Ansätt en reflekterad och en transmitterad våg

$$\mathbf{E}^r(z) = RE_0 e^{-ik_0 z} \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{E}^t(z) = TE_0 e^{ik_1 z} \hat{\mathbf{x}}$$

där $k_1 = k_0 \sqrt{\varepsilon_r}$. Regeln om högersystem ger motsvarande magnetfält

$$\mathbf{H}^i(z) = \frac{E_0}{\eta_0} e^{ik_0 z} \hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{H}^r(z) = -R \frac{E_0}{\eta_0} e^{-ik_0 z} \hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{H}^t(z) = T \frac{E_0}{\eta_1} e^{ik_1 z} \hat{\mathbf{y}}$$

där $\eta_1 = \sqrt{\mu_0/(\varepsilon_0\varepsilon_r)}$. Randvillkoren vid $z = 0$ är att de elektriska och magnetiska fälten är kontinuerliga. Detta ger

$$\mathbf{E}^i(0) + \mathbf{E}^r(0) = \mathbf{E}^t(0)$$

$$\mathbf{H}^i(0) + \mathbf{H}^r(0) = \mathbf{H}^t(0)$$

och därmed

$$1 + R = T$$

$$\frac{1}{\eta_0}(1 - R) = \frac{1}{\eta_1}T$$

Reflektionsskoefficienten ges då av

$$R = \frac{\eta_1 - \eta_0}{\eta_0 + \eta_1} = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon_r}}{1 + \sqrt{\varepsilon_r}} = -\frac{1}{3}$$

De reflekterade fälten i tidsplanet ges av

$$\mathbf{E}^r(z, t) = -\frac{1}{3}E_0 \sin \omega(t + z/c_0)\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{H}^r(z, t) = \frac{1}{3\eta_0}E_0 \sin \omega(t + z/c_0)\hat{\mathbf{y}}$$

S9.18

Amperes lag ger magnetfältet

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{I_0}{2\pi r_c} \cos(\omega t - \beta z)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Motsvarande komplexa fält ges av $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I_0}{2\pi r_c}e^{i\beta z}\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Mellan ledarna gäller $\mathbf{J} = 0$ och därmed fås elektriska fältet ur $\mathbf{E} = \frac{i}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}\nabla \times \mathbf{H}$. Formelsamlingen ger uttrycket för rotationen $\nabla \times$ i cylinderkoordinater vilket ger

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \eta_0 \frac{I_0}{2\pi\sqrt{\varepsilon_r}r_c} e^{i\beta z}\hat{\mathbf{r}}_c$$

Strålningsvektorn har tidsmedelvärde $\mathbf{P}_S = \frac{1}{2}\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$. För $r_c = (a + b)/2$ fås

$$\mathbf{P}_S = \frac{\eta_0}{2\sqrt{\varepsilon_r}} \left(\frac{I_0}{\pi(a + b)} \right)^2 \hat{\mathbf{z}}$$

S9.19

Det komplexa vågtalet ges av $k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r(1 + i\sigma/(\omega\varepsilon_0\varepsilon_r))}$. För en god ledare gäller $\sigma \gg \omega\varepsilon_r\varepsilon_0$ och därmed fås $k = \omega\sqrt{i\mu_0\sigma/\omega} = a(1 + i)$, där $a = \sqrt{\omega\mu_0\sigma/2}$. Det tidsberoende elektriska fältet ges då av

$$\mathbf{E}(z, t) = \text{Re} \{ \mathbf{E}(z)e^{-i\omega t} \} = |E_0|e^{-az} \cos(\omega t - az)\hat{\mathbf{x}}$$

S9.20

Om förskjutningsströmmen försummas i Maxwells ekvationer fås

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0\mu_r \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (5)$$

Tag rotationen på ekvation (2)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0\mu_r \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{H})}{\partial t}$$

Insättning av ekvation (3) ger

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0\mu_r\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Eftersom $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ fås $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E}$ och därmed

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \mu_0\mu_r\sigma \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{0}$$

S9.21

a) För $\sigma \gg \omega\epsilon_0\epsilon_r$ fås

$$k_c \approx \omega \sqrt{\mu_0\mu_r \left(i \frac{\sigma}{\omega} \right)} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega\sigma\mu_0\mu_r}$$

där det utnyttjats att $\sqrt{i} = (e^{i\pi/2})^{0.5} = e^{i\pi/4} = (1+i)/\sqrt{2}$. Eftersom $k_c = \beta + i\alpha$ fås

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_0\mu_r}{2}}$$

b) Då $\sigma \ll \omega\epsilon_0\epsilon_r$ kan man MacLaurinutveckla

$$k_c = \omega \sqrt{\mu_0\mu_r\epsilon_c} = \omega \sqrt{\mu_0\mu_r\epsilon_0\epsilon_r} \sqrt{1 + i \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_r\omega}} \approx \omega \sqrt{\mu_0\mu_r\epsilon_0\epsilon_r} \left(1 + i \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon_r\omega} \right)$$

Därmed fås

$$\alpha = \omega \sqrt{\mu_0\mu_r\epsilon_0\epsilon_r} \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon_r\omega} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\epsilon_0\epsilon_r}}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_0\mu_r\epsilon_0\epsilon_r}$$

S9.22

En infallande våg

$$\mathbf{E}^i(z) = E_0 e^{ikz} \hat{\mathbf{x}}$$

ger tidsmedelvärde av strålningsvektorn

$$\mathbf{S}_0 = \frac{1}{2} \text{Re}\{\mathbf{E}(z) \times \mathbf{H}^*(z)\} = \frac{1}{2\eta_0} E_0^2 \hat{\mathbf{z}}$$

där vi låtit E_0 vara reell. Med en standardmetod (se föreläsning 18) fås den reflekterade vågen

$$\mathbf{E}^r(z) = RE_0 e^{-ikz} \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{H}^r(z) = \frac{1}{\eta_0} (-\hat{\mathbf{z}}) \times \mathbf{E}^r(z) = -\frac{1}{\eta_0} RE_0 e^{-ikz} \hat{\mathbf{y}}$$

där $k = \omega c_0$, $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ och

$$R = \frac{\eta_c - \eta_0}{\eta_c + \eta_0}$$

Tidsmedelvärde av den reflekterade effektlödestätheten ges av

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\mathbf{E}^r(z) \times \mathbf{H}^r(z)^*\} = -\frac{1}{2\eta_0} |R|^2 E_0^2 \hat{\mathbf{z}} = -|R|^2 \mathbf{S}_0$$

där $*$ betecknar komplexkonjugat. För en god ledare gäller

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_c}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \omega}{i\sigma}} = \sqrt{\frac{-i\mu_0 \omega}{\sigma}} = (1 - i) \sqrt{\frac{\mu_0 \omega}{2\sigma}}$$

då ges R av

$$R = \frac{(1 - i) \sqrt{\frac{\mu_0 \omega}{2\sigma}} - \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}{(1 - i) \sqrt{\frac{\mu_0 \omega}{2\sigma}} + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}$$

