



LUND UNIVERSITY

Introduktion till hållfasthetsläran

Lärobok, övningar, anvisningar och facit

Ståhle, Per

2015

Document Version:

Förlagets slutgiltiga version

[Link to publication](#)

Citation for published version (APA):

Ståhle, P. (2015). *Introduktion till hållfasthetsläran: Lärobok, övningar, anvisningar och facit.*

Total number of authors:

1

General rights

Unless other specific re-use rights are stated the following general rights apply:

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Read more about Creative commons licenses: <https://creativecommons.org/licenses/>

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

LUND UNIVERSITY

PO Box 117
221 00 Lund
+46 46-222 00 00

INTRODUKTION TILL HÅLLFASTHETSLÄRAN

P. Ståhle

INTRODUKTION TILL HÅLLFASTHETSLÄRAN

P. Ståhle

Hållfasthetslära, LTH

Innehåll

1	DEFORMATION OCH TÖJNING	1
	Definition av töjning	1
	Töjning i en godtyckling riktning	4
	Huvudtöjningar och huvudtöjningsriktningar	6
	Mohrs cirkel för töjningar	7
	Exempel	9
	Repetitionsfrågor: Deformation och töjning	11
2	SPÄNNING	13
	Definition av spänning	16
	Spänningstensorn	20
	Huvudspänningar och huvudspänningsriktningar	21
	Mohrs cirkel för spänningar	21
	Effektivspänningar	23
	Jämvikt	24
	Exempel	26
	Repetitionsfrågor: Spänning	27
3	KONSTITUTIVA SAMBAND	29
	Linjärt elastiskt material	30
	Samband mellan G , E och ν	32
	Plan spänning, plan deformation, enaxlig spänning.	33
	Exempel	36
	Repetitionsfrågor: Linjär elasticitet och plasticitet	37
	Viscoelasticitet.	37
	Exempel	40
	Repetitionsfrågor: Viskoelasticitet	43
4	TILLÄMPNINGAR	44
	Enaxlig dragning	44
	Exempel	46
	Repetitionsfrågor: Enaxlig dragning	48
	Vridning	48
	Exempel	54
	Repetitionsfrågor: Vridning	56
	Euler-Bernoullis teori för balkböjning	56
	Exempel	61
	Repetitionsfrågor: Böjning	64

5	Övningar	65
	Deformation	65
	Töjning	66
	Spänning	69
	Enaxlig linjär elasticitet	71
	Viskoelasticitet	75
	Vridning	77
	Böjning	79
6	Vägledning till övningar	83
7	Svar till övningar	89

1 DEFORMATION OCH TÖJNING

I kontinuummekaniken beskriver begreppet deformation en förändring av en kropp från en referenskonfiguration till en aktuell konfiguration. En konfiguration anger partiklarnas positioner i kroppen. I motsats till den gängse uppfattningen av deformation, som innefattar förändring av form, inkluderar kontinuummekaniken även stelkroppsrörelser utan formförändring. Vad som förorsakar deformationen är inte relevant för definitionen av begreppet. Emellertid kan det vanligtvis antas att deformationen uppstår på grund av yttre laster, kroppskrafter eller temperaturförändringar i kroppen. Kroppskrafter kan vara tyngdkraft, elektrostatisk eller elektromagnetisk kraft. Inom dynamiken och i den speciella relativitetsteorin inkluderar man även tröghetskrafter enligt d’Alamberts princip.

Begreppet töjning normaliserar deformationen och representerar relativa förskjutningar mellan partiklarna i en kropp i förhållande till en referenslängd. Beroende på töjningens omfattning används olika töjningsmått. I denna kurs begränsar vi oss till Cauchys teori för infinitesimala töjningar och små förskjutningar. Cauchys teori lämpar sig framför allt för att analysera deformationer i material med elastiskt beteende och relativt hög styvhet, såsom betong, stål, trä mm. Töjning uttrycks som förhållandet mellan ett linjärt elements längd i deformerat tillstånd och dess längd i odeformerat tillstånd.

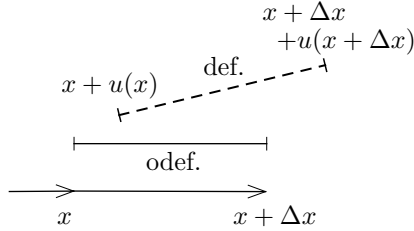
Definition av töjning

På en yta kan man märka upp ett linjärt element och mäta dess längd före och efter en åstadkommen deformation. Om stället av intresse är inuti en kropp försvåras mätningen rent praktiskt men det hindrar inte att man beaktar ett tänkt element och förfar på samma sätt som för ett element på kroppens yta. I fig. 1 ses ett element på eller i en kropp. Elementet, som är parallellt med x -axeln, har en ursprunglig längd

$$\ell_x = \Delta x . \quad (1)$$

I deformerat tillstånd är längden

$$\begin{aligned} L_x &= x + \Delta x + u(x + \Delta x) - (x + u(x)) = \\ &= \Delta x + u(x + \Delta x) - u(x) , \end{aligned} \quad (2)$$



Figur 1: Linjärt element på eller i en kropp i odeformerat och odeformerat (streckat) tillstånd. Elementet är ursprungligen parallellt med x -axeln. Rotationen antas vara liten. Förskjutning i x -led anges av förskjutningsvektorn $u(x)$.

och den relativa längdändringen är

$$\frac{L_x - \ell_x}{\ell_x} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}. \quad (3)$$

Här är förskjutningsvektorn $u(x)$ en funktion av x . Töjning eller så kallad normaltöjning definieras som gränsvärdet av den relativa längdändringen (3) av ett element med en försvinnande liten (infinitesimal) ursprunglig längd. Töjningen, ϵ_x , i x -led i en punkt definieras som gränsvärdet,

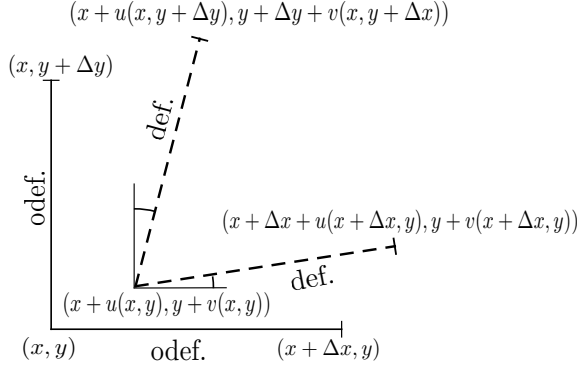
$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{du}{dx}. \quad (4)$$

Töjningen är positiv om elementet är sträckt och negativ om det är komprimerat. För en fullständig bestämning av töjningstillståndet i x - y planet krävs tre uppmätta töjningar. Här följer definition av töjningar ϵ_y i y -led samt skjuvningen γ_{xy} av x och y axlarna.

Beakta två linjära element i en kropp som initieellt ligger i x respektive y axlarnas riktningar. För elementet i y -led antas att den ursprungliga längden (se fig. 2) är

$$\ell_y = \Delta y. \quad (5)$$

Förskjutningar och rotationer antas vara små. I deformerat tillstånd



Figur 2: Två initieellt vinkelräta linjära element i x - och y -led i en kropp i odeformerat (heldraget) och deformerat (streckat) tillstånd. De ursprungliga längderna är Δx respektive Δy .

är längden

$$L_y = y + \Delta y + v(x, y + \Delta y) - (y + v(x, y)). \quad (6)$$

Här är v förskjutningar i y -led. Den relativa längdändringen för ett finit element är

$$\frac{L_y - \ell_y}{\ell_y} = \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y}. \quad (7)$$

Skjuvning eller skjuvtöjning definieras som minskningen av vinkeln (i radianer) mellan två linjära element, som i den ursprungliga konfigurationen är vinkelräta mot varandra. Vinkelminskningen enligt fig. 2 är dels ϕ_h som anger rotationen av x -axeln i positiv z -led (i riktning mot y -axeln) och ϕ_v som anger rotationen av y -axeln i negativ z -led (i riktning mot x -axeln) tas direkt ut som

$$\phi_h = \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x},$$

$$\text{resp. } \phi_v = \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y}. \quad (8)$$

Total vinkelminskningen mellan elementen Δx och Δy blir

$$\begin{aligned} \phi_{xy} &= \phi_h + \phi_v = \\ &= \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} + \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y}. \end{aligned} \quad (9)$$

Som gränsvärde för punkten (x, y) erhålls normaltöjningar och skjuv-töjning definierade som partiella gränsvärden av (4), (7) och (9) som följer,

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{L_x - \ell_x}{\ell_x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{L_y - \ell_y}{\ell_y} = \frac{\partial v}{\partial y}. \\ \gamma_{xy} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \phi_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (10)$$

Vi kan även definiera motsvarande töjningar i x - z respektive i y - z planen enligt ekv. (5) till (10). Cyklisk permutation, en och två gånger, av indexen x , y och z ger direkt definitionerna av samtliga töjningskomponenter i en punkt. I tre dimensioner definieras samtliga töjningskomponenter enligt följande,

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \end{cases} \quad (11)$$

där u , v och w är förskjutningar i x -, y - respektive z -led.

Töjning i en godtyckling riktning

Töjningskomponenterna ϵ_x , ϵ_y och γ_{xy} beror på valet av koordinatsystem vilket gör det omöjligt beskriva töjningstillståndet i punkten annat än i termer av komponenterna i det valda koordinatsystemet. För att få en allmängiltig bild av lokala töjningstillstånd skall vi först härleda ett uttryck för töjningar och skjuvningar för godtyckliga (kartesiska) koordinatsystem.

Betrakta geometrin i fig. 3. Det framgår av den deformerade triangeln i fig. 3 att de fyra töjningarna ϵ_x , ϵ_y , $\epsilon_{x'}$ och γ_{xy} är beroende av

varandra. Relationen mellan sidorna i den deformerade triangeln ges av cosinussatsen enligt följande,

$$b^2(1 + \epsilon_{x'})^2 = b^2(1 + \epsilon_x)^2 \cos^2 \theta + b^2(1 + \epsilon_y)^2 \sin^2 \theta - 2b^2(1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y) \sin \theta \cos \theta \cos(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}), \quad (12)$$

där θ är vinkeln mellan x -axeln och x' -axeln. Om termer av storleksordningen ϵ_x^2 , ϵ_y^2 och γ_{xy}^2 och mindre försummas, erhålls

$$\epsilon_{x'} = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta. \quad (13)$$

Notera att $\cos(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}) = -\sin \gamma_{xy} \rightarrow -\gamma_{xy}$, när $\gamma_{xy} \rightarrow 0$. Genom att ersätta θ med $\theta + \pi/2$ i (13) får vi ett uttryck för $\epsilon_{y'}$ som

$$\epsilon_{y'} = \epsilon_{x' + \frac{\pi}{2}} = \epsilon_x \sin^2 \theta + \epsilon_y \cos^2 \theta - \gamma_{xy} \cos \theta \sin \theta. \quad (14)$$

Vidare, genom att bilda skillnaden mellan de båda normaltöjningarna $\epsilon_{x'}$ och $\epsilon_{y'}$ får vi

$$\epsilon_{x'} - \epsilon_{y'} = (\epsilon_x - \epsilon_y)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2\gamma_{xy} \cos \theta \sin \theta. \quad (15)$$

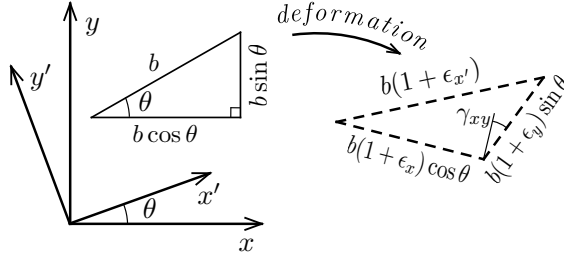
Motsvarande uttryck för en reverserad transformation från x' , y' till x , y ges direkt av (15) genom skifte av koordinater så att x byts mot x' och y byts mot y' samt, på grund av att vinkeln nu θ definieras i motsatt riktning, ett byte av θ mot $-\theta$. På så sätt erhålls sambandet

$$\epsilon_x - \epsilon_y = (\epsilon_{x'} - \epsilon_{y'})(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 2\gamma_{x'y'} \cos \theta \sin \theta, \quad (16)$$

ur vilket skjuvningen i koordinatsystemet x' - y' kan lösas ur (15) med resultatet

$$\gamma_{x'y'} = (\epsilon_y - \epsilon_x) \sin 2\theta + \gamma_{xy} \cos 2\theta. \quad (17)$$

Ekvationerna (13), (14) och (17) möjliggör en undersökning av töjningar och skjuvningar i godtyckliga riktningar i x - y planet. Teorin utvidgas enkelt till att omfatta alla töjningar i en punkt riktningar som ges av godtyckliga korrdinatsystem $x' - y' - z'$ genom att man



Figur 3: I x - y planet definieras töjningen entydigt av tre uppmätta oberoende töjningskomponenter. Figuren visar töjningarna i x - och y -led, ϵ_x resp. ϵ_y och skjuvtöjningen γ_{xy} samt töjningen $\epsilon_{x'}$ i en oberoende riktning x' . Rotationen antas vara liten.

inför en vinkel för vridning även i x - z och y - z planen. I det som följer analyseras vilka egenskaper töjningarna, $\epsilon_{x'}$, $\epsilon_{y'}$ och $\gamma_{x'y'}$ har i x - y planet.

Huvudtöjningar och huvudtöjningsriktningar

Det är alltid möjligt att finna minst två koordinatriktningar x' , y' så att $\gamma_{x'y'} = 0$. Det följer av att ekvationen $\gamma_{x'y'} = 0$ där $\gamma_{x'y'}$ ges av (17) alltid har två rötter i intervaller $0 \leq \theta \leq \pi$. Låt rötterna ges av $\theta = \alpha$ och $\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}$. Då gäller att

$$(\epsilon_y - \epsilon_x) \sin 2\alpha + \gamma_{xy} \cos 2\alpha = 0, \quad (18)$$

vilket ger

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}. \quad (19)$$

Töjningar i riktning α och $\alpha + \frac{\pi}{2}$ kallas huvudtöjningar och ges beteckningarna ϵ_1 och ϵ_2 . Från (13) erhålls efter byte av θ mot α :

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\alpha + \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha. \quad (20)$$

Omskrivning av

$$\cos 2\alpha = 1/\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha} = (\epsilon_x - \epsilon_y)/\sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

och på samma sätt

$$\sin 2\alpha = \tan 2\alpha/\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha} = \gamma_{xy}/\sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

ger efter insättning i (20), huvudtöjningarna

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}. \quad (21)$$

Man kan notera att medelvärdet av ϵ_1 och ϵ_2 är samma som medelvärdet av ϵ_x och ϵ_y . Vidare ser vi att skillnaden mellan ϵ_1 och ϵ_2 alltid är större eller på sin höjd lika stor som skillnaden mellan ϵ_x och ϵ_y , dvs i huvudriktningarna maximeras skillnaden mellan normaltöjningarna.

Mohrs cirkel för töjningar

Man kan ta hjälp av Mohrs cirklar för att bestämma huvudtöjningar och huvudtöjningsriktningar. Mohrs cirkel för töjningar i x - y planet utgår från ekv. (13), (14) och (17).

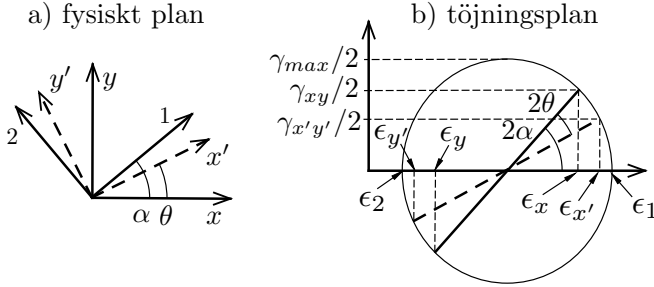
Låt utgångsriktningarna vara huvudtöjningsriktningarna och bestäm ϵ_x , ϵ_y och γ_{xy} . Ekvationerna (13), (14) och (17) ger då

$$\epsilon_x = \epsilon_1 \cos^2 \theta + \epsilon_2 \sin^2 \theta = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} + R \cos 2\theta, \quad (22)$$

$$\epsilon_y = \epsilon_1 \sin^2 \theta + \epsilon_2 \cos^2 \theta = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} - R \cos 2\theta \quad (23)$$

och

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = R \sin 2\theta, \quad (24)$$



Figur 4: Mohrs cirkel. a) visar det fysiska planet b) visar ett töjningsplan med axlar för töjning ϵ resp. skjuvning $\frac{1}{2}\gamma$. Vinkeln är θ till ett godtyckligt roterat koordinatsystem $x' - y'$ (ekv. 13, 14 och 17) och α är vinkeln till huvudtöjningsriktningarna 1-2, ekv. 19. Notera att vinklarna är dubbelt så stora och motriktade i Mohrs cirkel.

där (22) till (24) ger

$$R = \frac{|\epsilon_1 - \epsilon_2|}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}. \quad (25)$$

Som tidigare noterats ser man även i (22) och (23) att ϵ_x och ϵ_y antar största respektive minsta värde samtidigt som skjuvtöjningen $\gamma_{xy} = 0$.

För transformation i x - y planet representeras Mohrs cirkel i ett plan med koordinaterna ϵ och $\gamma/2$ plan enligt fig. 4. Cirkelns centrum ligger i $(\frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}, 0)$ och cirkelns radie är R . En rotation vinkeln θ medurs i x - y planet representeras i Mohrs cirkel av en rotation vinkeln 2θ moturs. Man kan notera att maximal skjuvning

$$\gamma_{max} = 2R = |\epsilon_1 - \epsilon_2|, \quad (26)$$

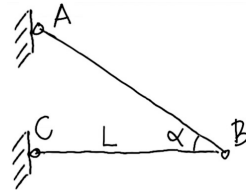
samt att den maximala skjuvningen uppnås vinkeln $\pm \frac{\pi}{4}$ från huvudtöjningsriktningarna, dvs. vid $\alpha \pm \frac{\pi}{4}$. Vidare ligger alltid minsta huvudtöjningen i rät vinkel mot riktningen för den största huvudtöjningen. Man ser också att normaltöjningarna är lika i de riktningar som ger maximal skjuvning. Om huvudtöjningarna är lika stora degenererar Mohrs cirkel till en punkt. Eftersom R då försvinner förstår man att ett sådant tillstånd är skjuvningsfritt och att normaltöjningarna är lika

oavsett riktning.

Mohrs cirkel ger snabbt en uppfattning om töjningstillståndets beskaffenhet. Ett flertal uppgifter kan lösas enbart genom att man i tanken frambringar Mohrs cirkel. Formella analytiska samband mellan töjningskomponenter kan tas fram om man förstår hur Mohrs cirkel fungerar.

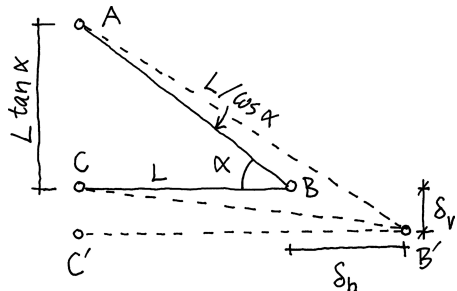
Exempel

1. Två stänger är förenade enligt figur. Beräkna den horisontella resp vertikala förskjutningen av punkt B, då stängerna erhållit töjningarna ϵ_a resp ϵ_b . Antag att töjningarna är små.



Lösning:

Vi återfinner triangeln ABC som triangeln AB'C' efter deformation. Om vi tar hjälp av triangel CB'C' kan vi beräkna längden på den nedre stängan med hjälp av Pythagoras sats, enligt följande (längd efter deformation är ursprunglig längd ggr $1 + \epsilon$)



$$\delta_v^2 + (L + \delta_h)^2 = L^2(1 + \epsilon_b)^2,$$

vilket ger

$$\delta_h = \sqrt{L^2(1 + \epsilon_b)^2 - \delta_v^2} - L. \quad (27)$$

Efter samma modell gäller för den rätvinkliga triangeln AB'C' att

$$(L \tan \alpha + \delta_v)^2 + L^2(1 + \epsilon_b)^2 - \delta_v^2 = \frac{L^2}{\cos^2 \alpha} (1 + \epsilon_a)^2.$$

vilket ger ¹

$$\delta_v = \frac{L}{2 \tan \alpha} \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} (1 + \epsilon_a)^2 - (1 + \epsilon_b)^2 - \tan^2 \alpha \right). \quad (28)$$

Efter expansion av kvadrerade termer utnyttjas Maclaurinutvecklingen $\sqrt{1 + \epsilon} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon + O(\epsilon^2)$ där $\epsilon \ll 1$. För $\epsilon_a, \epsilon_b \ll 1$ ger (27) och (28)

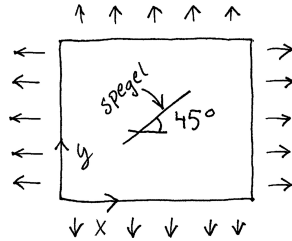
$$\delta_v = \left(\frac{\epsilon_a}{\cos \alpha \sin \alpha} - \epsilon_b \cot \alpha \right) L$$

och

$$\delta_h = \epsilon_b L.$$

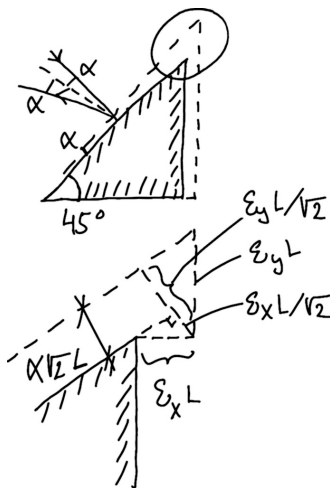
Endast linjära termer sparas, dvs. $\epsilon_1^2, \epsilon_2^2, \delta_v^2, \epsilon_1^3$ etc. har försumrats.