Detta ger

$$S = |\mathbf{S}| = S_0 |R|^2 = S_0 \frac{\left(\sqrt{\frac{\mu_0 \omega}{2\sigma}} - \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\right)^2 + \frac{\mu_0 \omega}{2\sigma}}{\left(\sqrt{\frac{\mu_0 \omega}{2\sigma}} + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\right)^2 + \frac{\mu_0 \omega}{2\sigma}} = S_0 \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{2\sigma}{\omega \varepsilon_0}}\right)^2 + 1}{\left(1 + \sqrt{\frac{2\sigma}{\omega \varepsilon_0}}\right)^2 + 1}$$

Om man vill kan man återigen utnyttja att $\sigma \gg \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r > \omega \varepsilon_0$. Detta ger att $\sqrt{\omega \varepsilon_0 / 2\sigma} = \Delta$ är litet, och vi har

$$\begin{aligned} S &= S_0 \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{\omega \varepsilon_0}{2\sigma}}\right)^2 + \frac{\omega \varepsilon_0}{2\sigma}}{\left(1 + \sqrt{\frac{\omega \varepsilon_0}{2\sigma}}\right)^2 + \frac{\omega \varepsilon_0}{2\sigma}} = S_0 \frac{(1 - \Delta)^2 + \Delta^2}{(1 + \Delta)^2 + \Delta^2} \\ &= S_0 \frac{(1 + \Delta)^2 + \Delta^2 - 4\Delta}{(1 + \Delta)^2 + \Delta^2} \approx S_0 (1 - 4\Delta) = S_0 \left(1 - 4\sqrt{\frac{\omega \varepsilon_0}{2\sigma}}\right) \end{aligned}$$

Effekten som förbrukas i halvplanet $z > 0$ är då approximativt $4S_0 \sqrt{\frac{\omega \varepsilon_0}{2\sigma}}$.

S9.23

- a) Proben är känslig för vågens magnetiska flödestäthet $\mathbf{B}$. Vågens magnetiska flödestäthet måste vara riktat i y -led, vilket betyder att det elektriska fältet är riktat parallellt med x -axeln.
- b) Den infallande vågens elektriska fält kan generellt skrivas

$$\mathbf{E}_i(z, t) = E_0 \sin(k_0 z - \omega t + \alpha) \hat{\mathbf{x}}$$

där vågtalet $k_0 = 2\pi/\lambda$, och α är en fasvinkel. Vid $z = 0$ gäller att det totala elektriska fältet är noll, och därmed ges den reflekterade vågens elektriska fält av

$$\mathbf{E}_r(z, t) = -E_0 \sin(-k_0 z - \omega t + \alpha) \hat{\mathbf{x}}$$

Motsvarande magnetfält bestäms av regeln om högersystem. Detta ger

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(z, t) &= \mathbf{H}_i(z, t) + \mathbf{H}_r(z, t) \\ &= \frac{1}{\eta_0} E_0 \{ \sin(k_0 z - \omega t + \alpha) + \sin(-k_0 z - \omega t + \alpha) \} \hat{\mathbf{y}} \\ &= -\frac{2E_0}{\eta_0} \cos(k_0 z) \sin(\omega t - \alpha) \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Detta gör att den inducerade emk:n i slingan ges av (välj $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{y}}$)

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = \pi a^2 \mu_0 \frac{2E_0}{\eta_0} \cos(k_0 z) \omega \cos(\omega t - \alpha)$$

Effekten i resistansen ges av $p(t) = \mathcal{E}^2/R$. Tidsmedelvärdet av effekten är därmed

$$P(z) = \frac{1}{2R} \left(\pi a^2 \mu_0 \frac{2E_0}{\eta_0} \cos(k_0 z) \omega \right)^2 = P_{\max} \cos^2(k_0 z)$$

där

$$P_{\max} = \frac{2\pi^2 a^4 \mu_0^2 E_0^2 \omega^2}{\eta_0^2 R}$$

Vi ser att avståndet mellan två nollställena i effekten ges av sträckan $d = 0.25$ m där $k_0 d = \pi$, dvs. $d = \pi/k_0 = \lambda/2$. Våglängden blir därför

$$\lambda = 0.5 \text{ m}$$

- c) Från uttrycket på $P_{\max}$ fås

$$E_0 = \sqrt{\frac{P_{\max} R}{2}} \frac{\eta_0}{\pi a^2 \mu_0 \omega}$$

S9.24

Det komplexa vågtalet ges av

$$k_c = \beta + i\alpha = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_c} = \omega \sqrt{\mu_0 \left(\varepsilon_0 \varepsilon_r + i \frac{\sigma}{\omega} \right)}$$

Därmed fås

$$\alpha = \text{Im}\{k_c\} = \omega \sqrt{\mu_0} \left((\varepsilon_0 \varepsilon_r)^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega} \right)^2 \right)^{1/4} \sin \phi$$

där $\phi = \frac{1}{2} \arctan \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \omega}$

a)

$$\delta = 1/\alpha = \left(\omega \sqrt{\mu_0} \left((\varepsilon_0 \varepsilon_r)^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega} \right)^2 \right)^{1/4} \sin \phi \right)^{-1}$$

Kommentar För en god ledare ($\sigma \gg \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r$) övergår uttrycket för δ i det uttryck som finns i formelsamlingen.

b) Insättning av $\omega = 2\pi \cdot 9 \cdot 10^8 \text{ rad/s}$, $\varepsilon_r = 42$ och $\sigma = 1.1 \text{ S/m}$ ger $\delta = 3.2 \text{ cm}$.

S9.25

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) dt \\ &= \frac{1}{4T} \int_0^T \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \} \times \{ \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \} dt \\ &= \frac{1}{4T} \int_0^T \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \} dt \\ &+ \frac{1}{4T} \int_0^T \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{-2i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) e^{2i\omega t} \} dt \\ &= \frac{1}{4} \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \} = \frac{1}{2} \text{Re}\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) \} \end{aligned}$$

10 Potentialer och fält

Potentialer och fält: svar och lösningar

11 Antenner

11.1

En typisk funktion i antennsammanhang är e^{ix}/x . Vad är dess derivata? Vilken del av derivatan dominerar då $x \rightarrow \infty$?

11.2

För en viss antenn erhålles vektorpotentialen $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_0 \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{x}}$. Vad är $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ och $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ i riktningen $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{z}}$ i fjärrzonen?

11.3

En kort bit av en strömbana modelleras med en svängande elektrisk punktdipol, elektriskt dipolmoment $\mathbf{p} = p_0 \hat{\mathbf{z}}$, placerad i origo. Vad är fjärrfältsamplituden, uttryckt i kartesiska riktningar, i riktningen

- a) $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{z}}$, dvs. $\theta = 0$?
- b) $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}}$, dvs. $\theta = \pi/2$ och $\phi = 0$?
- c) $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{y}}$, dvs. $\theta = \pi/2$ och $\phi = \pi/2$?
- d) $\hat{\mathbf{r}} = -\hat{\mathbf{z}}$, dvs. $\theta = \pi$?

11.4

En elektrisk elementardipol med dipolmoment $\mathbf{p} = p_0 \cos \omega t \hat{\mathbf{z}}$ befinner sig i origo. På x -axeln finns en fri elektron på 20 våglängders avstånd från origo. Elektronen kommer att göra små rörelser ($\ll \lambda$) pga av antennens påverkan. Elektronens hastighet kommer att vara såpass liten att kraften från magnetfältet $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ kan försummas. Antag att elektronen är i vila vid $t = 0$ och då befinner sig i punkten $(20\lambda, 0, 0)$. Bestäm tidsmedelvärdet av den effekt som elektronen strålar ut för $t > 0$.

Ledning: Dela upp lösningen i delar. Bestäm först det elektriska fältet vid elektronen och därefter elektronens dipolmoment genom att ställa upp och lösa rörelseekvationen för elektronen. När elektronen rör sig kommer den att stråla som en dipolantenn. Egentligen ger denna strålning upphov till en dämpande term i rörelseekvationen, men vi kan anta att denna term är såpass liten att den kan försummas.

11.5

Två antenner modelleras med identiska elektriska dipoler riktade i z -led, vilka är placerade i $(0, 0, 0)$ och $(0, 0, d)$, med fasskillnad ϕ . Truls och Trula står på stort avstånd från dipolerna, Truls i $(R, 0, R)$ och Trula i $(R, 0, 0)$, där $R \gg d$ och $R \gg \lambda$.

- a) Hur ska d och ϕ väljas för att Trula ska få så stor mottagning som möjligt, samtidigt som Truls inte kan ta emot någonting?
- b) Vilket nytt värde för ϕ gör att Trula inte kan ta emot någonting?

Anmärkning: Det finns flera lösningar till varje deluppgift, svara med de värden som har minst absolutbelopp.

11.6

Inledning: Vi ska använda teorin för gruppantennor för att studera spridning av ljus. En laserstråle antas kunna beskrivas som en monokromatisk, linjärpolariserad planvåg som utbreder sig i z -riktningen, dvs. den komplexa amplituden är $\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}) = E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{ikz}$. Denna våg stöter på fyra identiska hinder (spridare), som är placerade i yz -planet i koordinaterna $(0, a, 0)$, $(0, 0, a)$, $(0, -a, 0)$ och $(0, 0, -a)$. Dessa kan till exempel bestå av metallstänger eller till och med atomer, men deras exakta utformning är oviktig för uppgiften.

När ljuset träffar spridare n , kommer det att spridas i olika riktningar, vilket vi kan beskriva med en fjärrfältsamplitud $\mathbf{F}_n(\theta, \varphi)$, precis som för ett antennelement i en gruppantenn. Men eftersom de olika spridarna är placerade på olika platser i rummet, kommer de att träffas av ljus som har olika fas (olika argument i exponenten i e^{-ikz} , beroende på olika z -koordinater), vilket leder till att det ljus som skickas ut från varje spridare ärver denna fas.

Sammanfattning: Vår modell av spridningsexperimentet består alltså av fyra antennelement placerade i de fyra punkterna som nämns i första stycket. Varje antennelement har samma fjärrfältsamplitud, $\mathbf{F}_n(\theta, \varphi) = \mathbf{F}_0$, men olika fas, $\phi_n = -kz_n$, där z_n är z -koordinaten för spridare n . Vi antar att $\mathbf{F}_0$ är en känd storhet som inte beror på i vilken riktning vi tittar (dvs. är konstant, vilket svarar mot att lika mycket ljus sprids i alla riktningar).

Uppgift: Vad är fjärrfältsamplituden från de fyra spridarna, beräknat i den avlägsna punkten $(0, R, R)$ där $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})/\sqrt{2}$? Svaret behöver inte vara i enklast möjliga form.

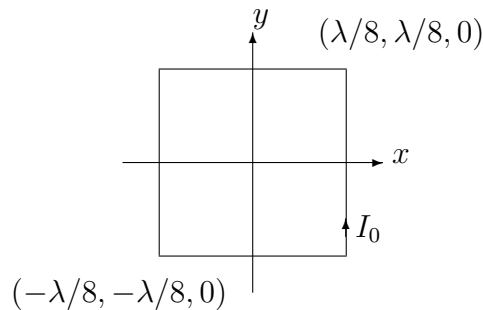
11.7

En elektrisk elementardipol med momentet $\mathbf{p}_1(t) = p_0 \sin \omega t \hat{\mathbf{y}}$ är placerad i origo. Placera ut ytterligare en elektrisk elementardipol $\mathbf{p}_2(t) = p_n \sin \omega t \hat{\mathbf{p}}$ så att fjärrfältet som utbreder sig längs x -axeln är

- a) linjärpolariserat längs riktningen $\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$ (elektriska fältet).
- b) cirkulärpolariserat.

Ange dipolens riktning ($\hat{\mathbf{p}}$), dipolmoment (p_n) och placering (x, y, z) i de båda fallen. Ljushastigheten i området är c_0 .

11.8



En i rummet konstant, tidsharmonisk ström I_0 flyter i en kvadratisk strömslinga med sida $\lambda/4$ enligt figur ovan. Vi bortser i detta problem från de svårigheter som finns med att generera en sådan ström.

- a) Beräkna fjärrfältsamplituden i x -riktningen från denna strömslinga med hänsyn tagen till slingans utsträckning.
- b) Hur stort är det relativa felet i fjärrfältsamplituden (fortfarande i x -riktningen) om slingan approximeras med en magnetisk dipol $\mathbf{m} = I_0(\lambda/4)^2 \hat{\mathbf{z}}$? Relativa felet i punkten x för en approximation av en funktion $f(x)$ definieras som $|f_{\text{approx}}(x) - f(x)|/|f(x)|$, du behöver ej beräkna siffervärdet.

11.9

Du har säkert stött på att mobiltelefoner kan orsaka hörbara signaler i en radiomottagare. Denna uppgift visar hur man kan uppskatta den effekt som utvecklas i radion på grund av mobiltelefonen. Telefonens antenn modelleras med en svängande dipol, och radiomottagaren av en plan slinga.

En tidsharmonisk elektrisk dipol riktad i z -riktningen och placerad i origo orsakar följande komplexa fjärrfält:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{r} E_0 \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

En kvadratisk plan slinga med sidan a är placerad i $(R, 0, 0)$, där $R \gg a$ och $a \ll \lambda$.

- a) Hur skall slingan orienteras för att maximera den inducerade emk:n i slingan?
- b) Vad är beloppet av denna maximala emk?

Det är enklast att utföra alla räkningar i frekvensplanet.

11.10

Två identiska tidsharmoniska elektriska dipoler, där båda har samma fas och pekar i z -riktningen, är placerade i $(0, 0, 0)$ och $(\lambda/2, 0, z)$. Vilket är det *minsta positiva* z -värde som maximerar fjärrfältet i riktningen $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}})/\sqrt{2}$?