2. En spegel är fäst vid en metallplåt vinkelrätt mot dess yta och så att spegelns plan bildar 45° med både x - och y -riktningarna. En ljusstråle infaller vinkelrätt mot spegeln. Hur mycket vrider sig den reflekterade ljusstrålen om plåten sträcks 1/20 % i x -riktningen och 1/50 % i y -riktningen?



¹ $\sec(\alpha) = 1/\cos(\alpha)$. Jfr. $\csc(\alpha) = 1/\sin(\alpha)$

Lösning: Antag att spegeln vrids vinkeln α . Då kommer infallande strålens vinkel mot spegelytans normal bli α och utgående stråle får vinkeln $-\alpha$ vilket innebär att vinkeln mellan infallande och utgående strålar blir 2α (se figur). Eftersom det rör sig om små töjningar ϵ_x , ϵ_y och därmed även små vinkeländringar försummas alla termer av storleksordningen ϵ_x^2 , ϵ_y^2 , α^2 och mindre. Spegelns utsträckning i x -led respektive i y -led sätts till L .



Betrakta spegelns övre hörn. Hörnet förskjuts sträckan $\epsilon_x L$ i x -led och ϵ_y i y -led. Enligt figuren gäller att förskjutningens projektion på spegelytans normal är

$$\alpha\sqrt{2}L = \frac{\epsilon_y L}{\sqrt{2}} - \frac{\epsilon_x L}{\sqrt{2}},$$

vilket ger spegelns rotationsvinkeln (använd $\tan \alpha \approx \alpha$ för små vinklar α)

$$\alpha = \frac{1}{2}(\epsilon_y - \epsilon_x) = \frac{1}{2}0.01\left(\frac{1}{50} - \frac{1}{20}\right) = -1.5 \cdot 10^{-4}(\text{rad}).$$

Den efterfrågade vinkeln mellan in och utgående ljusstrålar är

$$|2\alpha| = 3 \cdot 10^{-4}(\text{rad}) \approx 0.017^\circ.$$

Repetitionsfrågor: Deformation och töjning

1. Vad kallas den vektor som definierar ändringen i en materiepunkts läge vid en kropps deformation och förflyttning?
2. Vad kallas den relativa avståndsändringen mellan två materiepunk-

ter vid en kropps deformation?

3. Vilken fysikalisk tolkning har γ_{yz} ?

4. Vilka samband gäller mellan u , v och ϵ_x , ϵ_y och γ_{xy} ? Det förutsätts att deformationerna är små.

5. I praktiken är det svårt att mäta γ men relativt lätt att mäta ϵ . Hur kan man utnyttja transformationssambandet för att erhålla den fullständiga töjningstensorn genom uppmätning av ϵ i olika riktningar?

6. Hur konstrueras Mohrs cirkel om ϵ_x , ϵ_y och γ_{xy} är kända?

7. Hur avläses: a) Huvudtöjningarnas storlek b) Vinkeln mellan huvudtöjningsaxlarna och xy -axlarna?

8. Vad kännetecknar huvudtöjningsriktningarna avseende skjuvning?

9. Hur och i vilka riktningar uppnås maximal skjuvning i planet?

10. Hur stor är vinkeln mellan de koordinater som anger huvudtöjningarna respektive maximal skjuvning?

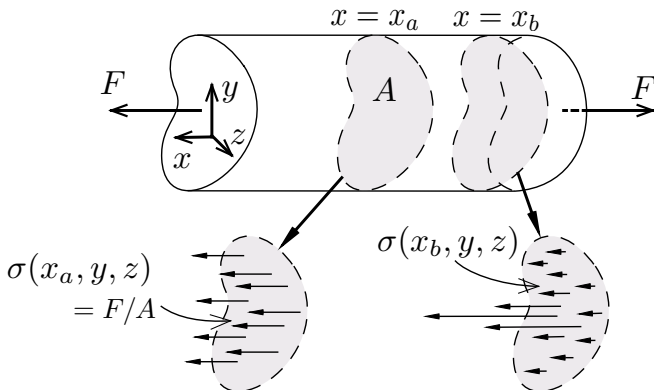
2 SPÄNNING

Spänningar representerar de inre krafter som verkar i en kropp. Kvantitativt är det ett mått på kraft per ytenhet. Krafterna uppstår som en reaktion på yttre krafter, som applicerats på kroppens ytor eller på materien i den. Eftersom kroppen antas bete sig som ett kontinuum är även spänningen kontinuerligt varierande. Den antas vara spänningsfri om de enda förekommande krafterna är de som behövs för att hålla ihop kroppen. Sådana krafter kan vara intermolekylära bindningar, som exempelvis jon-, metall- eller van der Waalsbindningar. Spänningar som skapats under tillverkningen undantas i allmänhet. Spänning och även inre spänning anges ofta i SI-enheten för tryck dvs. pascal (Pa), vilket motsvarar en newton per kvadratmeter. Som exempel gäller att $1 \text{ MPa} = 1 \text{ MN/m}^2 = 1 \text{ N/mm}^2$.

Figur 5 visar en axiellt belastad långsträckt kropp (en stång) som utsätts för dragbelastning eller kompression. Krafterna är applicerade i ändtvärsnittens tyngdpunkter. Kraften är riktad vinkelrät mot tvärsnittet och kan vara en dragkraft om den verkar utåt från planet ($F > 0$), eller tryckkraft om den verkar inåt mot planet ($F < 0$). Tekniskt sett representeras belastningen det här fallet av en skalär, σ , som är en genomsnittlig spänning som verkar på varje tvärsnitt i stången.

$$\sigma = \frac{F}{A} . \quad (29)$$

Spänningen, σ , kallas normalspänning och uppstår förutom vid axiellt belastning också vid böjning, hydrostatisk kompression, som membranspänning i tryckbelastade kärl etc. I en axiellt belastad stång är spänningen relativt jämnt fördelad i stångens tvärsnitt på något avstånd från stångens ändar. Närmare ändarna varierar spänningen mer i tvärsnittet (se fig. 5). Om tvärsnittsytan är liten, dvs. om stången är smal är stången till största delen homogent belastad vilket gör det praktiskt att använda uttrycket (29), som ett mått på spänningen. I en grov stång, med en längd av samma storleksordning som tvärsnittets linjära dimensioner, kan spänningen inte antas vara homogen. Vid böjning av en stång, är ena sidan sträckt och den andra komprimerad, vilket resulterar i såväl axiella dragspänningar som axiella tryckspänningar i varje tvärsnitt. I ett typiskt tryckkärl, där ett inre övertryck töjer kärlväggarna, uppstår en dragbelastande normalspänning i kärl-



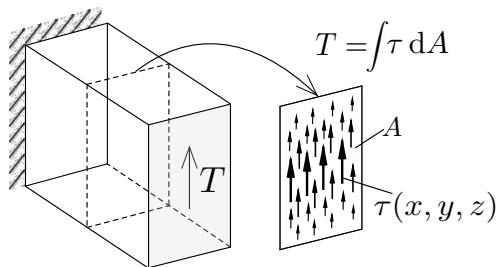
Figur 5: Enaxligt belastad stång med konstant tvärsnitt. Nära änden är spänningsfördelningen påverkad av hur kraften F applicerats. Ett stycke in motsvarande några gånger tvärsnittets linjära utsträckning är spänningen σ i princip jämnt fördelad i hela tvärsnittet och $\sigma = F/A$, där A är tvärsnittsytan.

väggens tvärsnitt.

Även skjuvspänningar förekommer i belastade kroppar. Dessa representerar krafter som ligger i ytans eller tvärsnittsytans plan så som kraften T i fig. 6 visar. Om spänningstillståndet är rimligt konstant kan det vara praktiskt att definiera även skjuvspänningar som ett medelvärde enligt följande:

$$\tau = \frac{T}{A}. \quad (30)$$

Skjuvspänningar uppstår exempelvis vid vridning och i allmänhet även vid böjning och i generella belastningsfall. När det uppstår mer än en typ av spänning som exempelvis vid böjning och skjuvning, knäckning, vridning och tryck, beskrivs spänningstillståndet av fler spänningskomponenter. Vidare är spänningar i regel inte jämnt fördelade över tvärsnittet av en kropp. Mer eller mindre skiljer sig spänningen i en given punkt från den genomsnittliga spänningen i tvärsnittet. Det är därför ofta nödvändigt att definiera spänningen i en punkt snarare än som ett medelvärde i ett område i kroppen. Enligt Cauchy, antas spänningen kontinuerlig och representerad av nio spänningskomponenter, varav tre är normalspänningar och sex är skjuvspänningar. De kan uttryckas



Figur 6: Ett prisma belastat av skjuvkraften T erhåller en genomsnittlig skjuvspänning $\tau = T/A$. Eftersom skjuvspänningen försvinner på de fria över- och underytorna blir spänningen aldrig homogent fördelad som i fallet med enaxlig dragbelastning.

som en andra ordningens tensor och kallas Cauchys spänningstensor. Det följer av detta att transformationen av spänningskomponenterna i olika riktningar följer samma lagar som töjningskomponenterna och kan t ex representeras grafiskt av Mohrs cirkel.

Vidare, enligt principen om rörelsemängdens bevarande, gäller att om en kropp är i statisk jämvikt uppfyller spänningstensorns komponenter jämviktsekvationer i varje del av kroppen. Även att summan av alla krafter och moment som verkar på varje del av kroppen är noll, vilket, som kommer att visas, leder till slutsatsen att spänningstensorn är symmetri. Det får till följd att spänningstensorn endast har sex oberoende spänningskomponenter stället för de ursprungliga nio.

Fasta material, vätskor och gaser motstår spänningar i olika omfattning. Vätskor under långsam rörelse ger efter för skjuvspänningar så att de skjuvspänningar som uppstår är försumbara. Viskösa vätskor kan delvis motstå skjuvspänning medan fasta kroppar kan motstå både normalspänning och skjuvspänning, även om det finns en övre gräns för hur stora spänningar som kan uppnås för varje givet material.

Bestämningen av den inre fördelningen av spänningar i en struktur kallas spänningsanalys. För att bestämma fördelningen av spänning i en struktur, måste man lösa ett randvärdesproblem, dvs. en ordinär eller partiell differentialekvation med givna randvillkor. Dessa är förskjutningar och krafter på strukturens begränsningsytor. Spänningsanalysen förenklas om de fysiska dimensionerna och fördelningen av laster tillåter att strukturen kan behandlas som en- eller tvådimensionell.

Som ett alternativ till en analytisk beräkning kan spänningar bestämmas som datorbaserade approximationer. Flera numeriska metoder har utvecklats för att lösa randvärdesproblem såsom finita element-, finita differens-, och finita volymmetoder vid vilka för-skjutningarna approximeras av styckvis linjära, kvadratiska, kubiska etc. enkla funktioner. Vidare finns kollokationsmetoder, randelementmetoder etc. som baseras på konform avbildning eller superposition av elementära lösningar för punktkrafter eller dislokationer. Analytiska lösningar på slutet form kan erhållas för flera enkla geometrier, materialsamband och randvillkor och även för asymptotiska tillstånd som i närheten av hörn, sprickspetsar, nära punktkrafter, dislokationer, punktformade värmekällor etc. Ofta kan komplicerade materialsamband behandlas i samband med asymptotiska tillstånd.

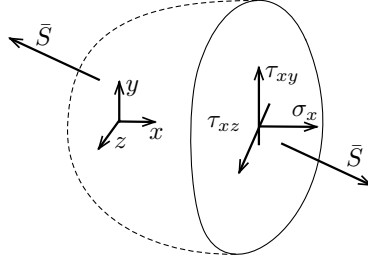
Definition av spänning

Betrakta ett verkligt eller tänkt snitt som delar en belastad kropp. Kroppen antas vara i jämvikt. För att kompensera den obalans i belastning som uppstår på grund av snittet, appliceras en utbredd kraft över ytan som ger en ekvivalent mekanisk påverkan på den betraktade delen. Låt oss införa basvektorerna $\bar{e}_x$, $\bar{e}_y$ och $\bar{e}_z$ i respektive koordinatrikting. Spänningen i en yta ges som ett gränsvärde av den totala kraften $\bar{S}(x, y, z) = \bar{e}_x S_x(x, y, z) + \bar{e}_y S_y(x, y, z) + \bar{e}_z S_z(x, y, z)$, som verkar i ett snitt i allmänhet. Väljer vi särskilt i tur och ordning ytor med normalen i x -, y - respektive z -led erhåller vi Cauchys definition på de kartesiska spänningskomponenterna i punkten. Fig. 7 visar belastningen på en yta med den utåtriktade normalen i x -led. Normalspänningen i ytan definieras som ett gränsvärde för normalkraften riktad ut från ytan

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\bar{e}_x \bar{S}(x, y, z)}{\Delta A} \quad (31)$$

och skjuvspänningarna definieras som

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\bar{e}_y \bar{S}(x, y, z)}{\Delta A} \quad (32)$$



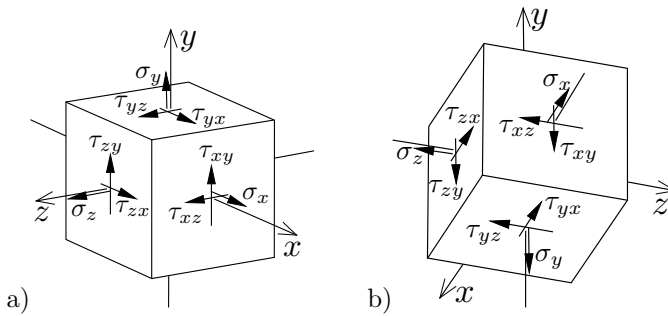
Figur 7: Spänningskomponenter i en yta med den utåtriktade normalen i x -riktning. Resultantspänningen $\bar{S}$ delas upp i spänningskomponenterna σ_x, τ_{xy} och τ_{xz} , som i en yta med normalriktning i x -led, som här är komposanter i x, y respektive z -riktning.

och

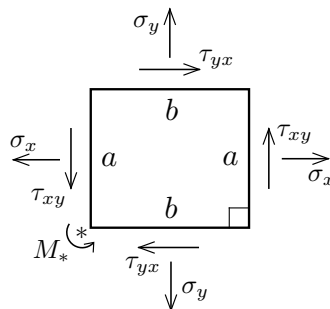
$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\bar{e}_z \bar{S}(x, y, z)}{\Delta A}. \quad (33)$$

På samma sätt erhålls spänningskomponenterna $\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \sigma_z, \tau_{zx}$ och τ_{zy} för ytor med normalriktning i y - respektive z -riktning. Totalt blir det nio spänningskomponenter. I ett plant fall reduceras antalet spänningskomponenter till fyra, $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$. Kraftjämvikt uppfylls av ovanstående eftersom spänningskomponenter i ytor med utåtriktade normaler i negativ x -, y - och z -riktning är lika stora och motriktade de som definieras för ytor med normaler i motsvarande positiva riktningar så som visas i fig. 8. Figuren visar de spänningar som verkar på en kub som är så liten att den kan antas befinna sig i ett homogent spänningstillstånd. Uppenbarligen är kuben i kraftjämvikt. För att även momentjämvikt skall vara uppfylld måste spänningskomponenterna vara symmetriska så som vi ser av följande: Antag att kuben har sidan a . Direkt från fig. 9, som beskriver den betraktade kubens sida i x - y planet med z -riktning ut ur figurens plan, erhålls följande moment taget med avseende på det nedre vänstra hörnet (markerat *)

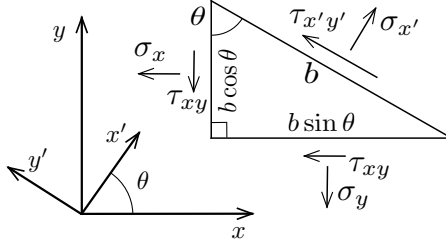
$$M_* = ab\tau_{yx} + \frac{b}{2}b\sigma_y + \frac{a}{2}a\sigma_x - (\frac{b}{2}b\sigma_y + \frac{a}{2}a\sigma_x + ba\tau_{xy}) = 0. \quad (34)$$



Figur 8: Spänningskomponenter i tre dimensioner. a) De synliga ytorna har utåtgående normaler i x -, y - och z -led. b) Baksidans ytor har utåtgående normaler i negativ x -, y - och z -led. På varje yta representerar tre spänningskomponenterna krafter i x -, y - och z -led.



Figur 9: Momentjämvikt, som ställs upp runt punkten $*$ visar att $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.



Figur 10: Spänningskomponenter i två olika koordinatsystem $x'-y'$ och $x-y$. Koordinataxeln x' har vridits vinkeln θ moturs från x -axeln.

Resultatet visar att

$$\tau_{yx} - \tau_{xy} = 0. \quad (35)$$

För $x-z$ och $y-z$ planen genomförs enkelt samma analys som visar att samma sak gäller för skjuvspänningskomponenterna även i dessa plan. Det visar att ordningen på skjuvspänningarnas index är irrelevant, dvs. vad som är kraftriktning och normalriktning blir för objekt som är i jämvikt. Således återstår 6 oberoende spänningskomponenter σ_x , σ_y , σ_z , τ_{yz} , τ_{xz} och τ_{xy} i punkten och för tvådimensionella (plana) fall återstår 3 oberoende spänningskomponenter, så som σ_x , σ_y och τ_{xy} för $x-y$ planet. Spänningskomponenterna ger tillsammans en entydig beskrivning av spänningstillståndet i en punkt. Spänningar som verkar på plan med utåtriktade normaler i godtyckliga riktningar kan beräknas om man iakttar att jämviktsvillkoret alltid måste vara uppfyllt. Betrakta fig. 10. För spänningar i $x-y$ planet gäller om man summerar krafter i x' -axelns riktning (se fig. 10) att

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} b - \sin \theta \tau_{xy} b \cos \theta - \cos \theta \sigma_x b \cos \theta - \cos \theta \tau_{xy} b \sin \theta \\ - \sin \theta \sigma_y b \sin \theta = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

vilket ger

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta. \quad (37)$$

Byte av vinkeln θ mot $\theta + \frac{\pi}{2}$, dvs. efter moturs rotation 90° av hypotenusan i fig. 10, ger spänningskomponenten $\sigma_{y'}$ enligt följande

$$\sigma_{y'} = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta . \quad (38)$$

Summering av krafter i y' -riktning ger på samma sätt

$$\tau_{x'y'} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta . \quad (39)$$

Motsvarande transformationssamband kan härledas för spänningskomponenterna i x - z och i y - z planen.

Spänningstensorn

Vid jämförelse av (37) till (39) och (13), (14) och (17) kan man notera en analogi mellan töjningarna ($\epsilon_x, \epsilon_y, \frac{1}{2}\gamma_{xy}$) och spänningarna ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$). Allmänt gäller att samtliga töjningskomponenter ($\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_y, \frac{1}{2}\gamma_{yz}, \frac{1}{2}\gamma_{xz}, \frac{1}{2}\gamma_{xy}$) och spänningskomponenterna ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$) följer samma lagar för transformation. Båda är så kallade tensorer av andra ordningen. Dessa är en grupp av fysiska objekt med specifika transformationsegenskaper i rummet. Skalärer och vektorer tillhör gruppen och är tensorer av nollte respektive första ordningen. Som bekant påverkas skalärer inte av koordinattransformationer. Dit hör temperatur, tryck $p = -(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$, medeltöjning ($\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$) etc. Om vektorer vet vi att de transformeras från ett koordinatsystem x - y till ett x' - y' som är vridet vinkeln θ i riktning från x -axeln mot y -axeln i samma plan enligt följande $f_{x'} = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta$ och $f_{y'} = -f_x \sin \theta + f_y \cos \theta$. Alla tensorer av första ordningen, dvs. vektorer transformeras på samma sätt oavsett om det gäller vindriktning, förskjutningar, temperaturgradienter eller något annat. Likaså transformeras tensorer av andra ordningen, tredje ordningen osv. som exempelvis spänningar, resistivitet, friktionskoefficienter, mm. på ett sätt som är gemensamt för alla tensorer som tillhör samma ordning. Alla tensorer, oavsett ordning, är fysiska kvantiteter och är som sådana oberoende av vilket koordinatsystem som används. Samtidigt beror komponenterna i tensorn på orienteringen av det valda koordinatsystemet. I stället för att ange tensorers komponenter i ett givet koordinatsystem kan de, som fysisk kvantitet, beskrivas med hjälp av en uppsättning

invarianter. En sådan uppsättning är tensors egenvärden t.ex. huvudtöjningar eller huvudspänningar som beskrivs härnäst.

Huvudspänningar och huvudspänningsriktningar

I analogi med det som gäller för töjningstensorerna finns för spänningstensorerna genom varje punkt i en belastad kropp åtminstone tre så kallade huvudplan, där all spänning har samma riktning som normalriktningen, dvs. alla skjuvspänningskomponenter försvinner. Spänningarna i de tre planen kallas huvudspänningar. Planens normaler, som bildar tre ortogonala riktningar, kallas huvudspänningsriktningar.

I ett plan, låt oss säga x - y planet beräknas riktning och storlek på huvudspänningarna på motsvarande sätt som huvudtöjningar och huvudtöjningsriktningar. Bytet $\sigma_x \rightarrow \epsilon_x$, $\sigma_y \rightarrow \epsilon_y$ och $2\tau_{xy} \rightarrow \gamma_{xy}$ i samband för töjningstensorer ger motsvarande samband för spänningar. Vidare gäller naturligtvis alla generella slutsatser för töjningstensorerna, om relationer mellan riktningar för maximala och minimala komponenter, maximal skjuvkomponent etc. samt relationer mellan komponentvärden även för spänningstensorerna.

Sålunda är huvudspänningsriktningarna två i intervallet $0 < \theta \leq 2\pi$. Vinkeln moturs mellan x -axeln och en huvudspänningsriktning α ges av

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} . \quad (40)$$

Funktionen $\arctan$ är $\pi/2$ periodisk och man kan därför konstatera att vinkeln till nästa huvudspänningsriktning är $\alpha + \pi/2$. Spänningarna i dessa riktningar, dvs. huvudspänningarna ges beteckningarna σ_1 och σ_2 och de beräknas enligt följande

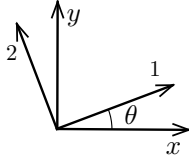
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} . \quad (41)$$

Ofta väljs σ_1 som den största huvudspänningen.

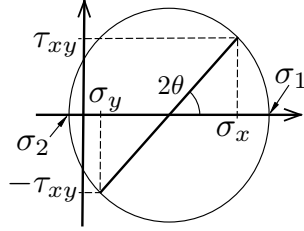
Mohrs cirkel för spänningar

Man kan ta hjälp av Mohrs cirkel för analys av alla andra ordningens tensorer. För en tensor med komponenterna $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ ges Mohrs

a) fysiskt plan



b) spänningsplan



Figur 11: Mohrs cirkel för analys av spänningar. a) visar det fysiska planet b) visar ett plan för normalspänning σ resp. skjuvspänning τ . Vinkeln är θ mellan x - y riktningarna och 1-2 riktningarna i det fysiska planet.

cirkel genom omskrivning av (37) och (38) enligt följande

$$\sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - R \cos 2\theta, \quad (42)$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + R \cos 2\theta \quad (43)$$

och

$$\tau_{xy} = R \sin 2\theta, \quad (44)$$

där $R = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$. Jämför med resultatet (22) till (24) för tensorn $(\epsilon_x, \epsilon_y, \frac{1}{2}\gamma_{xy})$.

Spänningskomponenterna i x - y planet representeras av en cirkel i ett σ , τ plan enligt fig. 11. Cirkelns centrum ligger i $(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0)$ och radien är R . Man kan notera att maximal skjuvspänning är

$$\tau_{max} = R = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|, \quad (45)$$

samt att den uppnås i plan som vridit vinkeln $\pm \frac{\pi}{4}$ från huvudspän-

ningsriktningarna dvs. vid

$$\beta = \alpha \pm \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \pm \frac{\pi}{4} \quad (46)$$

Vidare ligger alltid minsta huvudspänningen i rät vinkel mot riktningen för den största huvudspänningen. I plan med största skjuvspänning är normalspänningarna lika stora.

Övrigt som man kan observera med hjälp av Mohrs cirkel gällande andra ordningens tensorer kan studeras i avsnittet för töjningar.

Effektivspänningar

Hittills är inget sagt om belastningens storlek och signifikans. Om belastningen blir för stor riskerar man att det uppstår sprickor eller plastisk deformation. Det förstnämnda kallas brott och det sker i spröda material och det sistnämnda, som även benämns plasticering, sker i mjuka material. Med mjuk avses i sammanhanget att materialet erhåller permanent deformation vid hög belastning. Material som deg, lera, bly och järn är mjuka vid rumstemperatur. Härdning används för att göra materialet hårdare i olika grad. Flera material blir hårda vid låga temperaturer. Hårda material kan motstå högre spänningar utan att få permanenta deformationer. Vid höga belastningar ökar emellertid risken för brott, dvs. att det bildas en spricka som propagerar genom materialet. Olika skalära spänningsmått används för att bedöma risk för brott respektive plasticering. Brotrisk bedöms ofta med utgångspunkt från stora normalspänningar. Initiering av sprickor sker i det huvudspänningsplan som ger den största huvudspänningen. Ett villkor för att sprickor inte skall initieras kan skrivas

$$(\sigma_{1,2,3})_{max} < \sigma_B, \quad (47)$$

där $\sigma_{1,2,3}$ är de tre huvudspänningarna och σ_B uppmäts vid ett experiment.

För mjuka material gäller att plasticering skall undvikas. För det krävs ett skalärt mått på belastningens storlek, en effektivspänning σ_e . Vid materialprovning jämförs effektivspänningen med ett uppmätt värde på effektivspänningen vid begynnande plasticering, den så kallade flytspänningen σ_s . Främst två sätt används för att definiera en

effektivspänning som ger goda resultat och som är rimligt oberoende av det specifika spänningstillståndet, som t ex dragning, ren skjuvning, blandat tillstånd etc. De två måtten benämns effektivspänning enligt Tresca och dito enligt von Mises. Trescas effektivspänning baseras på antagandet att det är skjuvspänningar som är drivkraften vid plastisk deformation. Effektivspänning enligt Trescas hypotes (skjuvspänningshypotesen) definieras som maximal skjuvspänning eller största skillnaden i mellan huvudspänningar enligt,

$$\text{Tresca: } \sigma_e = \tau_{max} = (|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|)_{max}. \quad (48)$$

En annan hypotes som föreslagits av von Mises, baseras på observationen att hydrostatiska spänningar enbart ger en homogen kompression och därmed ingen formändring. von Mises effektivspänning definieras som

$$\begin{aligned} \text{von Mises: } \sigma_e &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} = \\ &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_x \sigma_z - \sigma_y \sigma_z + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}. \end{aligned} \quad (49)$$

Denna effektivspänning uttrycker det arbete som åstadkommer formändring.

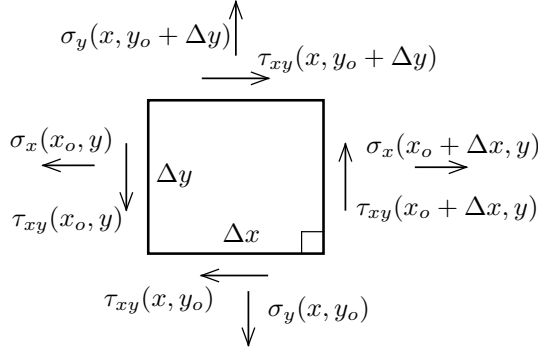
Villkoret som ställs på spänningarna skrivs

$$\sigma_e < \sigma_s. \quad (50)$$

Vid lika eller högre belastning uppstår plastisk deformation.

Jämvikt

I statiken ställer man normalt upp jämviktsekvationer för krafter och moment. När vi beaktar spänningar såsom definierade i en punkt leder jämvikt till ett differentialsamband. Låt oss betrakta ett rätblock från z -axeln som fig. 12 visar. Summering av samtliga krafter i positiv x -led



Figur 12: Jämvikt i ett kontinuum

ger

$$\begin{aligned}
 & \Delta y \Delta z \sigma_x(x_o + \Delta x, y, z) - \Delta y \Delta z \sigma_x(x_o, y, z) + \\
 & + \Delta x \Delta z \tau_{xy}(x, y_o + \Delta y, z) - \Delta x \Delta z \tau_{xy}(x, y_o, z) + \\
 & + \Delta x \Delta y \tau_{xz}(x, y, z_o + \Delta z) - \Delta x \Delta y \tau_{xz}(x, y, z_o) = \\
 & = \Delta x \Delta y \Delta z \left\{ \frac{\sigma_x(x_o + \Delta x, y, z) - \sigma_x(x_o, y, z)}{\Delta x} + \right. \\
 & \left. + \frac{\tau_{xy}(x, y_o + \Delta y, z) - \tau_{xy}(x, y_o, z)}{\Delta y} + \frac{\tau_{xz}(x, y, z_o + \Delta z) - \tau_{xz}(x, y, z_o)}{\Delta z} \right\} = 0.
 \end{aligned} \tag{51}$$

Om $\Delta x, \Delta y$ and Δz går mot noll erhålls ett gränsvärde enligt följande,

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sigma_x(x_o + \Delta x, y, z) - \sigma_x(x_o, y, z)}{\Delta x} + \right. \\
 & \quad + \frac{\tau_{xy}(x, y_o + \Delta y, z) - \tau_{xy}(x, y_o, z)}{\Delta y} + \\
 & \quad \left. + \frac{\tau_{xz}(x, y, z_o + \Delta z) - \tau_{xz}(x, y, z_o)}{\Delta z} \right\} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0. \tag{52}
 \end{aligned}$$

Beaktas jämvikt för krafter i y -led och z -led erhålls totalt tre jämviktsekvationer. Förekommer kroppskrafter får dessa lov att läggas till så

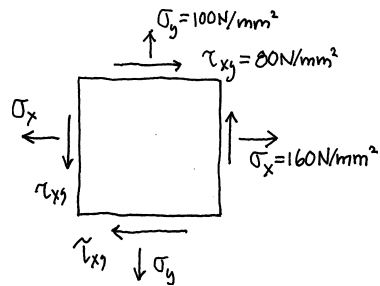
att följande jämviktsekvationer erhålls:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0,\end{aligned}\tag{53}$$

där X, Y, Z är kroppskrafter per volymsenhet i x -, y - respektive z -led.

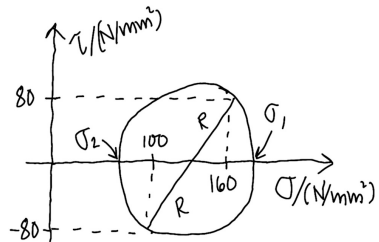
Exempel

På ytan av en belastad kropp verkar spänningarna enligt figuren. Bestäm a) huvudspänningarna, b) deras riktningar, c) max skjuvspänning i $x - y$ planet d) effektivspänningen enligt deviationsarbets- och skjuvspänningshypoteserna



Lösning: Mohrs cirkel ritas upp så som figur a) visar. Cirkelns radie enligt (FS:8) är

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



vilket även framgår direkt av figuren.

$$R = \sqrt{\left(\frac{160 - 100}{2}\right)^2 + 80^2} = 85.4 \text{ N/mm}^2$$

a) Vi ser också att huvudspänningarna (σ_1 och σ_2 tillika σ_{max} och σ_{min} i $x - y$ planet) är

$$\sigma_1 = 130 + 85.4 = 215.4 \text{ N/mm}^2$$

och

$$\sigma_2 = 130 - 85.4 = 44.5 \text{ N/mm}^2.$$

Den tredje huvudspänningen är normalspänningen ut från $x - y$ planet $\sigma_3 = \sigma_z = 0$.

b) Vinkeln från x -axeln till en huvudspänningsriktning är (FS:9)

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \frac{80}{30} \approx 34.7^\circ \text{ or } -145.3^\circ.$$

Vinkeln till den andra huvudspänningen är $\alpha + 90^\circ = 124.7^\circ$ or -55.3° .

c) Radien ger största skjuvspänningen i xy -planet (FS:8)

$$\tau_{xy,max} = R = 85.4 \text{ N/mm}^2.$$

d) Effectivspänning enligt von Mises bestäms av FS:11

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2} = 196.9 \text{ N/mm}^2$$

Effektivspänning enligt Trescas hypotes är identisk med dubbla maximala skjuvspänningen i punkten. Enligt FS:12

$$\sigma_e = (|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|)_{max} = 215.4 \text{ N/mm}^2$$

Repetitionsfrågor: Spänning

1. Redogör för beteckningskonventionen för normal- och skjuvspänningar. Hur är skjuvspänningen τ_{xz} riktad och i vilken eller vilka plan verkar den? Samma för σ_y ?
2. Skjuvspänningen τ_{xy} representerar kraft i y -led per ytenhet i en ytan med normalriktning i x -led medan τ_{yx} representerar kraft i x -led per ytenhet i en ytan med normalriktning i y -led. Hur stor är kvoten τ_{xy}/τ_{yx} ?
3. Vad krävs av en fysikalisk storhetsgrupp för att den som ϵ_x , ϵ_y och γ_{xy} skall få kallas tensor?

3. Vad karakteriserar ett huvudspänningsplan?
4. Var verkar den maximala skjuvspänningen? Hur beräknas den?
5. Vad gäller vid plan spänning?
6. I hur många riktningar kan (minst) man konstatera man har en huvudspänning? vad är vinkeldelningen mellan dessa?
7. En obelastad yta är som bekant fri från belastning. Vilka slutsatser om spänningstillståndet på en sådan yta kan dras av detta?
9. Jämför effektivspänning enligt von Mises respektive enligt Tresca för ett enaxligt tillstånd (endast $\sigma_x \neq 0$), respektive ett rent hydrostatiskt tillstånd (endast $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z \neq 0$).
10. Vilka är jämviktsekvationerna för ett kontinuum. Ange speciellt vad som gäller vid plana tillstånd i $x - y$ planet, dvs när $\frac{\partial}{\partial z} = 0$.

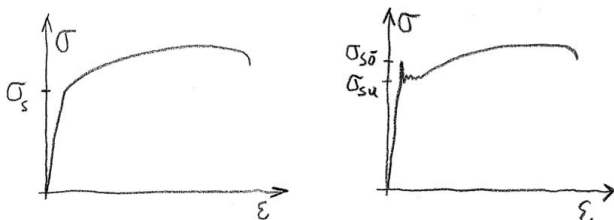
3 KONSTITUTIVA SAMBAND

1678 tillkännagav laboratoriekuratoren vid Royal Society of London, Robert Hooke, att han 18 år tidigare gjort upptäckten att många material som belastas erhåller en deformation som är proportionell mot belastningen. Hooke hemlighöll upptäckten, som flera andra samtida forskare (Huygens, Galileo), för att kunna dra fördel av sin kunskap. E. Mariotte som publicerade liknande upptäckter 1680 förklarade hur de balkar som studerats av Galileo motstod tvärgående belastningar. James Bernoulli angav 1705 att det korrekta sättet att beskriva deformation var att räkna med kraft per ytenhet, dvs. spänning, som funktion av förlängning per längdenhet, dvs. töjning. Hans brors student Leonhard Euler föreslog bland mycket annat, ett linjärt samband mellan spänning och töjning på formen $\sigma = E\epsilon$, där koefficienten E kallas elasticitetsmodulen.

Under tidigt 1800-tal utvecklades två teorier parallellt, en baserad på kontinuumidealiseringen och en som baserades på en uppfattning av materien som uppbyggd av partiklar. Det senare ledde till uppfattningen att material beskrivs av en enda materialparameter. Den tvärkontraktion som blir följden av en töjning ϵ härleddes, som en konsekvens av att attraktionskrafterna mellan partikelpar beskrivs av ett centralfält, till $\epsilon/4$. Överensstämmelsen med experimentella observationer var dålig och därför kom det mesta av den efterföljande utvecklingen att bygga på kontinuummekanik. Kvantkemin har de senaste decennierna kommit en bit på vägen till förståelsen för hur monokristalina material uppför sig och beräkningar av elastiska materialparametrar som baserats fysikaliska grundprinciper har resulterat i realistiska resultat. Framgångarna dock ännu så länge begränsade till enkla materialstrukturer.

För bestämning av olika materials hållfasthetsegenskaper utnyttjar man olika standardiserade prov. Det viktigaste av dessa är dragprov, som utförs i en dragprovsmaskin. Vid provet mäts dragkraft och förlängning kontinuerligt. Vidare mäts den diameterninskning som blir följden av dragningen.

Figur 13 visar dragprovkurvor för två olika ståltyper. För båda typerna startar dragningen med en snabbt ökande spänning som med god approximation kan anses vara en linjär funktion av töjningen. Under denna del är materialet elastiskt, dvs. förloppet är reversibelt och vid en avlastning återgår kroppen till sin ursprungliga form. Om förlängningen ökar efter den elastiska fasen planar den erforderliga



Figur 13: Dragprov a) stål, b) mjukt kolstål. Kurvan har av visuella skäl en överdrivet låg lutning i den inledande elastiska fasen ($\sigma < \sigma_s$)

belastningen ut. Kurvans lutning under denna fas är 0.0001 till 0.02 av lutningen under den inledande elastiska fasen. Materialet erhåller under denna fas en permanent förlängning som inte återhämtas vid avlastning. I normalfallet ser en dragprovkurva ut som i fig. 13a men för exempelvis mjukt stål, fig. 13b uppvisar kurvan en serie plötsliga spänningsvariationer vid begynnande olinjär eller plastisk deformation.

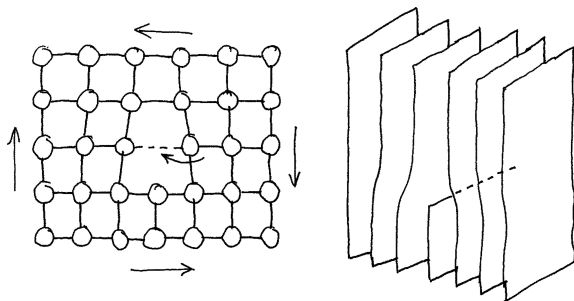
Dislokationer är en kristallin defekt, som studeras i fast tillståndets fysik. Fig. 14 visar en kantdislokation. Den plastiska deformationen är kopplad till rörelse hos dessa dislokationer och förekomst av kol eller andra föroreningar i metallen som förhindrar initiering av dislokationsrörelserna och ger därför en temporärt förhöjd spänning (se Fig. 13b). Efterhand som plasticiteten sprider sig i provstaven försvinner de plötsliga spänningsvariationerna. Plastisk deformation som sker genom dislokationsrörelse försiggår utan att materialets volym ändras.

Linjärt elastiskt material

I dragprovets linjära del, dvs. för spänningar under sträckgränsen, råder proportionalitet mellan spänningar och töjningar. Om vi inför ett rätvinkligt koordinatsystem (x, y, z) med x -axeln utefter provstavens axel blir normalspänningen i ett snitt vinkelrätt mot x -axeln σ_x , i ett snitt vinkelrätt mot y -axeln σ_y och i ett snitt vinkelrätt mot z -axeln σ_z . Normaltöjningarna i motsvarande riktningar är ϵ_x , ϵ_y och ϵ_z .

Följande samband gäller för isotropa linjära elastiska material vid enaxlig belastning i x -led

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \sigma_x / E, \\ \epsilon_y &= \epsilon_z = -\nu \sigma_x / E,\end{aligned}\tag{54}$$



Figur 14: Två bilder av en kristallstruktur med en dislokation. I a) visas skjuvspänningar på delens fyra sidor. Om skjuvspänningen är tillräckligt stor kommer en atom förflytta sig i den krökta pilens riktning och bilda ett intakt atomplan med det trunkerade inklämda atomplanet vilket gör att dislokationen förskjutits åt höger. För varje dislokation som passerar genom kristallen från vänster till höger förflyttas kristallens övre del ett atomplan åt vänster. Fig. b) visar de involverade atomplanen.

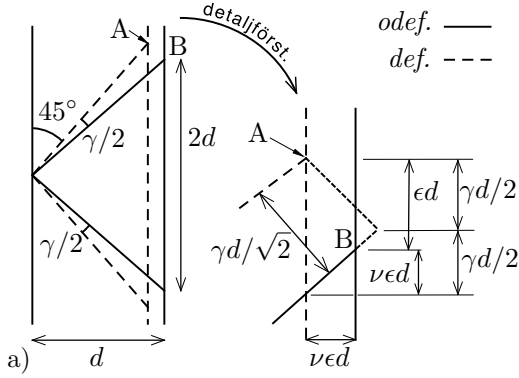
där ν är Poissons tal, eller tvärkontraktionstalet. Isotrop betyder att materialets egenskaper är lika i alla riktningar. Töjningar ϵ_x erhålls från provstavens längdändring och ϵ_y och ϵ_z erhålls från den uppmätta diameterminskningen som sker under dragprovet. Med känd belastning i x -led kan elasticitetsmodulen, E , och Poissons tal ν beräknas enligt (54).