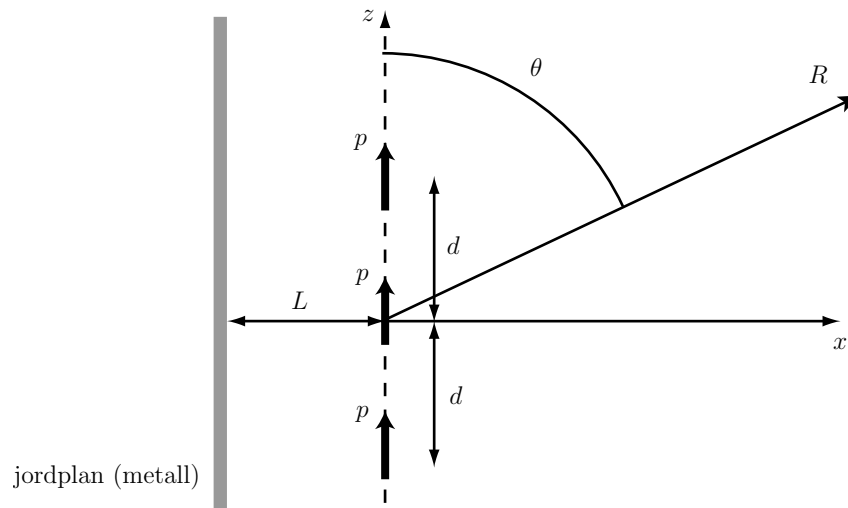
11.11

En gruppantenn består av två elementardipoler $\mathbf{p}_1 = p_0 \hat{\mathbf{n}}_1$ och $\hat{\mathbf{p}}_2 = p_0 e^{-i\alpha} \hat{\mathbf{n}}_2$. Dipolen $\mathbf{p}_1$ är placerad i origo och $\mathbf{p}_2$ i en punkt $(x_0, 0, 0)$ på x -axeln. Antennen skall designas så att den strålar maximalt längs positiva x -axeln och att den inte strålar varken längs negativa x -axeln eller längs positiva och negativa z -axeln. Bestäm $\hat{\mathbf{n}}_1$, $\hat{\mathbf{n}}_2$, α och x_0 så att detta är uppfyllt.

Ledning: Börja med att bestämma $\hat{\mathbf{n}}_1$, $\hat{\mathbf{n}}_2$.

11.12

Följande är en enkel modell av en antenn för basstationer i mobiltelefonsammanhang. Antennen består av tre tidsharmoniska punktdipoler som svänger med samma fas och amplitud, placerade längs dipolriktningen med inbördes avstånd d och med ett jordplan på avståndet L bakom sig.

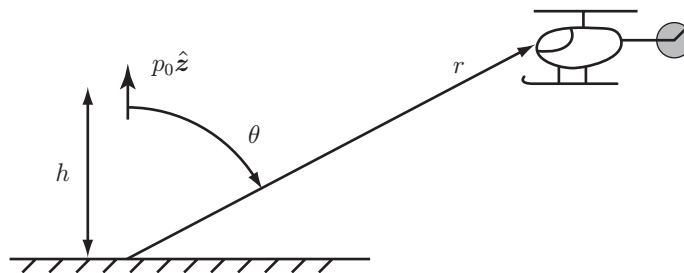


- a) Beräkna fjärrfältsamplituden som funktion av vinkeln θ , dvs. i x - z -planet. Lägg origo i den mittersta dipolen i bilden ovan. **Tips:** det går att spegla även tidsberoende dipoler.
- b) Vilket är det minsta valet av L som maximerar strålningen rakt fram i x -riktningen ($\theta = 90^\circ$)? Svara i antal våglängder.

11.13

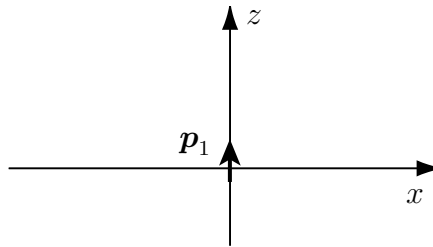
Tomten tänkte ge renarna ledigt i år och distribuerar julklapparna med hjälp av helikopter. Han håller kontakt med sina tomtenissar via mobiltelefon.

Vi modellerar en basstation till ett mobiltelefonsystem med en punktdipol på höjden h ovanför marken enligt figur nedan.



Vad är styrkan på det elektriska fält som en antenn fastsatt på en helikopter på avstånd r från basstationen kan känna av, dvs. vad är $|\mathbf{E}(r, \theta, \phi)|$? Det gäller att $r \gg \lambda$ och $r \gg h$. Marken kan betraktas som en perfekt ledare.

11.14



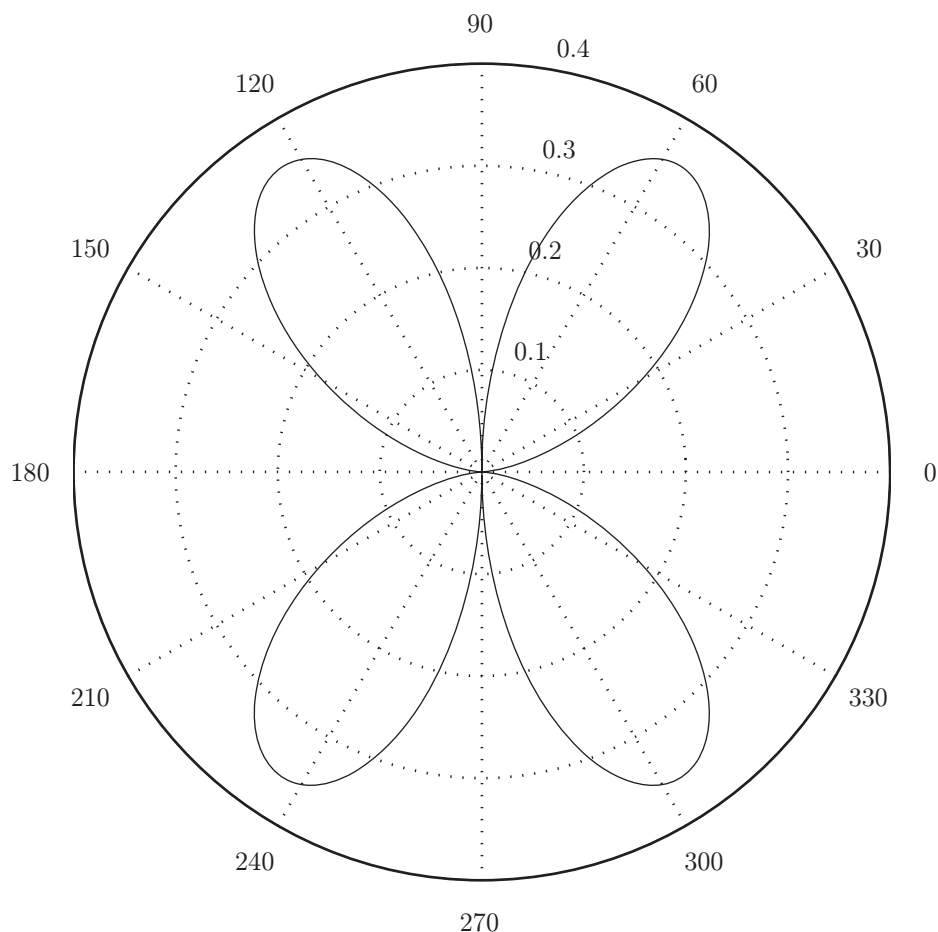
En elektrisk elementardipol med det komplexa dipolmomentet $\mathbf{p}_1 = p_0 \hat{\mathbf{z}}$ befinner sig i origo.