Vidare råder proportionalitet mellan skjuvning och skjuvtöjning enligt

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G, \quad (55)$$

där G benämns skjuvmodulen. Även denna kan mätas upp vid ett särskilt prov men den kan även beräknas från elasticitetsmodulen och Poissons tal så som visas under nästa rubrik. Elastiska materialdata hittar man t ex via wikipedia. Det kan vara bra att veta att elasticitetsmodulen heter "modulus of elasticity" alternativt Young's modulus på engelska och Poissons tal går under benämningen "Poisson's ratio" på samma språk. På svenska kallas Poissons tal ibland tvärkontraktions-talet.

Genomförs ovanstående för enaxlig belastning i y - och z -riktningarna



Figur 15: a) Töjning och skjuvning vid enaxlig dragning. Den ursprungligen rätvinkliga triangelns spetsiga hörn är 45° (heldragen). b) betraktelse av den i a) inringade delen

erhålls sambandet mellan spänningar och töjningar genom superposition av resultatet som beskrivs med (54). Det ger Hookes på generaliserad lag:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z), & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz}, \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_x), & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G}\tau_{xz}, \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E}\sigma_z - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y), & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}. \end{aligned} \quad (56)$$

Alternativt kan spänningar uttryckas som funktion av töjningar som erhålls efter invertering av (56) enligt,

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_x + \nu(\epsilon_y + \epsilon_z)], & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_y + \nu(\epsilon_z + \epsilon_x)], & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz}, \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_z + \nu(\epsilon_x + \epsilon_y)], & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (57)$$

Skjuvmodulen ges av $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$. En härledning av sambandet ges i nästa avsnitt,

Samband mellan G , E och ν

En längdändring av hypotenusan enligt fig. 15 kan skrivas med hjälp

av den enaxliga dragningens töjningar och med hjälp av skjuvning som infaller 45° mot dragriktningen. Det framgår av figuren att

$$2\left(\frac{\gamma}{2}d\right) = \epsilon d + \nu \epsilon d, \quad (58)$$

vilket ger

$$\gamma = \epsilon(1 + \nu), \quad (59)$$

med beteckningar enligt fig. 15. Vid enaxlig dragning gäller enligt (56) att $\sigma = E\epsilon$ och $\tau = G\gamma$. Vidare enligt (45) gäller att $\sigma = 2\tau$ där σ är dragspänningen och τ är skjuvspänningen i ett plan med normalriktning i 45° mot dragriktningen, dvs. den maximala dragspänningen. Det ger,

$$\frac{\tau}{G} = \frac{\sigma}{E}(1 + \nu) = \frac{2\tau}{E}(1 + \nu), \quad (60)$$

Härur identifieras sambandet

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (61)$$

Trots att alla tre materialparametrarna E , ν och G används tillsammans är således antalet oberoende elastiska konstanter endast två för ett isotropt linjärt elastiskt material på grund av sambandet (61). Som alternativ till E , ν och G används ibland den sk. bulkmodulen K och Lamés konstanter (eng. Lamé parameters), μ och λ . Endast två är oberoende och elastisk analys kan baseras på ett godtyckligt par av de nämnda parametrarna utom paret G och μ eftersom dessa är identiska ($G = \mu$)

Plan spänning, plan deformation, enaxlig spänning.

Det allmänna spänningstillståndet i tre dimensioner kan ofta approximeras som två dimensionella tillstånd. Ett sådant är plan spänning som bland annat uppträder i närheten av obelastade ytor. Tillståndet kännetecknas av att

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad (62)$$

där koordinatsystemet är valt så att tillståndets plan är x - y planet. Kravet (62) gör att ϵ_z kan elimineras från Hookes lag som förenklas till,

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), & \sigma_x &= \frac{E}{(1-\nu^2)}[\epsilon_x + \nu\epsilon_y], \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) & \text{och} & \quad \sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}[\epsilon_y + \nu\epsilon_x], \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (63)$$

Ett annat plant tillstånd är plan deformation som uppträder när stora variationer av spänningarna i planet är så stora att motsvarande variationer av töjningar tvärs planet inte tillåts av geometriska skäl. Tvärkontraktion och skjuvning tvärs planet förhindras. Frånvaron av dessa töjningar gör att spänningarna i planet ökar. Sådana situationer uppstår t.ex. i närheten av spänningskoncentrationer som exempelvis i området runt koncentrerade krafter, sprickspetsar och dislokationer. Tillståndet kännetecknas av att

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad w = 0 \quad (64)$$

vilket enligt (11) medför att

$$\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \quad (65)$$

Nu kan σ_z kan elimineras från Hookes lag som i detta fall förenklas till,

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1-\nu^2}{E}\left[\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right], & \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\epsilon_x + \nu\epsilon_y], \\ \epsilon_y &= \frac{1-\nu^2}{E}\left[\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x\right] & \text{och} & \quad \sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\epsilon_y + \nu\epsilon_x], \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}. & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (66)$$

I bland kan spännings- och töjningstillståndet med god approximation antas vara enaxligt. Det leder till ytterligare förenklingar. Sålunda medför enaxlig spänning att

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (67)$$

Som vi sett förut reduceras Hookes lag till $\sigma_x = E\varepsilon_x$. Det är viktigt att observera att enaxlig spänning och enaxlig töjning är olika tillstånd. Enaxlig töjning medför att

$$\epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \quad (68)$$

Direkt från (66) får man $\sigma_x = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_x$. Nämnaren i sambandet mellan spänning och töjning begränsar Poissons tal till $-1 < \nu < 1/2$. Material vars Poissons tal närmar sig den undre eller den övre gränsen närmar sig ett material som är omöjligt att deformera. Material med Poissons tal utanför gränserna uppfyller inte termodynamikens lagar. Sådana material existerar inte i sinnevärden.

Begränsning till plana fall underlättar spänningsanalysen, genom att allmänna lösningar kan formuleras som tre eller fyra oberoende harmoniska funktioner, dvs. lösningar till Laplaces ekvation (se exempelvis Y. C. Fung, *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, 1965). Exakta analytiska lösningar ger flera fördelar bl.a. för att man får en direkt förståelse för hur och i vilka kombinationer olika parametrar från last, geometri och material påverkar resultatet. Vidare är det alltid i alla typer av numeriska beräkningar nödvändigt att kontrollera resultatet med hjälp av analytiska resultat för förenklade geometrier eller förenklade materialmodeller. När det gäller asymptotiska analyser för exempelvis ett område nära en spricka, dislokation eller t.ex. vid övergångar mellan olika randvillkor är analytiska metoder oslagbara och det är ofta möjligt att finna asymptotiskt korrekta lösningar.

Exempel

I ett stag AB har en förspänning uppkommit efter nedkylning. Spänningen betecknas σ_o . På avståndet L_1 från övre änden på staget angriper en kraft P i riktning mot B. Vid vilket värde på P blir stagets undre del spänningslös?

Lösning: Den övre stängen dragbelastas av en okänd kraft S_1 . För att mittpunkten skall vara i jämvikt måste den nedre stängen belastas av dragkraften $S_1 - P$.

Kraften S_1 kan inte bestämmas enbart med hjälp av jämviktssamband. Det krävs ett deformationssamband vilket i det föreliggande fallet gäller mittpunktens förskjutning. På grund av infästningarna A och B måste den övre stängens förlängning vara så mycket som den undre stängen förkortas. Förlängningen δ av den övre stängen ges av (FS:22)

$$\delta = \frac{S_1 L_1}{EA},$$

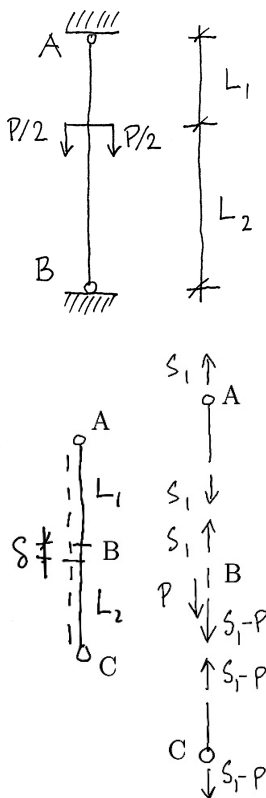
och den undre stängen trycks följaktligen ihop $-\delta$ vilket ges av

$$-\delta = \frac{(S_1 - P)L_2}{EA}.$$

Annulering av δ ger sambandet

$$S_1 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} P. \quad (69)$$

Innan lasten läggs dit är, enligt uppgift, spänningen i den undre stängen σ_o . Lasten ensam måste därför åstadkomma en lika stor tryckspän-



ning för att den undre stången skall bli spänningsfri, dvs.

$$\frac{S_1 - P}{A} = -\sigma_o$$

Insättning av (69) ger

$$-\sigma_o = \frac{P}{A} \left(\frac{L_2}{L_1 + L_2} - 1 \right).$$

Om kraften är minst $P = \sigma_o A (1 + \frac{L_2}{L_1})$ blir det undre staget obelastat.

Repetitionsfrågor: Linjär elasticitet och plasticitet

1. Vad är Poissons tal (ν) ett uttryck för?
 2. Hur stort och hur litet kan det vara i ett isotropt material i teorin och i praktiken?
 3. Vilka elastiska konstanter behövs för att beskriva ett linjärt, isotropt, elastiskt material?
 4. Vilka oberoende par duger som materialparametrar vid elastisk analys av isotropa material (E , ν , G , K , μ och λ)?
 5. Var gäller plant spänningstillstånd och plant töjningstillstånd avseende spännings och töjningsambanden?
 6. Vad kan sägas om huvudspänningssnitten i en vätska?
 7. Vad är en dislokation, vilken typ av deformation kan den upphov till?
 8. Hur sker denna deformation?
 9. Vad skiljer elastisk deformation från och plastisk deformation?
 10. Hur påverkas volymen vid plastisk deformation?
-

Viscoelasticitet.

Den linjära elasticitetsteorin kan inte tillämpas på problem med stora elastiska töjningar eller material som påverkas av hastigheten med vilken töjningarna uppstår. Den klassiska teorin för linjär elasticitet behandlar beteendet hos elastiska fasta material som erhåller små töjningar. Spänningen är direkt proportionell mot töjningen men obe-

roende hur snabbt belastningen applicerades, och töjningen återvinns helt när belastningen tas bort. Material som kan studeras med hjälp av klassisk linjär elastisk teori kallas linjära elastiska material. För sådana material är det linjära förhållandet mellan spänning och töjning endast giltigt i ett visst töjningsintervall. För ett stort antal fasta material är sambandet mellan spänning och töjning olinjärt även för små påkänningar.

Skälet till att den linjära teorin haft framgångar är att generella konstruktionsmaterial tål stora belastningar innan de uppvisar antingen plastisk deformation eller spricker. Emellertid har exempelvis polymera material ett olinjärt elastiskt beteende över ett långt bredare spektrum och den utbredda användningen av naturgummi och liknande material motiverar att man beaktar stora töjningar, töjningshastighetsberoende och olinjära material.

Wilhelm Weber observerade 1835 att en belastad silkestråd inte bara gav en omedelbar förlängning, utan även att förlängningen vid bibehållen belastning ökade med tiden. Den här typen av viskoelastisk respons är särskilt märkbar i polymera fasta material men förekommer mer eller mindre i alla typer av material. I allmänhet om materialet återtar sin ursprungliga konfiguration betecknas materialuppförandet som viskoelastiskt, men beteckningen används också i fall där den ursprungliga konfigurationen inte helt återtas. Bland dem som haft stort inflytande på utvecklingen av en viskoelastisk teori kan Green, Piola och Kirchhoff nämnas. I slutet av 1800-talet utvecklade Ludwig Boltzmann en bärande teori för linjära viskoelastiska material. Benämningen "linjära" motiveras av att teorin medger att deformationshistorien beräknas som den summerade effekten av små stegvisa förändringar av belastningen som skett under passerad tid. En större förståelse för de fysiska effekterna av olinjärt materialuppförande tillämpade på enkla problem som vridning och böjning, skapades av den brittisk-amerikanske ingenjören och matematikern Rivlin på 1940- och 1950-talet.

För visko-elastiska material vid enaxlig belastning ges ett samband mellan töjning ε och spänning σ och deras tidsderivator $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\sigma}$, $\ddot{\varepsilon}$, $\ddot{\sigma}$ etc. Enkla element som kan inkluderas i en viskoelastisk modell är linjär elasticitet (fig. 16a)

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (70)$$

där E är en elastisk modul och linjär viskositet (fig. 16b)

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon}, \quad (71)$$

där η är en viskositetsparameter. Modellerna används i kombination för att simulera mer komplicerade konstitutiva samband. Bland dessa kan nämnas Kelvin eller Voigtmaterial med en viskös del parallellt med en elastisk del (se fig. 17a) för vilket

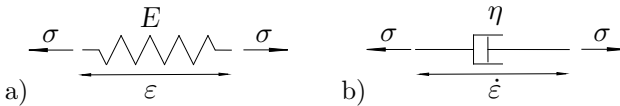
$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} + E \epsilon, \quad (72)$$

och Maxwellmaterial som består av en viskös del som är i serie med en elastisk del (se fig. 18b)

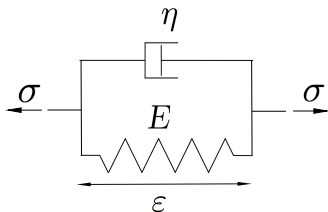
$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}. \quad (73)$$

Genom att kombinera olika element parallellt eller i serie uppkommer en stor variation av materialsamband som involverar högre tidsderivator än i (72) och (73). Det gör det möjligt att modellera många olika material. Man kan se att Maxwellmaterialet beskriver en krypeffekt dvs det som Weber observerat för silkestrådar. Magic Putty (en polymeriserad silikongel som de flesta stiftat bekantskap med som barn) samt glas och stål vid höga temperaturer är exempel på andra material som uppvisar krypbeteende och sk efterelastiskt beteende som Kelvin-Voigt material. Det är en vanlig missuppfattning att glas som är amorft kryper när det belastas av enbart gravitationen och att deformationen blir märkbar under en tidsperiod på några hundra år. På så sätt skulle antika fönsters nedre del skulle vara mätbart tjockare än de övre delarna. Sanningen är att glas inte deformeras märkbart ens i tidskalor av storleksordningen jordens ålder.

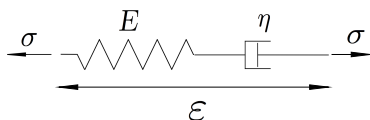
Viskoelastiska material är dissipativa vilket betyder att all rörel-



Figur 16: a) Elastiskt element, b) visköst element



Figur 17: Kelvin-Voigt material

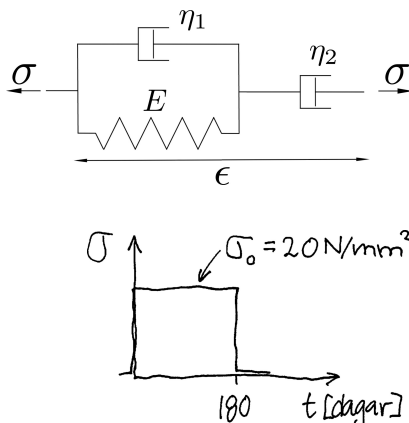


Figur 18: Maxwellmaterial

se avstannar om inte energi tillförs utifrån. Snabbast avstannar rörelser som representeras av den konstitutiva differentialekvationen termer med höga tidsderivation. I många fall begränsas intresset till fortvarighetstillstånd som då kan förenklas genom att man endast beaktar termer med lägst tidsderivator, inklusive oderiverade termer.

Exempel

1. Materialbeteendet hos en stång är påfallande olinjärt. Man har funnit att den reologiska modellen i figuren ger en godtagbar beskrivning med materialkonstanterna är $E = 16000 \text{ N/mm}^2$, $\eta_1 = 16 \cdot 10^{10} \text{ Ns/mm}^2$ och $\eta_2 = 1 \cdot 10^{11} \text{ Ns/mm}^2$. Stången belastas av en konstant spänning enligt diagrammet. Hur stor förutsägs den kvarvarande töjningen i stången vara när lång tid förflutit?



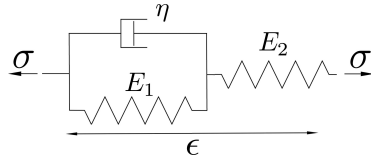
Lösning: Under tiden som lasten ligger på ökar töjningen ϵ_2 i den viskösa delen η_2 . Denna töjning påverkas inte av avlastningen. Töjningen i den parallellkopplade delen ökar under belastningsintervallet men den återgår när lasten avlägsnas. Det gäller att $\sigma = \eta_2 \dot{\epsilon}_2$ (FS:18) vilket ger

$$\epsilon_2 = \frac{\sigma}{\eta_2} \tau,$$

där $\sigma = 20 \text{ N/mm}^2$ och $\tau = 180 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}$ dvs

$$\epsilon_2 = \frac{20}{1 \cdot 10^{11}} 180 \cdot 24 \cdot 3600 = 0.0311.$$

2. Ett rör av ett material som används vid förhöjd temperatur har egenskaper, som beskrivs av materialmodellen i figuren, där $E_1 = 350 \text{ kN/mm}^2$, $E_2 = 195 \text{ kN/mm}^2$ och $\eta = 3 \cdot 10^{13} \text{ Ns/mm}^2$. Rören har en tvärsnittsarea på 1000 mm^2 .



Till vilken kraft måste man förspänna bultarna för att dragkraften i dem efter 2 år inte skall understiga 150 kN ? Man kan anta att underlaget, som bultarna spänns emot, är styvt och att alltså bultarnas deformation ej förändras under de två åren.

Lösning: Töjningen delas mellan den parallellkopplade delen och ett ensamt elastiskt element. Ett visköst och ett elastiskt element tar upp spänningarna σ_1 och σ_2 så att $\sigma_1 = \eta \dot{\epsilon}_1$ och $\sigma_2 = E \epsilon_1$. För det ensamma elastiska elementet gäller att $\sigma = E \epsilon_2$ (se FS:17 och 18). Det gäller även att $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ och $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$. Den första ekvationen ger $\sigma = \eta \dot{\epsilon}_1 + E_1 \epsilon_1 = \eta(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_2) + E_1(\epsilon - \epsilon_2)$
 $= \eta(\dot{\epsilon} - \dot{\sigma}/E_2) + E_1(\epsilon - \sigma/E_2)$ vilket efter uppsnyggning ger

$$\dot{\sigma} + \frac{E_2 + E_1}{\eta} \sigma = E_2 \dot{\epsilon} + \frac{E_1 E_2}{\eta} \epsilon.$$

Låt Laplacetransformen av spänningarna $\sigma(t)$ vara $\mathbb{S}(s) = \mathcal{L}\{\sigma\}(s)$ och dito av töjningarna $\epsilon(t)$ vara $\mathbb{E}(s) = \mathcal{L}\{\epsilon\}(s)$. Differentialekvationen i Laplacetransformerad form skrivs då

$$s\mathbb{S}(s) - \sigma(0) + \frac{E_1 + E_2}{\eta}\mathbb{S}(s) = E_2[s\mathbb{E}(s) - \epsilon(0)] + \frac{E_1 E_2}{\eta}\mathbb{E}(s),$$

se tabell i FS. Om vi löser ut $\mathbb{E}(s)$ och beaktar att $\sigma(0) = 0$ och $\epsilon(0) = 0$ erhålls

$$\mathbb{E}(s) = \frac{1}{E_2} \frac{\eta s + E_1 + E_2}{\eta s + E_1} \mathbb{S}(s)$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\mathbb{S}(s) = \frac{\eta s + E_1}{\eta s + E_1 + E_2} \frac{E_2 \epsilon_o}{s} = \left(\frac{\eta s + E_1 + E_2}{\eta s + E_1 + E_2} - \frac{E_2}{\eta s + E_1 + E_2} \right) \times$$

$$\times \frac{E_2 \epsilon_o}{s} = E_2 \epsilon_o \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s} \frac{E_2}{\eta s + E_1 + E_2} \right) =$$

$$= \frac{E_1 E_2 \epsilon_o}{E_1 + E_2} \left(\frac{1}{s} + \frac{E_2}{E_1} \frac{1}{s + (E_1 + E_2)/\eta} \right)$$

I transformtabellerna hittar vi stegfunktionen $H(t - \tau)$ med Laplacetransformen $\exp(-\tau s)/s$. Väljer vi $\tau = 0$ får vi $\mathbb{E}(s) = \epsilon_o/s$, där ϵ_o är initieell töjning som läggs på vid $t = 0$. Följande erhålls

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s + E_1/\eta} = \exp(-tE_1/\eta)H(t)$$

och även

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s} = H(t)$$

Vilket direkt ger den resulterande spänningen

$$\sigma(t) = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \epsilon_o \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \exp(-t(E_1 + E_2)/\eta) \right) H(t)$$

Vid tiden $t=0$ gäller att $\sigma(0) = E_2 \epsilon(0) = E_2 \epsilon_o$ (FS:17). Sätt $\sigma(0) = \sigma_o$, minsta tillåtna spänning efter $t_o = 2$ år sätt till σ_{min} . Vi får

$$\sigma_o = \frac{(E_1 + E_2) \sigma_{min}}{E_1 + E_2 \exp(-t_o(E_1 + E_2)/\eta)} = 198 \text{ N/mm}^2.$$

Kraften blir σ_o ggr tvärsnittsytan $A = 1000 \text{ mm}^2$ dvs bultarna måste förspännas med kraften 198 kN.

Repetitionsfrågor: Viskoelasticitet

1. Vad är ett viskolelastiskt material?
2. Vad kan sägas om huvudspänningssnitten i en vätska?
3. Hur konstrueras en differentialekvation för en materialmodell som består av viskösa och elastiska element?
4. Hur behandlas diskontinuerliga spänningar och töjningar?
5. Vilken roll spelar då högre derivator?
6. Repetera hur man finner partikulärlösningar för några vanliga "högerled", t.ex. t , t^2 , $H(t)$, där t är tiden
7. Vilken roll spelar flerfaldigt tidsderiverade termer för fortvarighets-tillstånd?

4 TILLÄMPNINGAR

1700 och 1800-talen var en period då många grundläggande elastiska lösningar togs fram och användes för att förklara observerade fenomen och fick tekniska tillämpningar. Enaxlig dragning klarades av Jacob Bernoulli i en uppsats från 1705.

I samma uppsats föreslog han att krökningen av en balk var proportionell mot böjmomentet. Efter förarbeten av Jacobs bror Johan Bernoulli och Charles Augustin de Coulomb presenterade under mitten av 1700-talet, Johan Bernoullis student Leohardt Euler och Johans son Daniel Bernoulli flera analyser av svängande balkar, instabilitet hos strävor mm.

Efter att Augustin Louis Cauchy i mitten av 1800-talet formulerade en elasticitetsteori så som vi känner den i dag fick vridning en adekvat behandling av Jean Claude Barré de Saint-Venant.

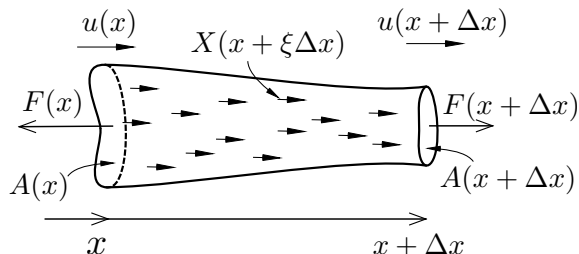
Enaxlig dragning

Figur 19 visar en slank stång med måttligt varierande tvärsnitt. Krafter som sträcker stängen är applicerade i ändtvärsnittens tyngdpunkter. Krafterna är riktade vinkelrät mot tvärsnittet. Tvärsnittsytans linjära dimension antas vara liten i förhållande till stångens längd så att det kan antas att spänningarna i praktiken är konstanta i tvärsnittet. Att tvärsnittsytan $A(x)$ varierar längs stängen påverkar de axiella spänningarna. Eftersom kraftjämvikten i stångens riktning, i x -led, måste upprätthållas erhålls följande samband,

$$\sigma(x + \Delta x)A(x + \Delta x) - \sigma(x)A(x) + X(x + \xi\Delta x)\Delta x = 0, \quad (74)$$

där $X(x)$ är kroppskraft per längdenhet. Värdet på ξ är okänt men är i intervallet $0 \leq \xi \leq 1$. Beräkning av gränsvärdet för infinitesimalt Δx ger

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sigma(x + \Delta x)A(x + \Delta x) - \sigma(x)A(x)}{\Delta x} + X(x + \xi\Delta x) &= \\ &= \frac{d}{dx}[\sigma(x)A(x)] + X(x) = 0. \end{aligned} \quad (75)$$



Figur 19: Enaxlig spänning i stång med längden Δx och varierande tvärsnitt. Stången belastas av ändkrafter $F(x)$ och yttre masskrafter $X(x)$. Förskjutning i x -led är $u(x)$.

Tillämpning av Hookes lag samt eliminering av ϵ_x enligt (11) ger

$$\frac{d}{dx}[E(x)A(x)\frac{d}{dx}u(x)] + X(x) = 0, \quad (76)$$

Vid frånvaro av kroppskrafter ($X = 0$) erhålls

$$\frac{d}{dx}EA\frac{du}{dx} = 0, \quad (77)$$

och efter integrering erhålls

$$EA\frac{du}{dx} = c_1, \quad (78)$$

där konstanten c_1 uppenbarligen är identisk med den belastande kraften F . För en stång, där stångens sträcker sig från $x = a$ till $x = b$, får man

$$u(x) = F \int_a^x \frac{1}{EA} dx, \quad \text{där } a < x \leq b. \quad (79)$$

Om material och tvärsnitt är konstanta längs stången erhålls som tidigare

$$u(x) = u(a) + \frac{F}{EA}(x - a) \quad \text{där } a < x \leq b \quad (80)$$

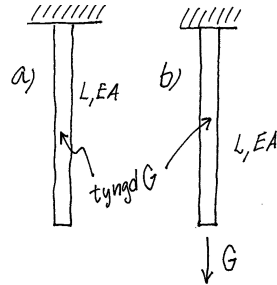
Uppenbarligen är förskjutningarna linjära funktioner av x om tvärsnitt och materialegenskaper är konstanta vilket ofta är fallet. Stångens totala förlängning δ blir då

$$\delta = \frac{FL}{EA}, \quad (81)$$

där $\delta = u(b) - u(a)$ och $L = b - a$.

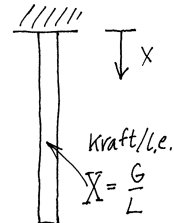
Exempel

1 En jämntjock stång med längden L , arean A , elasticitetsmodulen E och tyngden G är fäst i ett tak enligt figur. Vad blir dess förlängning a) under den egna tyngden b) under inverkan av egna tyngden jämte en yttre kraft G i fria änden så som figuren visar?



Lösning: Kraft per längdenhet är $X = G/L$. Differentialekvationen för enaxlig dragning (FS:21) ger då

$$\frac{d}{dx} \left\{ EA \frac{du}{dx} \right\} + \frac{G}{L} = 0, \quad (82)$$



med randvillkoren ges av att övre änden är fast och den undre änden är obelastad. Randvillkoren formuleras för $u = u(x)$. För fall a) innebär det att

$$u(0) = 0 \quad \text{och} \quad \sigma(L) = Eu'(L) = 0, \quad (83)$$

där $\sigma(x)$ är spänningen i tvärsnittet på avståndet x från infästningen. För fall b) är belastningen i den undre änden det som ges av den

yttre kraften G , dvs. följande

$$u(0) = 0 \quad \text{och} \quad \sigma(L) = E\epsilon(L) = Eu'(L) = \frac{G}{A}, \quad (84)$$

Integrering två gånger av (82) ger först

$$u'(x) = -\frac{G}{LEA}x + C_1$$

och sedan

$$u = -\frac{G}{LEA} \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$$

Randvillkoren för fall a) ger

$$C_1 = \frac{G}{EA} \quad \text{och} \quad C_2 = 0,$$

och för fall b)

$$C_1 = \frac{2G}{EA} \quad \text{och} \quad C_2 = 0.$$

Förskjutningen blir således

$$u = \frac{GL}{EA} \left(1 - \frac{x}{2L}\right) \frac{x}{L} \quad \text{fall a)}$$

och

$$u = \frac{GL}{EA} \left(2 - \frac{x}{2L}\right) \frac{x}{L} \quad \text{fall b)}.$$

I den nedre änden får vi förskjutningen (jfr. FS:22)

$$u = \frac{GL}{2EA} \quad \text{för fall a)} \quad \text{och} \quad u = \frac{3GL}{2EA} \quad \text{för fall b)}.$$

Repetitionsfrågor: Enaxlig dragning

1. Vad $X(x)$ i den differentialekvationen för enaxlig dragning? Ange även dimension.
 2. Ange $X(x)$ om kroppskraften är ρg , där ρ är materialets densitet och g är gravitationskonstanten.
 3. Vad är randvillkoret vi fast inspänning?
 4. Vilket fysikalisk storhet anges av derivatan $u'(x)$ t ex i änden av en stång som belastas av en kraft F ?
-

Vridning

Vridning avser att ett föremål vrids på grund av ett pålagt yttre vridande moment som belastar tvärsnitt som är vinkelräta mot vridmomentets axel. För axlar med likformig cirkulär tvärsektion eller ihåliga cirkulära axlar med konstant väggjocklek uppstår skjuvspänning för att materialet motsätter sig vridningen. Skjuvspänningen är vinkelrät mot Ortsvektorn som utgår från ett vridningscentrum. Projektionen av tvärsnittet på ett plan som är vinkelrät mot vridningsaxeln är konstant.

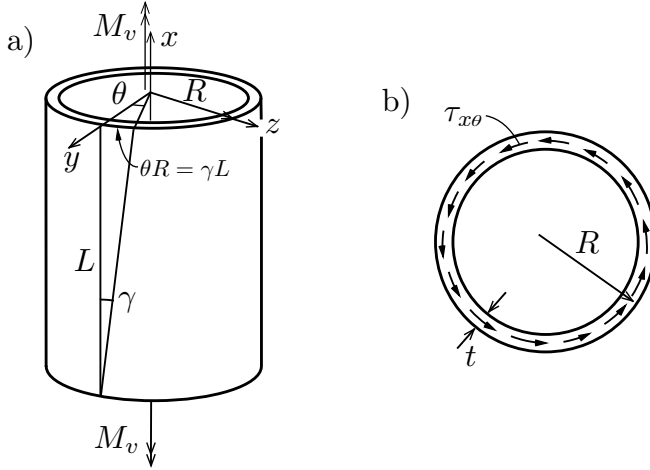
För icke-cirkulära tvärsnitt kompliceras analysen av att tvärsnitten välvs under vridningen. de Saint-Venant var den som lyckades förklara betydelsen de förskjutningar av tvärsnittet som leder till välvningen. Det som följer här är resultat för allmänna cylindrar med konstant väggjocklek samt några speciella fall som baseras på Saint-Venants teori för vridning av axlar med allmänna tvärsnitt.

För en vriden cylinder (se fig. 20a) gäller enligt figuren följande samband mellan skjuvningen γ i mantelytan och vridningsvinkeln θ ,

$$\gamma L = \theta r, \quad (85)$$

där L är cylinderns längd och r är dess radie. I ett tunnväggig cylinder med väggjockleken t (se fig. 20b) är skjuvningen i hela cylindern konstant och de skjuvspänningar τ som verkar i tvärsnittet ges av Hookes lag, $\tau = G\gamma$, där G är skjuvmodulen enligt (56). Man kan se i fig. 20 att det för jämvikt krävs att

$$M_v = rA\tau, \quad (86)$$



Figur 20: a) Vridning av en tunnväggig cylinder. Bilden visar sambandet mellan skjuvningen γ och vridningen θ . b) Skjuvspänningar i ett tvärsnitt.

där M_v är det applicerade momentet, r är cylinderns radie och $A = 2\pi r t$ är tvärsnittsytan. Radien r är här hävarm för kraften som ges av $A\tau$. Det ger momentet

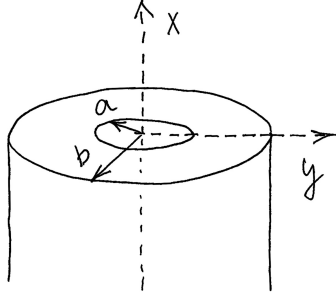
$$M_v = 2\pi r^2 t \tau, \quad (87)$$

Insättning av $\tau = G\gamma$ i (85) och (87) ger förvridningen av cylindern enligt

$$\theta = \frac{M_v L}{G 2\pi r^3 t}. \quad (88)$$

Tvärsnittets geometriska parametrar i ekv. (87) och (88) samlas i två generella parametrar, som benämns tvärsnittets vridmotstånd W_v och vridstyvhets tvärsnittsfaktor K . Den senare är identisk med det polära yttröghetsmomentet som vi känner från statik, dynamik, elektromagnetisk fältteori, etc. Ekvationerna (87) och (88) kan generellt skrivas

$$\tau_{max} = \frac{M_v}{W_v}, \quad (89)$$



Figur 21: Geometri för en tjockväggig cylinder

och

$$\theta = \frac{M_v L}{GK}, \quad (90)$$

om vi för tunnväggiga cylindrar sätter

$$W_v = 2\pi r^2 t = \frac{1}{2} \pi d^2 t, \quad (91)$$

och

$$K = 2\pi r^3 t = \frac{1}{4} \pi r d^3 t, \quad (92)$$

där $d = 2r$ är cylinderns diameter. Produkten GK som samlar tvärsnittsgeometri och material kallas stängens vridstyvhet.

Lösningen för tunnväggiga cylindrar utnyttjas nu för härledning av ett resultat för tjockväggiga cylindrar. En tjockväggig cylinder (fig. 21) kan ses som ett en mängd koncentrisk tunnväggiga cylindrar. Man inser att en sådan mängd som helt fyller den tjockväggiga cylinderns volym uppfyller jämvikt och ger kontinuerliga förskjutningar över allt om ändtvärsnitten förvrids samma vinkel.

Bidraget till momentet från en del med tjockleken Δr och radien r är enligt (88),

$$\Delta M_v = \frac{\theta G}{L} 2\pi r^3 \Delta r, \quad (93)$$

Där τ är skjuvspänningen. Ser man bidraget från den ringformiga delen som infinitesimalt och integrerar över hela tvärsnittet får man

$$M_v = \frac{\theta G}{L} 2\pi \int_a^b r^3 dr = \frac{\theta G}{L} \frac{\pi}{2} (a^4 - b^4), \quad (94)$$

där a är cylinderns innerdiameter och b dess ytterdiameter. Ekv. (94) är ekvivalent med ekv (88) förutsatt att vridstyvhetsens tvärsnittsfaktor skrivs

$$K = \frac{\pi}{2} (a^4 - b^4) = \frac{\pi}{32} (d^4 - D^4), \quad (95)$$

där d och D är cylinderns inner- respektive ytterdiameter. Den största skjuvspänning, τ_{max} , som uppnås i den tjockväggig cylindern erhålls via (85) och (56). Kopplingen mellan τ och θ gert tjockväggiga cylinderns vridmotstånd W_v enligt

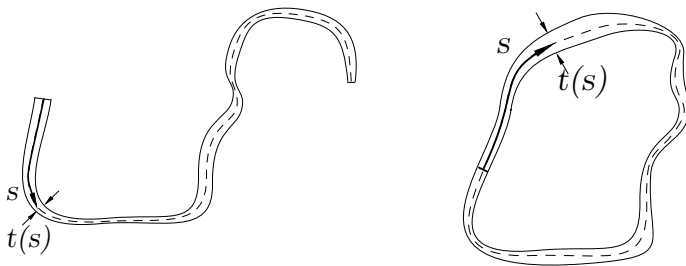
$$W_v = \frac{\pi}{2b} (a^4 - b^4) = \frac{\pi}{16D} (d^4 - D^4). \quad (96)$$

Vridstyvhetsens tvärsnittsfaktor är identisk med det polära yttröghetsmomentet enbart för cylindriska rör. För andra tvärsnittssektioner måste K bestämmas på annat sätt. För tunnväggiga cylindrar av godtycklig form kan man använda något som kallas skjuvflödesapproximationen. Vi går inte in närmare på härledningen av resultatet med kan konstatera att det är asymptotiskt korrekt när vägg tjockleken går mot noll. För sammansatta strimlor med konstanta tjocklekar t_i och längderna s_i beräknas K som en summa

$$K = \frac{1}{3} \sum t_i^3 s_i, \quad (97)$$

Summeringen utförs för alla strimlor. Enkelt sammanhängande tunnväggiga tvärsnitt med kontinuerligt varierande vägg tjocklek, $t(s)$, där s är en koordinat längs vägen (se fig. 22a), är

$$K = \frac{1}{3} \int t^3(s) ds, \quad (98)$$



Figur 22: a) Allmän enkelt sammanhängande sektion, b) dito hålsektion.

Vridmotståndet är i båda fallen (97) och (98)

$$W_v = K/t_{max} . \quad (99)$$

Här är t_{max} är den största förekommande vägg tjockleken.

En tunnväggig hålsektion som består av strimlor med konstanta tjocklekar t_i och respektive längder s_i har vristvhetens tvärsnittsfaktor

$$K = 4A^2 / \left[\sum (s_i/t_i) \right] . \quad (100)$$

Hålsektioner med kontinuerligt varierande vägg tjocklek $t(s)$ enligt fig. 22b ges av

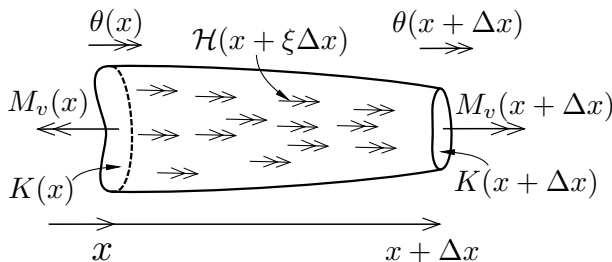
$$K = 4A^2 / \left[\oint (1/t(s)) ds \right] = 4A^2 / \left[\oint \frac{ds}{t(s)} \right] . \quad (101)$$

Symbolen $\oint$ betyder att integrationen företas längs koordinaten s , utmed hålsektions alla delar. Hålets yta är A . Vridmotståndet är i båda fallen

$$W_v = 2At_{min} , \quad (102)$$

där t_{min} är den minsta förekommande vägg tjockleken.

För de flesta allmänna tvärsnitt finns det inga kända exakta lösningar för W_v och K . Finita element analyser (FEA) kan då vara den bästa metoden för att beräkna de differentialekvationer som styr



Figur 23: En allmän axel som belastas av moment $M_v(x)$ och utbrett moment, $\mathcal{H}(x)$, fördelat längs stången. Vridstyvhets tvärsnittsfaktor $K = K(x)$ varierar längs axeln.

tvärsnittsvävningen och som måste beräknas för att tvärsnittsparametrarna skall kunna bestämmas.

En allmän lösning för en vriden stång med varierande tvärsnitt, varierande materialegenskaper och ett moment som är fördelat längs stången ges av ett differentialsamband enligt följande: Figur 23 visar ett kort segment Δx av en vriden axel. Axeln har ett varierande tvärsnitt med $K = K(x)$. Vidare antas segmentet vara belastat med ett vridande moment $M_v(x)$ och ett vridande moment per längdenhet, $\mathcal{H}(x)$, som är utbrett längs med stången. Då jämvikt råder gäller för moment i x -led

$$M_v(x + \Delta x) - M_v(x) + \mathcal{H}(x + \xi \Delta x) \Delta x = 0, \quad (103)$$

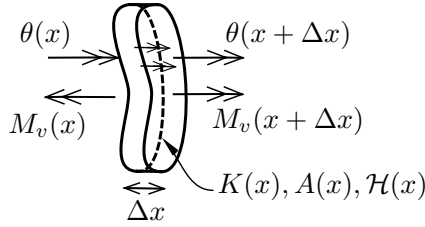
där $0 \leq \xi \leq 1$. Gränsvärdet för relationen (103) när Δx blir infinitesimal är

$$\frac{dM_v}{dx} + \mathcal{H}(x) = 0, \quad (104)$$

Förvridningen av ett kort segment med längden Δx (se fig. 24) ges av (23) och (90) som

$$\Delta \theta = \frac{M_v(x) \Delta x}{G(x) K(x)}, \quad (105)$$

vilket för infinitesimal längd efter insättning i (104) ger differentialekva-



Figur 24: Förvridning av ett kort axelsegment

tionen

$$\frac{d}{dx} \left(GK \frac{d\theta}{dx} \right) + \mathcal{H} = 0, \quad (106)$$

Notera att både belastning, material och tvärsnitt, dvs. G och K i det generella fallet är funktioner av x . Förvridning av en stång med längden L och moment, M_v , och $\mathcal{H} = 0$, är

$$\theta = M_v \int_L \frac{1}{G(x)K(x)} dx. \quad (107)$$

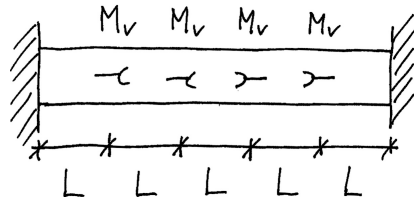
Exempel

1. Beräkna hur moment och tvärkraft varierar utefter stängen i figuren. Beräkna också maximala förvridningen från neutralläget, om

$\tau_{max} = 100 \text{ N/mm}^2$ och

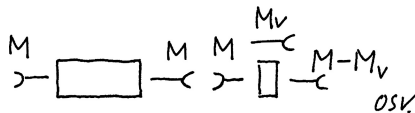
$L = 500 \text{ mm}$.