- a) Bestäm tidsmedelvärdet av strålningsvektorn som funktion av de sfäriska koordinaterna r och θ i fjärrzonen.
- b) Genom att placera ut ytterligare en dipol $\mathbf{p}_2$ kan man åstadkomma ett fjärrfält som är cirkulärpolariserat på positiva x -axeln men linjärpolariserat längs alla andra koordinathalvaxlar. Ange var dipolen skall placeras, uttryckt i våglängden λ , och bestäm det komplexa dipolmomentet $\mathbf{p}_2$.

11.15

Du har tillgång till två identiska tidsharmoniska dipolantennor. Båda ligger i planet $y = 0$ (dvs. xz -planet), är riktade i z -riktningen och har samma fas.

- a) Hur ska dipolerna placeras för att ge följande strålningsdiagram i planet $y = 0$? De vinklar som anges i diagrammet är vinkeln mot x -axeln, och skalan i radiell led är godtycklig. Motivera ditt svar.



- b) Beräkna fjärrfältsamplituden i området $y = 0$, $x > 0$ för denna konfiguration. Om du inte klarat a)-uppgiften får du anta att dipolerna befinner sig i $(\lambda/4, 0, 0)$ respektive $(0, 0, \lambda/4)$.

11.16

En elektrisk elementardipol, $\mathbf{p} = p_0 \cos \omega t \hat{\mathbf{n}}$, är belägen i punkten $(x, y, z) = (d, 0, 0)$. Man vill få en riktad antenn med starkt fjärrfält i x -riktningen och lägger därför in ett stort jordat metallplan vid $x = 0$. Hur skall man välja d och enhetsvektorn $\hat{\mathbf{n}}$ för att få ett maximalt fjärrfält i x -riktningen? Bestäm också tidsuttrycket för motsvarande elektriska fjärrfält i området $x > 0$.

Antenner: svar och lösningar

S11.1

$ie^{ix}/x - e^{ix}/x^2$. Termen ie^{ix}/x dominerar då $x \rightarrow \infty$.

S11.2

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{ikA_0}{\mu_0 r} e^{ikr} \hat{\mathbf{y}}. \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \eta_0 \frac{ikA_0}{\mu_0 r} e^{ikr} \hat{\mathbf{x}}.$$

S11.3

Vi skriver här $E_0 = i\omega p_0 i\eta_0 k/4\pi$ liksom i formelsamlingen. a) $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. b) $\mathbf{F} = -E_0 \hat{\mathbf{z}}$. c) $\mathbf{F} = -E_0 \hat{\mathbf{z}}$. d) $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

S11.4

Eftersom $20\lambda \gg \lambda$ gäller fjärrfältsapproximationen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi} \sin \theta \frac{\cos(\omega(t - r/c))}{r} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

På positiva x -axeln gäller $\theta = \pi/2$, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\mathbf{z}}$ och $r = x$ vilket ger

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\hat{\mathbf{z}} E(x, t) = \frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi} \frac{\cos(\omega(t - x/c))}{x} \hat{\mathbf{z}}$$

Elektronen utsätts för kraften $\mathbf{F} = q_e \mathbf{E}$. Detta gör att elektronen kommer att röra sig i z -led. För små rörelser fås rörelseekvationen

$$m_e \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = q_e E(20\lambda, t) = q_e \frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi} \frac{\cos \omega t}{20\lambda}$$

eftersom $20\omega\lambda/c = 40\pi$. Integration två gånger i tiden ger

$$z(t) = q_e \frac{\mu_0 p_0}{m_e 4\pi} \frac{1 - \cos \omega t}{20\lambda}$$

där det utnyttjats att $z(0) = 0$ och $dz(0)/dt = 0$. Elektronen svänger alltså harmoniskt kring punkten $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, q_e \frac{\mu_0 p_0}{m_e 80\pi\lambda})$. Dipolmomentet kring svängningspunkten ges av $\mathbf{p}_e(t) = q_e(z(t) - z_0)\hat{\mathbf{z}} = p_e \cos(\omega t)\hat{\mathbf{z}}$ där

$$p_e = -q_e^2 \frac{\mu_0 p_0}{m_e 80\lambda\pi}$$

Tidsmedelvärdet för den utstrålade effekten från elektronen ges av

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \oint_S \mathbf{E}_e \times \mathbf{H}_e \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da \, dt$$

där $T = 2\pi/\omega$ är periodtiden och $\mathbf{E}_e$ och $\mathbf{H}_e$ är fjärrfälten från elektronen. Läger vi ett lokalt koordinatsystem med origo vid elektronen gäller fjärrfälten

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_e(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\mu_0 \omega^2 p_e}{4\pi} \sin \theta \frac{\cos(\omega(t - r/c))}{r} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \mathbf{H}_e(\mathbf{r}, t) &= \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_e(\mathbf{r}, t) / \eta_0 \end{aligned}$$

där η_0 är vågimpedansen i vakuum. Om vi väljer S till en sfär fås

$$P = \frac{1}{2\eta_0} \left(\frac{\mu_0 \omega^2 p_e}{4\pi} \right)^2 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta$$

Eftersom $\int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta = 4/3$ fås tidsmedelvärdet av den utstrålade effekten

$$P = \frac{4\pi}{3\eta_0} \left(\frac{\mu_0 \omega^2 p_e}{4\pi} \right)^2$$

S11.5

Fjärrfältsamplituden från de två dipolerna är

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_{\text{dipol}}(\theta, \phi) [e^{-i\mathbf{k}\mathbf{e}_r \cdot 0\mathbf{e}_z} + e^{-i\mathbf{k}\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{e}_z - i\phi}] \\ &= E_0 \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} [1 + e^{-ikd \cos \theta - i\phi}] \\ &= 2E_0 \sin \theta \cos \left(\frac{1}{2}(kd \cos \theta + \phi) \right) e^{\frac{1}{2}(-ikd \cos \theta - i\phi)} \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

Fältstyrkan beror alltså i första hand på faktorn $\sin \theta \cos \left(\frac{1}{2}(kd \cos \theta + \phi) \right) = f(\theta)$, där $|f(\theta)| \leq 1$. I Trulas riktning gäller $\theta = \pi/2$, medan Truls återfinns i riktningen $\theta = \pi/4$.