Stången, som är av stål, har cirkulärt tvärsnitt med diameterna $d = 30 \text{ mm}$.



Lösning: Stångens delar friläggs. Vid skarvarna där yttre moment appliceras friläggs ett kort segment som figuren visar. Det görs för att underlätta jämviktsberäkningen. Friläggninen visar att reaktionsmomenten i balkens ändar inte kan beräknas med hjälp av jämviktsekva-

tionerna.



Förutom att jämvikt gäller vet vi att ändarna inte vrids dvs den totala förvridningen av alla stångdelar är noll. Total förvridning är (FS:26)

$$\phi = \frac{L}{GK} [M + (M - M_v) + (M - 2M_v) + (M - M_v) + M] =$$

$$= \frac{L}{GK} (5M - 4M_v) = 0$$

$$\Rightarrow M = \frac{4}{5} M_v.$$

Stängerna är utsatta för momenten, $(4/5)M_v$, $-(1/5)M_v$, $-(6/5)M$, $-(1/5)M$ och $(4/5)M_v$ i tur och ordning från vänster till höger. Momenten är konstanta i delarna. Maximalt moment är $(6/5)M$. Alla delar har samma tvärsnitt så maximal skjuvspänning blir (FS:24)

$$\tau_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_v} = \frac{6M_v}{5W_v} \Rightarrow M_v = \frac{5}{6} \tau_{max} W_v.$$

Förvridningen av ges av momenten enligt följande

$$\Delta\phi_1 = \frac{ML}{GK} = \frac{4M_v L}{5GK} = \frac{4}{5} \phi_o,$$

där

$$\phi_o = \frac{M_v L}{GK}.$$

Vridningen varierar linjärt mellan snitten i figuren. I enlighet med momenten i respektive del blir nu förvridningarna av övriga delar $-(1/5)$, $-(6/5)$, $-(1/5)$ och $4/5$ av ϕ_o från vänster till höger. Total vinkel blir

summan av förvridningarna så att $\phi_1 = (4/5)\phi_o$, $\phi_2 = (3/5)\phi_o$, $\phi_3 = -(3/5)\phi_o$ och $\phi_4 = -(4/5)\phi_o$. I höger och vänster ände är vridningen noll.

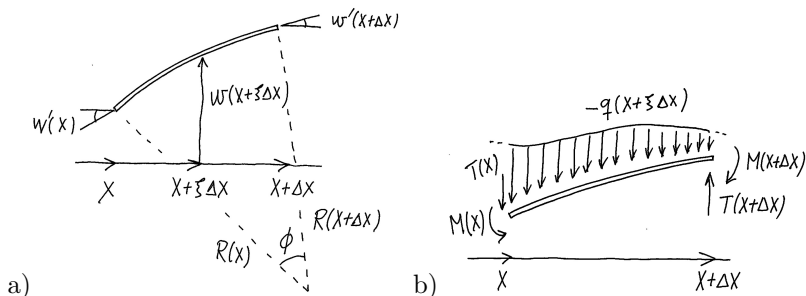
Repetitionsfrågor: Vridning

1. Vad gäller för skjuvspänningsfördelningen i ett tvär- resp. längdsnitt i ett tunnväggigt rör med cirkulärt tvärsnitt som vid vridning?
 2. Vad kallas och till vad används storheterna I , K , EI , GK och W_v , W_b ?
 3. Är formlerna för K och W för ett tunnväggigt rör specialfall av motsvarande för en allmänna tunnväggiga hålsektioner?
 4. Var i tvärsnittet uppträder största skjuvspänningen?
-

Euler-Bernoullis teori för balkböjning

En balk deformeras och spänningar utvecklas inuti den när en tvärgående belastning appliceras. I en horisontell balk fritt upplagd vid ändarna och belastad nedåt i mitten, blir materialet på översidan av balken komprimerat medan materialet på undersidan sträcks. Det uppstår två typer av inre spänningar som orsakas av tvärgående belastningar. Dessa är skjuvspänningar parallellt med den tvärgående belastningen plus skjuvspänningar på plan vinkelräta mot lastriktningen samt tryckspänningar i den övre delen av balken och dragspänningar i den undre delen av balken. De sista två belastningarna bildar ett motriktat par som är lika i storlek och motsatta i riktning. Paret utgör ett böjmoment som förhindrar ökad deformation vilket kännetecknar en balk som utsätts för böjning. Spänningsfördelningen i en balk kan förutsägas ganska exakt även när vissa förenklade antaganden används.

Enkel balkböjning analyseras vanligtvis med Euler-Bernoullis balkekvation. Villkoren för att teorin skall kunna användas är att 1) balken är föremål för ren böjning, vilket innebär att skjuvkraften är noll och att inga torsions- eller axiella belastningar förekommer, 2) materialet är isotropt, homogent, linjärt elastiskt och följer Hookes lag, 3) balken är initialt rak med ett tvärsnitt som är konstant över hela balkens längd samt, 4) för att undvika så kallad sned böjning, antas balkktvärsnittet vara symmetriskt med ett symmetriplan som sammanfaller med planet för böjningen.



Figur 25: Krökt balk med utbredd last $q(x)$ och snittstorheterna moment $M(x)$ och tvärkraft $T(x)$. $q(x)$ och förskjutningen $w(x)$ definieras som positiva i z -axelns riktning, dvs. uppåt i figuren. För ξ gäller att $0 \leq \xi \leq 1$.

I Euler-Bernoullis teori för slanka balkar är antagandet att "plana sektioner förblir plana" avgörande för analysen. Man tar således inte hänsyn till eventuell deformation på grund av skjuvning av tvärsnitten.

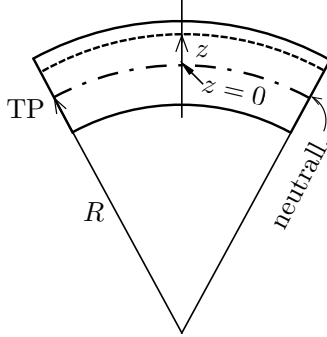
I fig. 25a visas en del av en deformerad balk med längden Δx . Ur figuren erhålls ett samband mellan förskjutning w i z -led och balkens krökningsradie R i deformerat tillstånd. Om balkens position är nästan horisontell, dvs. $w'(x) \ll 1$, erhålls

$$w'(x) - w'(x + \Delta x) = \phi = \frac{\Delta x}{R(x + \xi \Delta x)}, \quad (108)$$

där ξ antar ett värde $0 \leq \xi \leq 1$. Värdet på ξ är inte känt men det kommer inte heller att behövas som vi ser i det följande. Krökningsradien i en punkt längs balken ges som ett gränsvärde enligt

$$\frac{1}{R(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{w'(x) - w'(x + \Delta x)}{\Delta x} = -\frac{d^2 w(x)}{dx^2}. \quad (109)$$

Det är lätt att inse att balken i fig. 25a är sträckt på ovansidan och komprimerad på undersidan. Fig. 26 visar en kort balksektion som i odeformerat tillstånd har längden ℓ_x . Sektionen är så kort att krökningsradien kan betraktas som konstant i hela segmentet. I krökningsplanet är z -axeln. För något z återfinns ett plan som varken är sträckt



Figur 26: Neutrallagret, som bildas av tvärsnittens tyngdpunkter har krökningsradien R . z -koordinaten är vinkelrät mot neutrallagret där $z = 0$.

eller komprimerat, dvs. där töjningarna $\epsilon_x = 0$. Detta plan kallas neutrallager och ibland även neutralplan eller neutralfiber. Utan att förlora i generalitet kan vi välja $z = 0$ i neutrallagret. Plan längs balken som befinner sig på samma avstånd från krökningscentrum kallas fibrer. Krökningsradien hos neutralagret betecknas med $R = R(x)$. Längden av neutralplanet vid $z = 0$ är $R\phi = \ell_x$, vilket är detsamma som längden på den odeformerade balksektionen, pga. att neutralplanet saknar töjning. Av det följer att längden L_x av ett deformerat lager ges av

$$L_x = (R + z)\phi. \quad (110)$$

Före deformationen har samma skikts längd varit

$$\ell_x = R\phi. \quad (111)$$

enligt (3) är töjningen längs balken således

$$\epsilon_x(x, z) = \frac{L_x - \ell_x}{\ell_x} = \frac{z}{R(x)}. \quad (112)$$

Hookes lag ger spänningsfördelningen i balken som

$$\sigma_x(x, z) = E\epsilon_x = E \frac{z}{R(x)}. \quad (113)$$

Figur 25b visar en balkdel som belastas av en yttre utbredd kraft per längdenhet $q = q(x)$. Tvärkrafter T och momentet M är snittstorheter. Med z -axeln riktad uppåt och y -axeln in i bøjplanet, i en yta med den utåtriktade normalen i positiv x -led, är T riktad i positiv z -led och M vrider runt den positiva y -axeln. I en yta med utåtriktad normal i negativ x -led är T riktad i negativ z -led och M vrider runt den negativa y -axeln. För balkens båda ändar gäller att T belastar balken så att den tippas moturs och M belastar balken så att den välvs uppåt, dvs. i z -led. Momentjämvikt är uppfylld om

$$M(x + \Delta x) - T(x + \Delta x)\Delta x - M(x) + q(x + \xi\Delta x)\Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0, \quad (114)$$

där momenten tagits runt balkänden vid x . Gränsvärdet när $\Delta x \rightarrow 0$ ger

$$T(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{M(x + \Delta x) - M(x)}{\Delta x} = \frac{dM(x)}{dx}. \quad (115)$$

Vidare innebär kraftjämvikt att

$$T(x + \Delta x) + q(x + \xi\Delta x)\Delta x - T(x) = 0, \quad (116)$$

vilket för $\Delta x \rightarrow 0$ ger

$$q(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-T(x + \Delta x) + T(x)}{\Delta x} = -\frac{dT(x)}{dx}. \quad (117)$$

De dragspänningar i den övre delen av balken och tryckspänningar i den undre delen av balken som krökts med positiv krökningsradie, så som fig. 25 visar, bildar ett motriktat kraftpar som är lika i storlek och motsatta i riktning enligt (113). Spänningsfördelningen ger ett böjande moment som beräknas genom integration över tvärsnittsytan A , enligt

följande

$$M = \int \sigma_x z \, dA = \int E \frac{z}{R} z \, dA = EI \frac{1}{R}. \quad (118)$$

Kombinationen EI är balkstyvheten och I är balkstyvhetens tvärsnittsfaktor. Man ser att balkstyvhetens tvärsnittsfaktor

$$I = \int z^2 \, dA, \quad (119)$$

som också känns igen som tvärsnittets yttröghetsmoment runt y -axeln, dvs $I = I_y$. För flera geometrier, som rektangulärt, triangulärt, cirkulärt etc. tvärsnitt hittar man I enklast i en formelsamling, som TE-FYMA eller liknande. Resultaten (109), (118), (115) och (117) sammanfattas med

$$-q(x) = \frac{dT(x)}{dx} = \frac{d^2M(x)}{dx^2} = -\frac{d^2}{dx^2} EI \frac{d^2w(x)}{dx^2}. \quad (120)$$

Ekvationen (120) kallas elastiska linjens ekvation. Den löses med tillhörande randvillkor, vilka till antalet är lika med ekvationens ordning. Eftersom ekvationen löses i ett slutet intervall fördelar sig randvillkoren på balkens båda ändar. Vidare ges randvillkoren i par som så kallade naturliga randvillkor vilka är M, T ; M, w ; T, w' och w', w . Kombinationerna M, w' och T, w ingår inte. De kan naturligtvis användas för en matematisk analys men det låter sig knappast realiseras rent praktiskt. Paret M och T är dynamiska randvillkor och w och w' är kinematiska randvillkor.

Spänningen i tvärsnittet är proportionell mot det pålagda böjmomentet. Från (113) och (118) erhålls

$$\sigma_z = \frac{zM}{I}. \quad (121)$$

Vanligtvis skrivs

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W}, \quad (122)$$

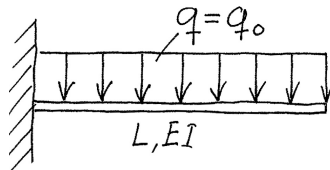
där W kallas böjmotståndet. Det kan beräknas som

$$W = \frac{I}{z_{max}} , \quad (123)$$

och hämtas från en lämplig formelsamling.

Exempel

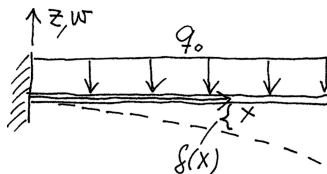
1. Se konsolbalken med konstant utbredd last q_o vidståendes figur. Beräkna nedböjningen $\delta(x)$ med hjälp av elastiska linsens ekvation.



Lösning:

$$\frac{dT}{dx} = -q(x) = q_o,$$

se FS:30. Vi följer formelsamlingens teckenkonvention (fig. i FS)



$$T = q_o x + C$$

$$\frac{dM}{dx} = T = q_o x + C$$

$$M = q_o \frac{x^2}{2} + Cx + D$$

Randvillkor:

$$\begin{cases} T = 0 \text{ för } x = L & \Rightarrow C = -q_o L \\ M = 0 \text{ för } x = L & \Rightarrow D = q_o \frac{L^2}{2} \end{cases}$$

Vilket ger

$$M = q_o \frac{x^2}{2} - q_o Lx + q_o \frac{L^2}{2}$$

Använd elastiska linjens ekvation (FS:30, 31)

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI}.$$

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = -q_o \frac{x^2}{2} + q_o Lx - q_o \frac{L^2}{2}.$$

EI är oberoende av x .

$$EI \frac{dw}{dx} = -q_o \frac{x^3}{6} + q_o L \frac{x^2}{2} - q_o \frac{L^2}{2} x + A.$$

$$EI w = -q_o \frac{x^4}{24} + q_o L \frac{x^3}{6} - q_o \frac{L^2}{4} x^2 + Ax + B.$$

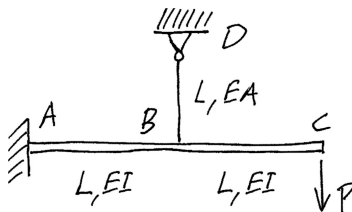
Randvillkor:

$$\begin{cases} w'(x) = 0 \text{ för } x = 0 & \Rightarrow A = 0 \\ w = 0 \text{ för } x = 0 & \Rightarrow B = 0 \end{cases}$$

Dvs.

$$\delta(x) = -w(x) = \frac{q_o L^4}{EI} \left[\frac{1}{24} \left(\frac{x}{L} \right)^4 - \frac{1}{6} \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \frac{1}{4} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right].$$

2 En tråd BD är spänd mellan ett fundament och mittpunkten på en konsolbalk ABC. Bestäm nedböjningen vid B då kraften P påläggs enligt figuren.



Lösning:

I intervallet $0 \leq x \leq L$ gäller $M(x) = P(2L - x) - S(L - x)$.

Elastiska linjens ekvation (FS:30, 31) blir

$$EI w''(x) = -P(2L - x) + S(L - x).$$

Efter integrering

$$EI w'(x) = -\frac{P}{2}(2L - x)^2 + \frac{S}{2}(L - x)^2 + C.$$

och

$$EIw(x) = -\frac{P}{6}(2L-x)^3 + \frac{S}{6}(L-x)^3 + Cx + D.$$

Randvillkor

$$\begin{cases} w'(x) = 0 \text{ för } x = 0 & \Rightarrow C = \frac{1}{2}SL^2 - 2PL^2 \\ w = 0 \text{ för } x = 0 & \Rightarrow D = \frac{4}{3}PL^3 - \frac{1}{6}SL^3 \end{cases}$$

Teckenkonventionen ger att $\delta = -w(L) \Rightarrow -\delta = -\frac{5PL^3}{6EI}(1 - \frac{2}{5}\frac{S}{P})$. Kraften S kan elimineras genom att kraften i linan är en känd funktion av linans förlängning, dvs. $\delta = \frac{SL}{AE}$. Eliminering ger

$$\delta = \frac{5PL^3}{6EI} \frac{1}{1 + \frac{AL^2}{3I}}.$$

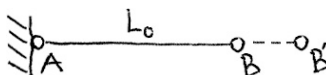
Repetitionsfrågor: Böjning

1. Vad är medellinjen för en balk?
2. Vilka teckenkonventioner gäller för riktning av krökning ($1/R$), tvärkraft (T), normalkraft (N), moment (M), och förskjutning (w)?
3. Kring vilken axel tas yttröghetsmomentet I vid böjning?
4. Hur varierar normalpåkänningen σ_x över balktvärsnittet för en rent momentbelastad balk?
5. Var i tvärsnittet uppträder största normalspänningen?
6. En balk utsätts för visst böjande moment. Kan man minska spänningen i balken genom att öka balkens höjd?
7. En balk ges en viss krökning. Kan man minska spänningen i balken genom att öka balkens höjd?
8. Vad gäller för statiskt bestämda respektive statiskt obestämda strukturer angående bestämning av krafter och moment?
9. Hur räknar man hur många gånger statiskt obestämd en struktur är?
10. Hur många deformationsvillkor behövs för beräkning av en n -faldigt statiskt obestämd struktur?

5 Övningar

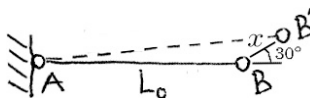
Deformation

1.1 a) Stången AB har längden 1.2m i obelastat tillstånd. En yttre last förlänger stången med $BB' = 0.2\text{mm}$. Hur stor blir töjningen?



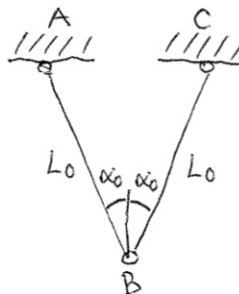
b) Vanliga konstruktionsstål klarar töjningar på några få ‰. Beräkna hur många mm stången AB kan förlängas om maximal töjning är $\epsilon_{max} = 2‰$?

c) Hur lång blir stången om B förflyttas sträckan x i en riktning som är 30° mot stångens längdaxel?

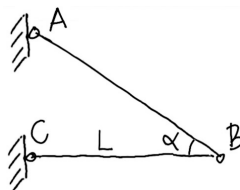


d) Hur stor blir töjningen i AB' när förskjutningen av B till B' sker i 30° mot stången ursprungliga riktning? Änden A är ledat fastsatt. Utgå från att $x \ll 1.2\text{m}$ och förenkla föregående svar med hjälp av Maclaurinutveckling. Hur stort fel ger förenklingen om $x = 3\text{mm}$?

1.2 Stängerna, AB och BC, är upphängda vid A resp C samt förenade vid B. Knutpunkten B förskjutes en sträcka Δ vertikalt nedåt. Beräkna töjningen i stängerna. Studera speciellt fallen $\alpha_0 = \pi/2$ samt $\Delta \ll L_0$.

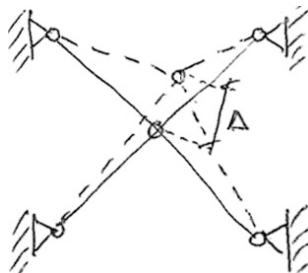


1.3 Två stänger är förenade enligt figur. Beräkna den horisontella resp vertikala förskjutningen av punkt B, då stängerna erhållit töjningarna ϵ_a resp ϵ_b . Ange resultatet för små töjningar.



1.4 Beräkna töjningarna i stängerna om knutpunkten B i geometrin i uppgift 1.1 förskjutes sträckan δ horisontellt åt höger. Spec. om $\alpha_o = \pi/2$ och om $\delta \ll L_o$.

1.5 Fyra likadana stänger med längden L , är förenade till en konstruktion enligt fig. på vardera stängens sitter en trådtöjningsgivare. Trådtöjningsgivarna är seriekoplade så att de mäter medeltöjningen hos stängerna. Om mittpunkten förs ut i någon riktning stycket Δ bestäm denna medeltöjning. Spec. om $\Delta \ll L$.



1.6 Beräkna töjningarna i stängerna om knutpunkten B i uppg. 1.1 belastas av en vertikal kraft T . Stängerna antas vara elastiska så att vardera stångkraften F är proportionell mot respektive stångs förlängning δ dvs. $F = k\delta$. Fjäderkonstanten k antas vara given och lika för båda stängerna. Beräkna förskjutningen av B. Använd att $\delta \ll L_o$.

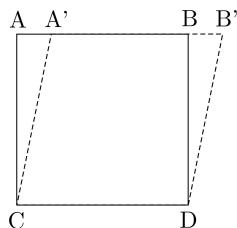
1.7 En 3m lång stålstång som värms $10^\circ C$ får töjningen $\epsilon = 10^{-5}$. Hur mycket längre blir stången? Vilken kraft uppstår i stången om den är fastsatt så att längdändringen förhindras? Stången som har cirkulärt tvärsnitt med radien 30mm. Fjäderkonstanten k har uppskattats till $57 \times 10^7 \text{ N/mm}$.