a) Här önskar vi uppnå $|f(\pi/2)| = 1$ och $f(\pi/4) = 0$. Detta ger ekvationerna

$$\begin{aligned} 1 &= \left| 1 \cdot \cos \left(\frac{1}{2}(0 + \phi) \right) \right| \Rightarrow \frac{\phi}{2} = n_1 \pi \\ 0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left(\frac{1}{2}(kd \frac{1}{\sqrt{2}} + \phi) \right) \Rightarrow \frac{kd}{\sqrt{2}} + \phi = (2n_2 + 1)\pi \end{aligned}$$

De minsta (positiva) värdena för d och ϕ fås för $n_1 = 0$ och $n_2 = 0$. Då fås

$$\begin{aligned} d &= \frac{\sqrt{2}\pi}{k} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \\ \phi &= 0 \end{aligned}$$

- b) I detta fall vill vi finna det ϕ som ger $f(\pi/2) = 0$ med d valt som i föregående uppgift. Detta innebär

$$0 = 1 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(0 + \phi)\right) \Rightarrow \phi = \pi$$

Vi noterar att i Truls riktning gäller med detta val

$$f(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{1}{2}\left(kd\frac{1}{\sqrt{2}} + \phi\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

dvs. han får inte fullt så mycket mottagning som Trula hade i föregående deluppgift.

S11.6

Fjärrfältsamplituden för den beskrivna gruppantennen är

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}) &= \mathbf{F}_0 \sum_{n=1}^N e^{-i(\phi_n + k\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_n)} \\ &= \mathbf{F}_0 [e^{i(k \cdot 0 - k\hat{\mathbf{r}} \cdot a\hat{\mathbf{y}})} + e^{i(ka - k\hat{\mathbf{r}} \cdot a\hat{\mathbf{z}})} + e^{i(k \cdot 0 - k\hat{\mathbf{r}} \cdot (-a\hat{\mathbf{y}}))} + e^{i(k(-a) - k\hat{\mathbf{r}} \cdot (-a\hat{\mathbf{z}}))}] \\ &= \mathbf{F}_0 [2 \cos(ka\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{y}}) + 2 \cos(ka(-1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{z}}))] \end{aligned}$$

I den avlägsna punkten $(0, R, R)$ är $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})/\sqrt{2}$, och vi får

$$\mathbf{F}((\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})/\sqrt{2}) = \mathbf{F}_0 [2 \cos(ka/\sqrt{2}) + 2 \cos(ka(-1 + 1/\sqrt{2}))]$$

S11.7

Lösningarna är inte entydiga. Nedan ges två möjliga lösningar.

- a) För att få en våg som är linjärpolariserad längs linjen $y = z$ kan dipolen placeras i origo med riktning $\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{z}}$ och dipolmoment $p_n = p_0$. Det gör att $E_z(x, 0, 0, t) = E_y(x, 0, 0, t)$ och därmed är vågen linjärpolariserad.
- b) För att vågen skall vara cirkulärpolariserad skall E_y och E_z ha samma amplitud medan deras fas skall skilja sig med 90° . Det kan man få genom att lägga dipolen i punkten $(x, y, z) = (\lambda/4, 0, 0) = (c_0\pi/(2\omega), 0, 0)$ och låta $\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{z}}$ och $p_2 = p_0$.

S11.8

Fjärrfältet från en strömbana C är enligt formelsamlingen

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{i\eta_0 k}{4\pi} \hat{\mathbf{r}} \times \left(\hat{\mathbf{r}} \times \int_C I(\mathbf{r}') e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} d\mathbf{l}' \right)$$

Observationsriktningen är $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}}$, vilket ger $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' = x'$. Endast den vänstra och den högra delen av kurvan ger ett bidrag till fjärrfältet i denna riktning,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}) &= -\frac{i\eta_0 k}{4\pi} \hat{\mathbf{x}} \times \left[\hat{\mathbf{x}} \times \left(\int_{-\lambda/8}^{\lambda/8} I_0 e^{ik(\lambda/8)} (-\hat{\mathbf{y}} dy') + \int_{-\lambda/8}^{\lambda/8} I_0 e^{-ik\lambda/8} (\hat{\mathbf{y}} dy') \right) \right] \\ &= -\frac{i\eta_0 k}{4\pi} \hat{\mathbf{x}} \times \left[\hat{\mathbf{x}} \times I_0 \hat{\mathbf{y}} \left(-e^{ik\lambda/8} \frac{\lambda}{4} + e^{-ik\lambda/8} \frac{\lambda}{4} \right) \right] \\ &= \frac{i\eta_0 k}{4\pi} I_0 \hat{\mathbf{x}} \times \left[\hat{\mathbf{z}} \frac{\lambda}{4} 2i \sin \frac{k\lambda}{8} \right] \\ &= \frac{\eta_0 k \lambda}{8\pi} I_0 \hat{\mathbf{y}} \sin \frac{k\lambda}{8} = \frac{\eta_0 2\pi}{8\pi} I_0 \hat{\mathbf{y}} \sin \frac{2\pi}{8} \\ &= \frac{\eta_0 I_0}{4\sqrt{2}} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Enligt formelsamlingen är det elektriska fältet från en svängande magnetisk dipol

$$\mathbf{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m}'(t - R/c_0) \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} - \frac{\mu_0}{4\pi c_0} \frac{\mathbf{m}''(t - R/c_0) \times \hat{\mathbf{R}}}{R}$$

Den sista termen svarar mot fjärrfältsamplituden, eftersom den första avtar mycket snabbare med avståndet R . För en tidsharmonisk dipol gäller $\mathbf{m}'' = -\omega^2 \mathbf{m}$, och med $\mathbf{m} = I_0(\lambda/4)^2 \hat{\mathbf{z}}$ och $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{x}}$ får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{dipol}}(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi c_0} I_0 \frac{\lambda^2}{16} \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} = \frac{\mu_0 c_0 I_0}{4\pi} \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{\lambda^2}{16} \hat{\mathbf{y}} = \frac{\eta_0 I_0}{4\pi} \frac{k^2 \lambda^2}{16} \hat{\mathbf{y}} \\ &= \frac{\eta_0 I_0 \pi}{16} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Det relativa felet ges av

$$\frac{|\mathbf{F}_{\text{dipol}} - \mathbf{F}|}{|\mathbf{F}|} = \frac{\left| \frac{\eta_0 I_0}{4\sqrt{2}} - \frac{\eta_0 I_0 \pi}{16} \right|}{\frac{\eta_0 I_0}{4\sqrt{2}}} = \left| 1 - \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \right| \approx 0.11$$

det vill säga man gör ungefär 10 procents fel om man använder sig av dipolsapproximationen då man ska beräkna fjärrfältet för denna strömslinga.