Töjning

2.1 a) Hur definieras töjningskomponenterna ϵ_x , ϵ_y och γ_{xy} om förskjutningarna $u(x, y)$ och $v(x, y)$ är kända?

b) På en yta uppmätta förskjutningar, u och v i x - resp. y -led beskrivs av följande uttryck $u = (0.8x^2 + 1.5x - 1.1y + 4.2) \times 10^{-5}$ och $v = (2.6xy - 3.4x + 0.6) \times 10^{-5}$. Beräkna $x - y$ planets töjningskomponenter i punkten $x = y = 0$. Visa med en skiss hur en kvadrat deformeras i närheten av $x = y = 0$.

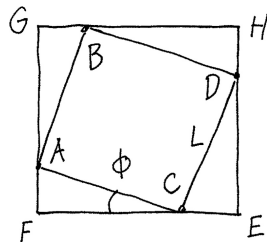
c) Kvadraten ABCD deformeras till romboiden A'B'CD. Uppskatta största och minsta töjning genom att mäta lämpliga avstånd i figuren. Ange även uppskattade värden på ϵ_x , ϵ_y och γ_{xy} .



d) Följande töjningar har uppmätts på en deformerad struktur: $\epsilon_x = 0$, $\epsilon_y = 0$, $\gamma_{xy} = 0.2 \times 10^{-5}$. Bestäm största och minsta töjning i $x - y$ planet genom att beräkna töjningsmatrisens egenvärden. Jämför med uppg. c)

e) Ange vinklarna mellan x -axeln och huvudtöjningarnas normaler genom att beräkna egenvektorer till töjningsmatrisen i föregående uppgift? Jämför med uppg. c)

2.2 I vidstående konstruktion ges de horisontella stängerna töjningen ϵ_x och de vertikala töjningen ϵ_y . Vinkeln EFG minskar γ rad. Bestäm ett villkor på ϕ så att vinklarna i ABCD förblir räta efter deformationen. Spec. om ϵ_x , ϵ_y och $\gamma \ll 1$.

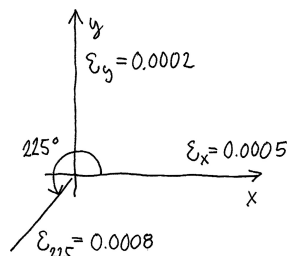


2.3 Under vilka villkor är följande uttryck för förskjutningar och skjuvning kompatibla?

$$\begin{aligned} u &= ax^2y^2 + bxy^2 + cx^2y \\ v &= ax^2y + bxy \\ \gamma_{xy} &= \alpha x^2y + \beta xy + \alpha x^2 + y \end{aligned}$$

2.4 Vidstående töjningar har man mätt upp på en kropp. Töjningstillståndet får anses vara plant. Bestäm:

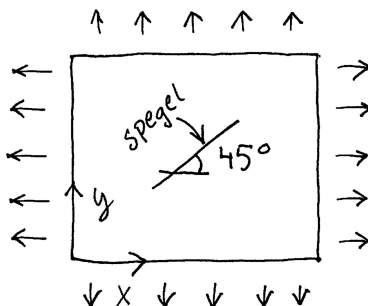
- a) γ_{xy}
- b) huvudtöjningarna
- c) deras riktningar
- d) maximal skjuvning i planet



2.5 För en maskindetalj har man mätt upp $\epsilon_x = 0.0002$, $\epsilon_y = -0.0002$ och i 45° mot x -axeln $\epsilon_{45} = 0.000346$. Beräkna:

- a) ϵ_1 och ϵ_2
- b) deras riktningar

2.6 En spegel är fäst vid en metallplåt vinkelrätt mot dess yta och så att spegelns plan bildar 45° med både x - och y -riktningarna. En ljusstråle infaller vinkelrätt mot spegeln. Hur mycket vrider sig den reflekterade ljusstrålen om plåten sträcks $1/20\%$ i x -riktningen och $1/50\%$ i y -riktningen?

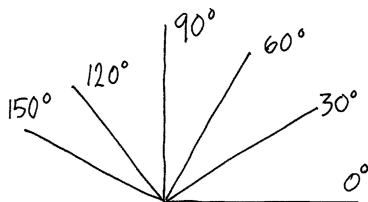


2.7 På en plan obelastad ytan av en kropp uppritades en kvadrat ABCD, när kroppen var obelastad. Vid belastning uppmättes att sidan AB förlängts 1.10% , sidan BC förkortats 0.80% och diagonalen AC inom mätnoggrannheten vare sig förlängts eller förkortats. Man önskar nu upprita ett axelkors (två korsande, mot varandra vinkelräta linjer) så beskaffat att ändringen av den räta vinkeln vid belastning (samma belastning som tidigare) blir större än för varje annat axelkors. Hur skall detta axelkors orienteras i förhållande till kvadraten ABCD?

2.8 I en plåtyta uppmäts töjningen noll i två riktningar 1 och 2 med 60° vinkeldelning. Vilken information om töjningstillståndet ger detta

resultat?

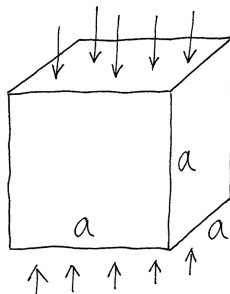
2.9 På en plan obelastad yta av en kropp uppmättes töjningar i 6 olika riktningar. Man erhöill:



0°	0.122
30°	0.08
60°	-0.02
90°	-0.10
120°	-0.04
150°	0.06

Vid bearbetning av försöksresultaten upptäcktes att ett av resultaten troligen var något felaktigt. Vilket?

2.10 En kub med sidan a utsättes för tryck på två motstående sidor och ytor så att dessa närmar sig varandra styc-
ket δ . Det gäller $\delta \ll a$ och kubens
volym är antas vara konstant. Hur
stor blir ändringen av rymddiagonalens
längd?



Spänning

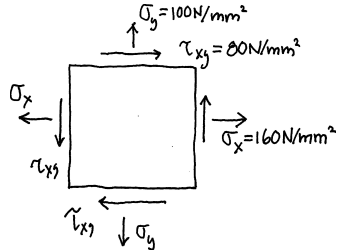
3.1 a) Vad karakteriserar en normalspänning respektive en skjuvspänning?

b) Hur ser spänningsmatrisen i $x - y$ planet? Tag fram en formel för matrisens egenvärden.

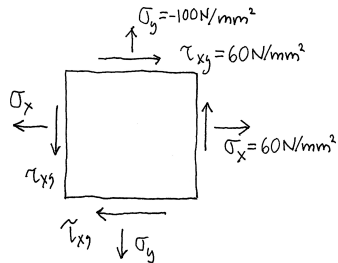
c) En upphängd jämntjock tråd belastas enbart av gravitationen. Tråden har längden L , gravitationen är g , och tråden har ett cirkulärt tvärsnitt med diametern är D . Materialet har densiteten ρ . Hur varie-

rar spänningen i tråden med avståndet x från upphängningen?

3.2 På ytan av en belastad kropp verkar spänningarna enligt figuren. Bestäm a) huvudspänningarna, b) deras riktningar, c) max skjuvspänning d) effektivspänningen enligt deviationsarbets- och skjuvspänningshypoteserna

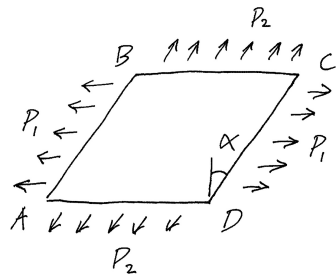


3.3 På ett ytelement av en belastad kropp verkar spänningarna enligt figuren. Bestäm a) huvudspänningarna, b) deras riktningar, c) max skjuvspänning d) effektivspänningen enligt deviationsarbets- och skjuvspänningshypoteserna



3.4 En plåt utsätts för tre lastsystem, som vart och ett ger upphov till enaxlig dragning med beloppet 100 N/mm^2 men verkande i riktningar med 60° vinkeldelning. Bestäm det resulterande spänningstillståndet.

3.5 Ett rombiskt plåtfält ABCD är enligt figuren utsatt för belastningar P_1 och P_2 per längdenhet varvid P_1 verkar parallellt med BC och P_2 parallellt med AB. Beräkna huvudspänningarna i plåtfältet. Speciellt får antas att $\alpha = 45^\circ$ och $P_2/P_1 = 1/2$.

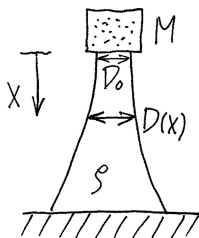


3.6 Följande spänningar är uppmätta: $\sigma_x = 30 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_y = -30 \text{ N/mm}^2$ och $\tau_{xy} = 40 \text{ N/mm}^2$. Övriga spänningar är noll. Kan man

vrida koordinatsystemet så att detta spänningstillstånd motsvarar ett rent skjuvspänningstillstånd, dvs så att av alla spänningar endast $\tau_{x'y'} \neq 0$. Om så är fallet ange hur koordinatsystemet skall vridas samt värdet på $\tau_{x'y'}$.

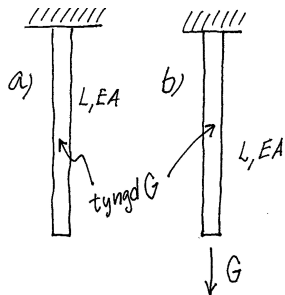
3.7 På den fria ytan av en belastad kropp har man uppmätt spänningarna $\sigma_x = 60 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_y = 40 \text{ N/mm}^2$ och $\tau_{xy} = -30 \text{ N/mm}^2$. Bestäm de riktningar för vilka sambanden $\sigma = 3\tau$ gäller.

3.8 Ett torn med massiv cirkulär tvärsnitt bär en massa M . Diametern strax under massan är D_0 . Materialet har densiteten ρ . Hur skall diametern variera för att variera längs tornet för att tryckspänningen skall vara densamma överallt?

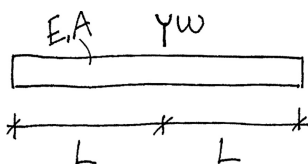


Enaxlig linjär elasticitet

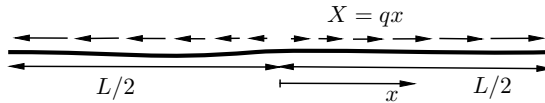
4.1 En jämntjock stång med längden L , arean A , elasticitetsmodulen E och tyngden G är fäst i ett tak enligt figur. Vad blir dess förlängning a) under den egna tyngden b) under inverkan av egna tyngden jämte en yttre kraft G i fria änden som figuren visar?



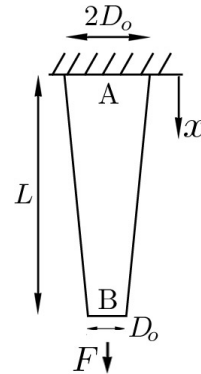
4.2 En stång med data enligt figuren roterar kring sin mittpunkt med vinkelhastigheten $\omega \text{ rad/s}$. Bestäm stångens längdökning på grund av centrifugalbelastningen, då stångmaterialet har tätheten ρ .



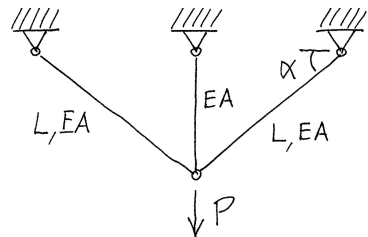
4.3 Från en miljösatellit hänger en fritt svävande tråd som används för att mäta solvindens intensitet. Tråden laddas av elektroner som gör att tråden förlängs och det stör mätningen. Beräkna hur mycket längre tråden blir och hur stor den största spänningen blir när kroppskrafterna $X = qx$ med $q = 0.1 \mu\text{N}/\text{m}^2$ påverkar tråden. Tråden är hyfsat rak och $L = 8 \text{ km}$ lång. Materialet har elasticitetsmodulen $E = 4 \text{ GPa}$ och en cirkulär tvärsnittsytta med diametern $60 \mu\text{m}$.



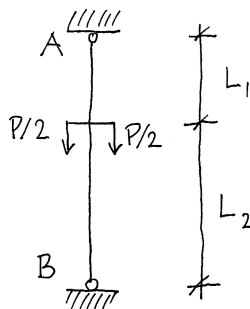
4.4 En massiv stympad kon AB med längden L , belastas av en kraft, F . Stångtvärsnittet är cirkulärt med en varierande diameter $D = D_o(2 - \frac{x}{L})$ där x är avståndet från upphängningen. För att spara material lanseras idén att göra en lika lång stång av samma material med konstant diameter $D = \frac{3}{2}D_o$. Beräkna kvoten mellan förlängningen av stången med konstant tvärsnittsyta och den med varierande tvärsnittsyta. Man kan bortse från konens egentyngd.



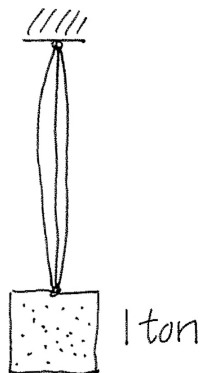
4.5 Bestäm stångkrafterna då kraften P är anbringad som figuren visar. Sätt speciellt $\alpha = 30^\circ$.



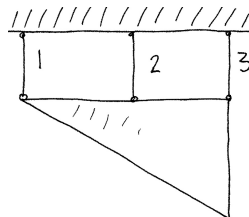
4.6 I ett stag AB har en förspänning uppkommit efter nedkylning. Spänningen betecknas σ_o . På avståndet L_1 från övre änden på staget angriper en kraft P i riktning mot B. Vid vilket värde på P blir stagets undre del spänningslös?



4.7 Tre stållinor, vardera med tvärsnittsarean 10 mm^2 , skall tillsammans bära en last på 1 ton. Linornas längder i ospänt tillstånd är 9.98, 9.99 och 10.00 m. Bestäm spänningarna i de tre linorna då lasten pålagts $E = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$

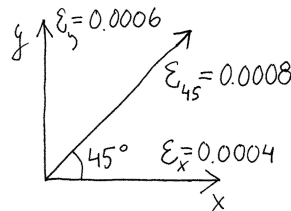


4.8 En stel rätvinklig plåttriangel med tyngden P uppbärs av tre ekvidistanta, parallella och identiska linor av ett linjärt elastiskt material. Bestäm krafterna i de tre linorna.



4.9 På ytan av en belastad kropp har vidstående töjningar mätts upp. Då $E = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 1/3$, beräkna

- skjuvningen γ_{xy}
- ϵ_1 och ϵ_2
- γ_{max} i planet
- σ_1 och σ_2 med riktningar
- τ_{max} i punkten



4.10 Ett plant deformationstillstånd kännetecknas av $\epsilon_x = 1 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon_y = 2 \cdot 10^{-3}$ och $\gamma_{xy} = 1 \cdot 10^{-3}$. Beräkna effektivspänningen enligt skjuvspänningshypotesen och enligt deviationsarbetshypotesen. $E = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0.3$.

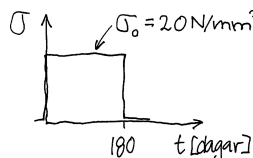
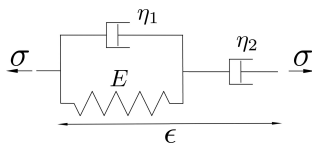
4.11 Genom mätningar på en konstruktion har man i en punkt på en obelastad yta funnit, att töjningarna i ytans plan i två mot varandra vinkelräta riktningar är $\epsilon_x = 10^{-4}$ och $\epsilon_y = 2 \cdot 10^{-4}$. I den aktuella punkten gäller dessutom $\tau_{max} = 115 \text{ N/mm}^2$ samt att en huvudspänning är positiv och en negativ. Beräkna huvudspänningarnas storlek. $E = 210000 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0.3$.

4.12 En stel rätvinklig plåttriangel med tyngden P uppbärs av tre ekvidistanta, parallella och fullständigt lika trådar. Vilka blir krafterna i de tre trådarna om materialet har spänningstöjningssambandet $\epsilon = (\sigma/\sigma_o)^N$. Studera särskilt fallet $N = 2$. (Se figur till uppgift 4.6).

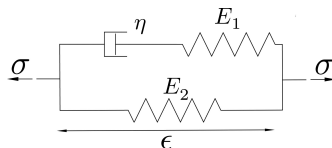
4.13 För att kunna bestämma effektivspänningen (enligt skjuvspänningshypotesen) i en punkt på en obelastad yta av en kropp mäter man töjningarna i de två mot varandra vinkelräta riktningar som man tror är huvudtöjningsriktningar. Man erhåller $\epsilon'_1 = 0.25\text{‰}$, $\epsilon'_2 = 0.35\text{‰}$. Senare inser man att osäkerheten om huvudtöjnings riktningarna är rätt stor, och det är möjligt att man tagit miste på upp till 20° . Måste man göra om mätningarna om man inte onödigtvis vill introducera större fel än 2% på effektivspänningen?

Viskoelasticitet

5.1 Materialbeteendet hos en stång är påfallande olinjärt. Man har funnit att den reologiska modellen i figuren ger en godtagbar beskrivning med materialkonstanterna är $E = 16000 \text{ N/mm}^2$, $\eta_1 = 16 \cdot 10^{10} \text{ Ns/mm}^2$ och $\eta_2 = 1 \cdot 10^{11} \text{ Ns/mm}^2$. Stången belastas av en konstant spänning enligt diagrammet. Hur stor förutsägs den kvarvarande töjningen i stången vara när lång tid förflutit?

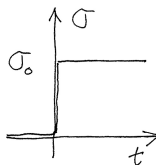
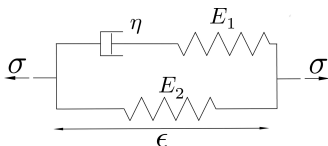


5.2 En polykarbonatskiva kan beskrivas av den reologiska modellen i figuren, där materialkonstanterna är $E_1 = 1400 \text{ N/mm}^2$, $E_2 = 2600 \text{ N/mm}^2$ och $\eta = 3 \cdot 10^{10} \text{ Ns/mm}^2$. Skivan utsätts under lång tid för en konstant deformation. Direkt när deformationen

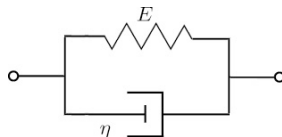


appliceras stiger spänningen till ett högt värde som avmattas med tiden. Hur mycket har spänningen i materialet sjunkit när lång tid förflutit?

5.3 Ett vibrationsdämpande material enligt figuren med $E_1 = 500 \text{ N/mm}^2$, $E_2 = 200 \text{ N/mm}^2$ och $\eta = 10^5 \text{ Ns/mm}^2$ belastas med konstant spänning. Efter hur lång tid har materialet nått 90 % av sin slutliga deformation?

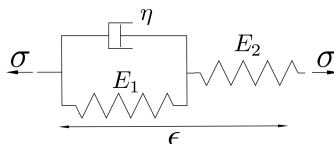


5.4 Ett trabekulärt ben, dvs huvuddelen av ett lårben har en efterelastisk effekt vilket betyder att det återtar sin ursprungliga form efter avlastning men med viss tidsfördröjning. En enkel modell av materialet ges i figuren.



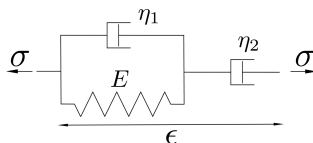
En belastning på $\sigma_o = 20$ MPa appliceras under 5 sekunder. Då har en töjning ϵ_t uppstått och belastningen tas bort. Beräkna ϵ_t och hur lång tid ytterligare det tar innan töjningen minskat till $0.05\epsilon_t$? Materialkonstanterna är $E = 14$ GPa, och $\eta = 1.5$ GPa s.

5.5 Ett rör av ett material som används vid förhöjd temperatur har egenskaper, som beskrivs av materialmodellen i figuren, där $E_1 = 350$ kN/mm², $E_2 = 195$ kN/mm² och $\eta = 3 \cdot 10^{13}$ Ns/mm². Rören har en tvärsnittsarea på 1000

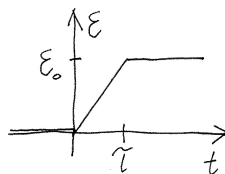


mm². Till vilken kraft måste man förspänna bultarna för att dragkraften i dem efter 2 år inte skall understiga 150 kN? Man kan anta att underlaget, som bultarna spänns emot, är styvt och att alltså bultarnas deformation ej förändras under de två åren.

5.6 Ett olinjärt material befins vid enaxlig belastning beskrivas hyggligt av den reologiska modell som visas i figuren. Ange en differentialekvation som kan användas för att beskriva enaxlig dragning. Använd materialparametrar enligt figuren.