S11.9

I punkten $(R, 0, 0)$ är $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}}$ och $\theta = \pi/2$, samt $\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\mathbf{z}}$. Det elektriska fältet är $\mathbf{E} = \frac{e^{ikr}}{r} E_0(-\hat{\mathbf{z}})$, vilket med hjälp av högerregeln ger $\mathbf{H} = \frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E} = \frac{e^{ikr}}{\eta r} E_0(-\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}}) = \frac{e^{ikr}}{\eta r} E_0 \hat{\mathbf{y}}$. Detta ger i sin tur $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ och det magnetiska flödet $\phi = \int \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \mu_0 a^2 \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}}$. Flödet maximeras då $\hat{\mathbf{n}} = \pm \hat{\mathbf{y}}$. Induktionslagen ger att den inducerade emk:n är lika med tidsderivatan av flödet, dvs. $-\dot{\omega} \phi$. Den maximala amplituden är

$$\max |-\dot{\omega} \phi| = \omega \mu_0 a^2 |\mathbf{H}| = \frac{\omega \mu_0 a^2 |E_0|}{\eta r}$$

S11.10

Med dipolerna separerade med vektorn $\mathbf{d} = \lambda/2 \hat{\mathbf{x}} + z \hat{\mathbf{z}}$, får vi följande fjärrfältsamplitud i riktningen $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}})/\sqrt{2}$ (där $\theta = \pi/4$, vilket medför $\sin \theta = 1/\sqrt{2}$)

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0(\theta, \phi)(e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{0}} + e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{d}}) = \underbrace{E_0 \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}}_{\text{absolutbelopp} = |E_0|/\sqrt{2}} (1 + e^{-ik(\lambda/(2\sqrt{2}) + z/\sqrt{2})})$$

Absolutbeloppet av detta maximeras tydligen då $e^{-ik(\lambda/(2\sqrt{2}) + z/\sqrt{2})} = 1$, dvs. då $\lambda/(2\sqrt{2}) + z/\sqrt{2} = n\lambda$, vilket ger

$$z = -\frac{\lambda}{2} + n\sqrt{2}\lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Det minsta positiva värdet för z erhålls för $n = 1$, dvs.

$$z_{\min} = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) \lambda$$

S11.11

Det enklaste är att låta $\hat{\mathbf{n}}_1 = \hat{\mathbf{n}}_2 = \hat{\mathbf{z}}$. Då kommer ingen av dipolerna att stråla längs positiva och negativa z -axeln. Det går nu att diskutera sig fram till vad x_0 och α skall vara. Ett alternativ till detta är att skriva upp fjärrfältet från de båda dipolerna. Detta ges av

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} E_0 \left(1 + e^{-i\alpha} e^{-ikx_0 \sin \theta}\right) \sin \theta \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\boldsymbol{\theta}} & x > 0 \\ E_0 \left(1 + e^{-i\alpha} e^{ikx_0 \sin \theta}\right) \sin \theta \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\boldsymbol{\theta}} & x < 0 \end{cases}$$

där θ är vinkeln från z -axeln och E_0 är en konstant. Vi ser att $|\mathbf{E}(\mathbf{r})|$ ges av

$$|\mathbf{E}(\mathbf{r})| = \begin{cases} \left| \frac{2E_0}{r} \sin \theta \cos \left(\frac{kx_0 \sin \theta + \alpha}{2} \right) \right| & x > 0 \\ \left| \frac{2E_0}{r} \sin \theta \cos \left(\frac{kx_0 \sin \theta - \alpha}{2} \right) \right| & x < 0 \end{cases}$$

Nu skall $|\mathbf{E}(\mathbf{r})|$ vara maximalt för $\theta = \pi/2$ $x > 0$ och noll för $\theta = \pi/2$ $x < 0$, vilket är uppfyllt om

$$\begin{aligned}\frac{\alpha + kx_0}{2} &= 0 \\ \frac{\alpha - kx_0}{2} &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

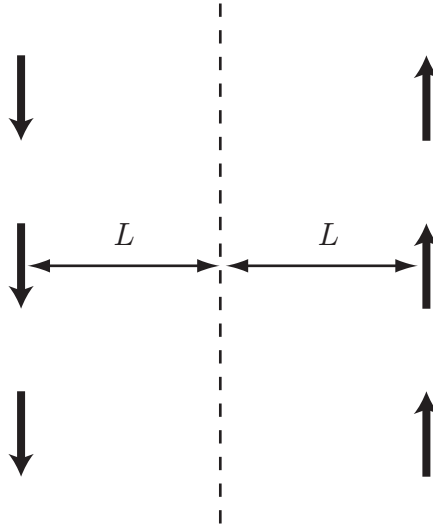
Detta ger

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\pi}{2} \\ x_0 &= -\frac{\pi}{2k} = -\frac{\lambda}{4}\end{aligned}$$

Kommentar: Det finns fler möjligheter, t.ex. $\alpha = -\pi/2$ och $x_0 = \lambda/4$

S11.12

a) Jordplanets inverkan kan ersättas med speglade dipoler enligt figur.



Vi kan se hela systemet av dipoler som en grupp av grupper: först har vi tre dipoler på rad ovanför varandra, och sedan en likadan grupp på avståndet $2L$ fast vänd åt andra hållet (svarar mot en fasskillnad π). Vi sätter origo i den mittersta dipolen till höger, vilket ger fjärrfältsamplituden

$$\mathbf{F}(\theta) = \mathbf{F}_0(\theta)[e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot (-d\hat{\mathbf{z}})} + e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{0}} + e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot d\hat{\mathbf{z}}}][e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{0}} + e^{-i(\pi + k\hat{\mathbf{r}} \cdot (-2L\hat{\mathbf{x}}))}]$$

där vektorn $\mathbf{F}_0(\theta) = E_0 \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$ är fjärrfältsamplituden från en punktdipol, vars amplitud är $E_0 = i\omega p_0 \eta_0 k / 4\pi$. Skalarprodukterna är $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \cos \theta$ och $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \sin \theta$. Detta ger

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\theta) &= E_0 \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} [e^{ikd \cos \theta} + 1 + e^{-ikd \cos \theta}] [1 - e^{ik2L \sin \theta}] \\ &= E_0 \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} [1 + 2 \cos(kd \cos \theta)] e^{ikL \sin \theta} [e^{-ikL \sin \theta} - e^{ikL \sin \theta}] \\ &= -E_0 \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} [1 + 2 \cos(kd \cos \theta)] e^{ikL \sin \theta} 2i \sin(kL \sin \theta) \\ &= \frac{\omega p_0 \eta_0 k}{4\pi} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} [1 + 2 \cos(kd \cos \theta)] e^{ikL \sin \theta} 2i \sin(kL \sin \theta) \end{aligned}$$

b) I x -riktningen är $\theta = 90^\circ$, varvid vi har fjärrfältsamplituden

$$\mathbf{F}(90^\circ) = E_0 \hat{\boldsymbol{\theta}} [1 + 2] e^{ikL} 2i \sin kL$$

Storleken på fjärrfältsamplituden blir alltså störst då $|\sin kL| = 1$, dvs. $kL = \pi/2 + n\pi$. Det minsta avståndet L är alltså

$$L = \frac{1}{k} \frac{\pi}{2} = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{\lambda}{4}$$

Detta kan också ses omedelbart från speglingen, utan att man behöver räkna ut fjärrfältsamplituden. I x -riktningen samverkar alla dipolerna om avståndet mellan de två grupperna är en halv våglängd.

S11.13

Jordplanets inverkan kan ersättas med en speglad dipol i $z = -h$ med samma riktning som den övre. Den totala fjärrfältsamplituden är då (med $E_0 = i\omega p_0 \eta_0 k / 4\pi = -\omega p_0 \eta_0 k / 4\pi$ enligt formelsamlingen)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\theta, \phi) &= \mathbf{F}_{\text{dipol}}(\theta, \phi) [e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot h\hat{\mathbf{z}}} + e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot (-h\hat{\mathbf{z}})}] = E_0 \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} [e^{-ikh \cos \theta} + e^{ikh \cos \theta}] \\ &= E_0 \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} 2 \cos(kh \cos \theta) \end{aligned}$$

Det elektriska fältet på avståndet $r \gg \lambda$ ges av

$$\mathbf{E}(r, \theta, \phi) = \mathbf{F}(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}$$

varför styrkan på det elektriska fältet är

$$|\mathbf{E}(r, \theta, \phi)| = \frac{2|E_0| \cdot |\sin \theta| \cdot |\cos(kh \cos \theta)|}{r}$$

S11.14

a) Tidsmedelvärde av strålningsvektorn ges av

$$\mathbf{P}_s = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\eta_0} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 \hat{\mathbf{r}}$$

Fjärrfältet ges av

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \omega^2 p_0 \sin \theta \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

och därmed blir strålningsvektorn

$$\mathbf{P}_s = \frac{1}{2\eta_0} \frac{\mu_0^2}{16\pi^2 r^2} \omega^4 p_0^2 \sin^2 \theta \hat{\mathbf{r}}$$

b) För att få ett cirkulärpolariserat fält som utbreder sig längs positiva x -axeln krävs att dipolen är riktad i y -led. Det leder också genast till att fälten längs positiva och negativa y - och z -axlarna är linjärpolariserade. Om vi placerar dipolen i en punkt $(x_0, 0, 0)$ och låter den ha momentet $\mathbf{p}_2 = p_0 e^{-i\alpha} \hat{\mathbf{y}}$ fås följande fjärrfält längs positiva och negativa x -axlarna:

$$\mathbf{E}(x, 0, 0) = E_0 \frac{e^{ikx}}{x} (\hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{y}} e^{-i\alpha - ikx_0}) \quad x > 0$$

$$\mathbf{E}(x, 0, 0) = E_0 \frac{e^{-ikx}}{x} (\hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{y}} e^{-i\alpha + ikx_0}) \quad x < 0$$

där $E_0 = p_0 \omega^2 \mu_0 / (4\pi)$. Längs positiva x -axeln är fältet cirkulärpolariserat om $e^{-i\alpha - ikx_0} = i$ eller $= -i$. Längs negativa x -axeln är det linjärpolariserat om $e^{-i\alpha + ikx_0} = 1$ eller $= -1$. Vi kan då låta

$$\alpha - kx_0 = 0$$

$$\alpha + kx_0 = \pi/2$$

vilket ger $\alpha = \pi/4$ och $x_0 = \lambda/8$. Observera att det finns flera möjliga lösningar.

S11.15

Låt θ vara vinkeln mellan Ortsvektorn och z -axeln.

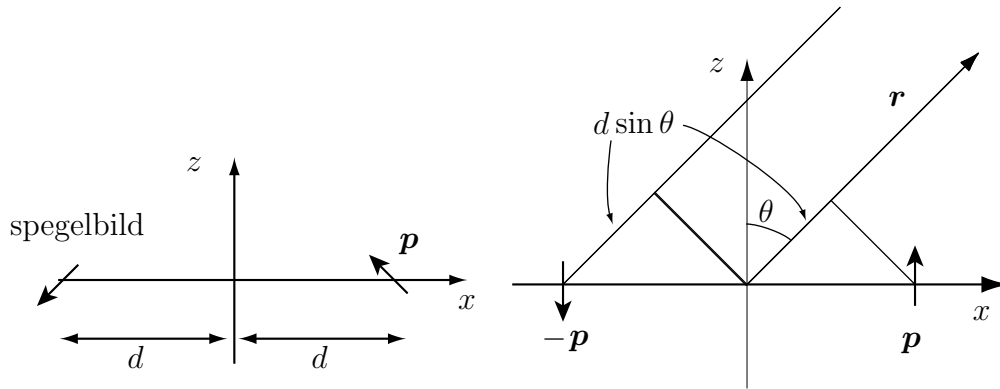
a) Fjärrfältsamplituden från en dipol är $\mathbf{F} = E_0 \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$, som är noll för $\theta = 0$ (i z -riktningen) och maximal för $\theta = \pi/2$ (i x -riktningen). Det önskade strålningsdiagrammet är noll i x -riktningen, varför dipolerna måste vara separerade med en halv våglängd i x -led för att uppnå detta. Symmetrin i diagrammet ger att de måste befinna sig på samma z -koordinat. En möjlig placering är $\mathbf{r}_1 = -\lambda/4 \hat{\mathbf{x}}$ och $\mathbf{r}_2 = \lambda/4 \hat{\mathbf{x}}$.

b) Fjärrfältsamplituden från två dipoler i $\mathbf{r}_1$ och $\mathbf{r}_2$ är

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \sum_{n=1}^2 e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_n} E_0 \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} = E_0 \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} (e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot (-\lambda/4\hat{\mathbf{x}})} + e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \lambda/4\hat{\mathbf{x}}}) \\ &= E_0 \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} (e^{i\pi/2\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{x}}} + e^{-i\pi/2\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{x}}}) = 2E_0 \sin \theta \cos(\pi/2\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= 2E_0 \sin \theta \cos(\pi/2 \sin \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

där vi utnyttjade $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \sin \theta$ i området $x > 0$.

S11.16



Dipolens komplexa moment ges av $\mathbf{p} = p_0 \hat{\mathbf{n}}$. Dipolen speglas i planet $x = 0$, enligt den vänstra figuren. En dipol strålar mest i det plan som är vinkelrätt mot dipolmomentet. I vårt fall skall alltså dipolen ligga i y - z -planet och vi kan låta $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$. Den speglade dipolen får dipolmomentet $\mathbf{p} = -p_0 \hat{\mathbf{n}}$. Dipolen och dess spegelbild fungerar nu som en array med två dipolantennor, enligt den högra figuren. Fjärrfältet ges då av

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\omega p_0 \eta_0 k_0 \sin \theta \frac{e^{ik_0 r}}{4\pi r} (e^{ik_0 d \sin \theta} - e^{-ik_0 d \sin \theta}) \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= -i\eta_0 \omega p_0 k_0 \sin \theta \sin(k_0 d \sin \theta) \frac{e^{ik_0 r}}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

Fjärrfältet är maximalt för $\theta = \pi/2$ då $k_0 d = \pi/2 (+n\pi)$, dvs. $d = \lambda/4$. Tidsuttrycket för det elektriska fältet ges av $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\}$ och alltså fås

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\eta_0 \omega p_0 k_0 \sin \theta \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \theta\right) \frac{\sin(\omega t - k_0 r)}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