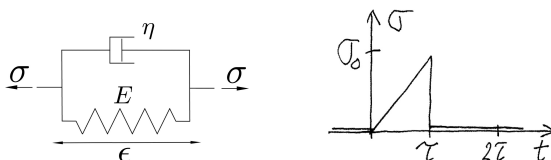


5.7 En viskoelastiskt struktur antas beskrivas väl av en modellmodellen i problem 5.5. Följande materialkonstanter $E = 5000$ N/mm², $\eta_1 = 3 \cdot 10^5$ Ns/mm² och $\eta_2 = 9 \cdot 10^5$ Ns/mm² har uppmätts under ett experiment. Strukturen belastas av en konstant töjning $\epsilon_o = 2 \cdot 10^{-3}$. Töjningen påtvingas med konstant töjningshastighet fram till tiden $\tau = 20$ s. Efter det bibehålls



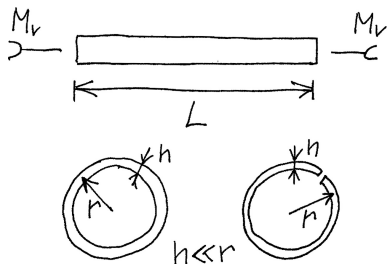
konstant töjning. Vad blir den största spänning som uppträder i strukturen?

5.8 Ett Kelvin-material enligt figuren belastas med en spänning σ så som diagrammet visar. Beräkna töjningen vid tiden $t = 2\tau$ om $\sigma_0 = 500 \text{ N/mm}^2$ och $\tau = 2000 \text{ s}$. Materialet har elasticitetsmodulen $E = 25000 \text{ N/mm}^2$ och $\eta = 1.0 \cdot 10^8 \text{ Ns/mm}^2$.

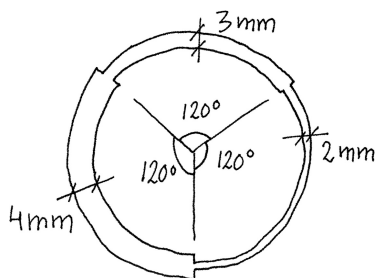


Vridning

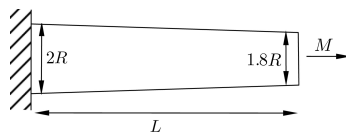
6.1 En stång av längden L är utsatt för vridande moment figuren. Bestäm förvridningen om stångsektionen har de utseenden som visas i figurerna och om materialet har skjuvmodulen G . Observera den drastiska skillnaden för tunnväggiga rör.



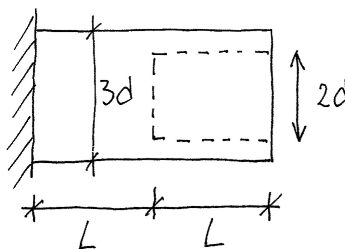
6.2 Ett slutet rör har tre olika vägg-tjocklekar enligt figur. Rörets medeldiameter är 150 mm. Beräkna vridstyvhetens tvärsnittsfaktor.



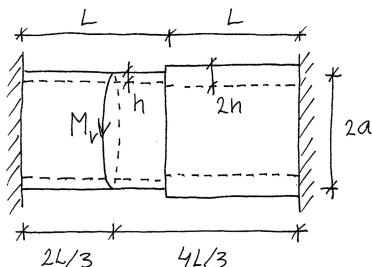
6.3 En konisk stång med cirkulärt tvärsnitt belastas av ett vridande moment M . Radien är 10% mindre i stångens ytterände dvs den har radien R vid infästningen och $0.9R$ i den belastade ytteränden. Radien varierar linjärt mellan stångens ändar. Hur mycket större blir



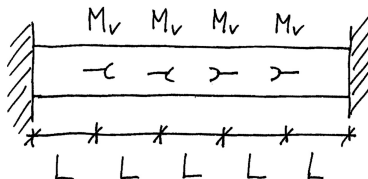
6.4 En till halva sin längd urborrad cylindrisk axel är belastad med ett vridande moment M_v . Beräkna fria ändens förvridning, då $\tau_{max} = 80 \text{ N/mm}^2$, $G = 80000 \text{ N/mm}^2$, $d = 20 \text{ mm}$ och $L = 500 \text{ mm}$.



6.5 Ett cirkulärt tunnväggigt rör med medeldiametern $2a$ och längden $2L$ är inspönt i bägge ändar. Väggtjockleken i den ena halvan av röret är h , i den andra $2h$. I tvärsnittet beläget på avståndet $2L/3$ från den vänstra inspänningen verkar ett yttre vridande moment M_v . Sök förvridningen av detta tvärsnitt. Skjuvmodulen är G .



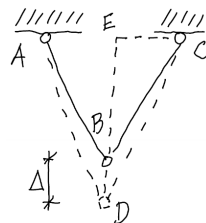
6.6 Upprita diagram, som Visar hur moment och varierar utefter stängen i figur. Beräkna också maximala förvridningen från neutralläget, om $\tau_{max} = 100 \text{ N/mm}^2$ och $L = 500 \text{ mm}$. Stången, som är av stål, har cirkulärt tvärsnitt med diametern $d = 30 \text{ mm}$.



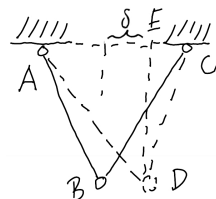
6 Vägledning till övningar

Deformation

1.2 Tag reda på längden, L , av DC efter deformationen. Använd att töjningen $\epsilon = (L - L_o)/L_o$. Ibland underlättar det att använda $L = (1 + \epsilon)L_o$. Studera den rätvinkliga triangeln ECD med hjälp av pytagoras sats. För $\Delta \ll L_o$ utveckla i Maclaurinserie. Notera att $(1 + x)^n = 1 + nx + O(x^2)$. $O(x^2)$ är en restterm.

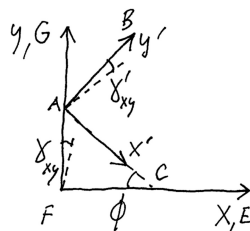


1.4 Studera trianglarna AED och ECD. För $\delta \ll L_o$ utveckla i Maclaurinserie se uppgift 1.1. Studera exempel 1 i kap. 1.



Töjning

2.2 Betrakta GFE som koordinatriktningar x och y och BAC som koordinatriktningar $x' - y'$. Det senare koordinatsystemet är roterat vinkeln ϕ . Beakta att γ_{xy} och γ'_{xy} är minskningen av vinkeln GFE respektive BAC. Använd transformationslagarna för töjningar för att beräkna γ'_{xy} . FS:7



2.3 Använd sambandet mellan förskjutning och skjuvning. FS:4

2.5 Huvudspänningarna är töjningstensorns egenvärden. Se FS. Om den ena huvudriktningen ges av $\Phi + n180^\circ$ gäller att den andra ges av $\Phi + 90^\circ + n180^\circ$ (n är ett godtyckligt heltal).

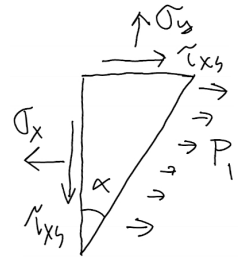
2.8 Rita Mohrs cirkel och finn två diametrar med vinkelskillnaden $2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$ för vilka normaltöjningen är noll. Det ger en relation mellan huvudtöjningarna eller maximal skjuvning jämfört med någon huvudtöjning. Se exvis anvisningar till fig. 4 i kap. 2.

2.10 Pytagoras sats i 3 dimensioner ger diagonalen $\sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}$. Volymen blir $l_x l_y l_z$. Sätt längderna l_i till ursprunglig längd ggr $(1 + \epsilon_i)$ med ϵ_i som respektive töjning. Maclaurinutveckla volym och diagonal var för sig för litet δ/a . Försumma andra ordningens termer.

Spänning

3.5 Beakta triangeln som bildas om en linje dras vertikalt från hörnet D upp till linjen BC. Kalla punkten där den nya linjen möter BC för E. Inför σ_x och τ_{xy} , som belastning på triangelnsidan DE. P_2 ersätts, som belastning på sidan EC, av σ_y och τ_{xy} , som beräknas som funktion av P_2 . Kraftjämvikt i x -led ger σ_x . Jämvikt i y -led kan användas för att kontrollera redan beräknat τ_{xy} .

Spänningskomponenterna σ_x , σ_y och τ_{xy} används för att beräkna huvudspänningarna.



3.7 Rita upp Mohrs cirkel och lägg in linjen $\sigma'_x = 3\tau'_{xy}$. Om linjen skär Mohr's cirkel på ett eller två ställen har problemet en eller två lösningar. Använd transformationslagarna (FS:6) för att beräkna σ'_x och τ'_{xy} för en godtycklig riktning. Sätt $\sigma'_x = 3\tau'_{xy}$. Skriv om resulterande ekvation som en andragradsekvation för $\tan(\theta)$. Finn två rötter för $\tan(\theta)$.

3.8 Bestäm $A(x) = \pi D(x)^2/4$. Inför ett tänkt snitt på avståndet x från toppen. Ställ upp jämvikt för tvärsnittet genom att integrera fram volymen ovanför tvärsnittet. Behandla $D(x)$ som en okänd funktion. Derivering uttrycket med avseende på tvärsnittets läge ger en differentialekvation med en lösning. Differentialekvationen kräver ett randvillkor vilket ges av att spänningen i ett tvärsnitt är känd. Vilket?

Elasticitet. Enaxliga tillstånd

4.2 Kraften på en massa m i cirkulär bana med radien r är $m\omega^2 r$ (se TEFYMA eller liknande). Teckna kraft per längdenhet för stängen. Använd differentialekvationen för enaxligt belastad stång (FS:21).

4.5 Se till att stångkrafterna uppfyller jämvikt och att de stångförlängningar de ger via Hookes lag är kompatibla med sambandet mellan förlängningarna i stängerna (se uppgift 1.1). För att formulera deformationssambandet och jämvikt kan man anse att de bäge icke-vertikala stängerna förblir parallella med sina respektive utgångsriktningar.

4.7 Antag att linorna förlängs $\delta + 1$, δ respektive $\delta - 1$. Beräkna krafter som funktion av δ . Se till att krafterna är i jämvikt med given last.

4.8 Skriv linornas förlängningar som $\Delta + \delta$, Δ respektive $\Delta - \delta$. Kraft- och momentjämvikt beaktas (se 4.5). P placeras i triangelns tyngdpunkt.

4.11 Skissa Mohrs cirkel med hjälp av informationen om huvudspänningarna. Inkludera tredje huvudspänningen som är känd eftersom punkten finns på kroppens yta. Identifiera τ_{max} . Använd FS:15 för att beräkna $\sigma_x + \sigma_y$ och sedan FS:8 för att beräkna huvudspänningarna.

4.13 Utgå från att vinkeln är 20° fel. Antag att de korrekta huvudtöjningarna är ϵ_1 och ϵ_2 . Ställ upp sambandet som ger de kända töjningarna 20° därifrån dvs $\epsilon'_1 = 0.25\%$, $\epsilon'_2 = 0.35\%$. Det ger huvudtöjningarna. Bestäm skjuvningen γ'_{12} och motsvarande skjuvspänning samt beräkna effektivspänningen för ϵ'_1, ϵ'_2 och γ'_{12} . Notera att materialets egenskaper endast kommer in via skjuvmodulen G för den aktuella effektivspännings-hypotesen. Observera att plan spänning råder.

Viskositet. Enaxliga tillstånd

5.2 Tag fram ett samband mellan töjning och spänning inklusive deras tidsderivator. När deformationen appliceras direkt analyseras endast töjningens respektive spänningens högsta derivata. Fortvarighet analyseras genom att endast de lägst deriverade termerna beaktas.

5.3 Samma anvisning som för 5.2. I detta fall måste den oreducerade differentialekvationen lösas för $t > 0$.

5.6 Tag fram ett samband mellan töjning och spänning inklusive deras tidsderivator. Man kan se att spänningen dalar efter $t > \tau$. Lös differentialekvationen fram till $t = \tau$.

5.7 Avgör genom eget resonemang när största spänning uppnår.

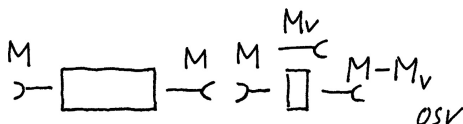
Vridning

6.1 $\varphi = \frac{M_v L}{GK}$, K ges av formler i formelsamlingen. Formlerna finns i stycket efter formel (FS:24).

6.3 Använd den inkrementella formen av FS26, dvs $d\varphi = \frac{M dx}{GK}$.

6.4 Den mest påkända delen är den yttersta. Här nås högsta skjuvspänning $\tau_{max} = \frac{M_v}{W_v}$. W_v hittar man i FS på samma ställe som K . Med M_v bestämt beräknas ϕ för båda och adderas samman.

6.6 Snitta på sex ställen. I ändarna placeras ett moment M_o . Förvridningar beräknas för alla fem delarna. M_o bestäms av att summan av delarnas förvridning skall bli noll. Det ger $M_o = (4/5)M$. Med alla moment kända kan maximal vridning nu beräknas.



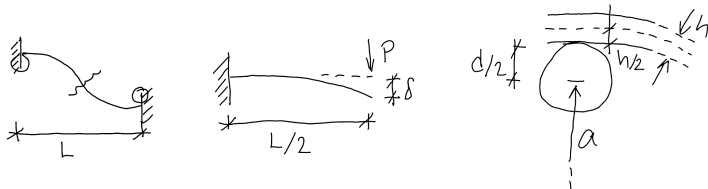
6.7 I fall b: Balkdelen som sitter fast böjs och vrids. Den utvinklade delen böjs och roteras p g a tidigare nämnda vridning. Detta ger tre bidrag till fria ändens nedböjning.

Böjning

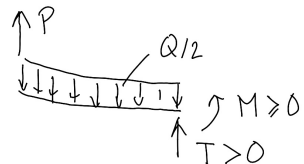
7.1 Sätt $x = 0$ i den fria änden. Se att $T(x)$ är konstant. Integrera elastiska linjens ekvation tre ggr för $T(x)$. Randvillkor $M(0) = 0$, $w(L) = 0$ och $w'(L) = 0$.

7.2 Samma som föregående men här är $q(x)$ konstant. Versionen av elastiska linjens ekvation integreras fyra gånger.

7.6 Mellan två rullar uppför sig bandet som 2 ggr balken i övning 7.1. Tag randvillkoren vid en rulle som $w(0) = 0$ och $w'(0) = 0$. Betrakta delen som figuren visar. Figuren nedan visar också detaljerna vid en rulle med avståndet från rullens mitt till medellinjen vilket ger nedböjningen $(a + d + h)/2$



7.8 Så länge kraften P är liten ligger en del av balken platt mot underlaget. Krökningen och därmed även momentet är noll nära kontaktytan. När kontaktytan begränsas till en linje dvs $x = 0$ är först momentet noll och kontaktpunkten bär halva balken. Momentet ökar med ökande P tills kontaktkraften försvunnit.

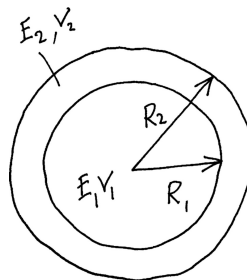


Moment- och kraftjämvikt tillsammans med olikheterna $M \geq 0$ (balken kan inte välvas uppåt) och $T > 0$ (när $T = 0$ lyfter balken från underlaget) ger svaret.

7.10 Bandet utsätts för dragbelastning och böjning där krökningsradien ($w''(x) = D/2$) är given. Den sammanlagda spänningen begränsas av sträckgränsen. Om för tunn blir dragbelastningen för stor, om för tjock blir böjspänningen för stor.

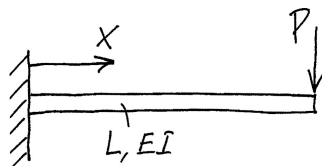
7.13 Betrakta reaktionskraften från mittstödet som godtycklig. Kraftens korrekta värde ges av att den skall häva den nedböjning som skulle ha blivit fallet om mittstödet inte fanns.

6.7 En cylindrisk stav är sammansatt av ett rör med ytterradien R_2 och innerradien R_1 och en stav med radien R_1 . Friktionen mellan stav och rör är så stor att ingen glidning sker vid vridning av den sammansatta staven. Bestäm spänningarna i ett tvärsnitt av staven då ett vridande moment M_v appliceras. Elasticitetsmoduler och Poissons tal är enligt figuren.

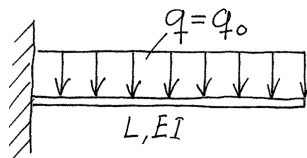


Böjning

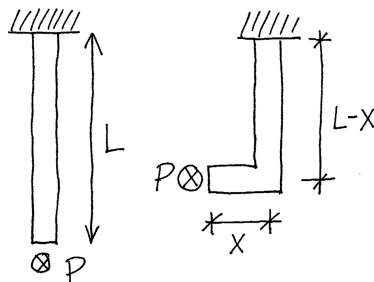
7.1 Beräkna nedböjningen under kraften.



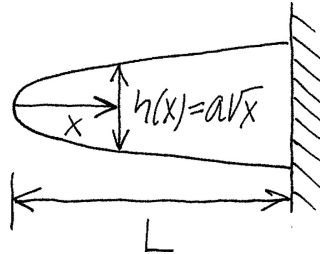
7.2 Beräkna nedböjningen $\delta(x)$ med hjälp av elastiska linjens ekvation.



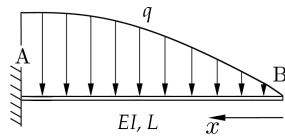
7.3 En konsolbalk med längden L är belastad med en tyngd P i ytterändan enligt vänstra figuren, som visar anordningen ovanifrån. Man vill, av utrymmesskäl flytta tyngden åt sidan, men önskar bibehålla samma nedböjning vid P . Kan detta åstadkommas genom att man sågar av balken och svetsar ihop de båda delarna i rätt vinkel som visas i den högra figuren, och i så fall, var skall man såga av balken (ange x)? Balkens tvärsnitt är cirkulärt. Poissons tal är ν .



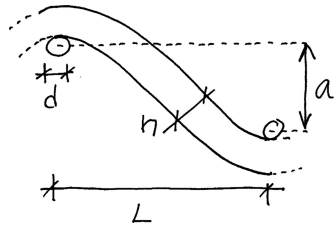
7.4 En rak konsolbalk har konstant bredd b och variabel höjd $h(x) = a\sqrt{x}$. Balken är utförd av ett material med tätheten ρ och elasticitetsmodulen E . Beräkna nedböjningen vid $x = 0$ under inverkan av balkens egen tyngd.



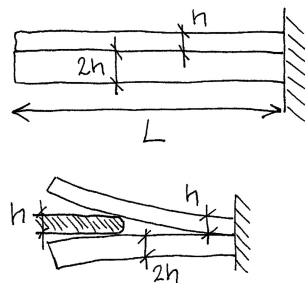
7.5 Beräkna nedböjningen $\delta(x)$ med hjälp av elastiska linjens ekvation för en konsolbalk enligt figuren. En utbredd last $q(x) = q_0 \sin(\pi x/2L)$ belastar balken, som har längden L och böjstyvheten EI .



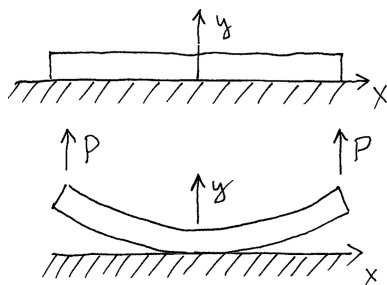
7.6 Ett band av fjäderstål träs mellan rullar med diametern d som är placerade så som figuren visar. $L = 20$ cm, $a = 10$ mm, $d = 2$ mm. För vilka värden på tjockleken h överskrids inte sträckgränsen $\sigma_s = 960$ N/mm²? $E = 2 \cdot 10^5$ N/mm².



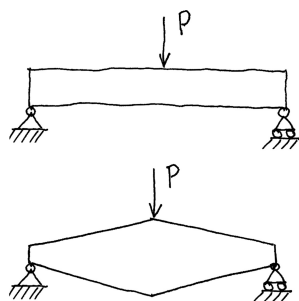
7.7 Två konsolbalkar med samma bredd men olika höjder (h och $2h$) är lagda på varandra enligt figuren. Hur långt kan man driva in en kil (höjd h , längd l) utan att plasticering uppstår någonstans? Balkarna är av samma material och tål böj- påkänningen σ_b utan att plasticeras. Spec: $L = 1$ m, $l = 10$ cm, $h = 40$ mm, $E = 2 \cdot 10^5$ N/mm², $\sigma_b = 300$ N/mm²



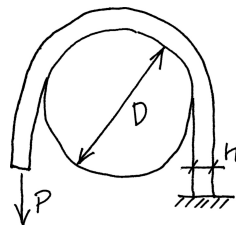
7.8 En rak balk med konstant tvärsnitt ligger på ett horisontellt och stelt underlag. Man lyfter balken med en vertikal kraft P i vardera änden. Balkens tyngd är Q . I vilket intervall ligger P då balkens kontakt med underlaget är reducerad till en linje ($x = 0$)? Beskriv vad som händer med balkens krökning vid $x = 0$ i intervallet för P ?



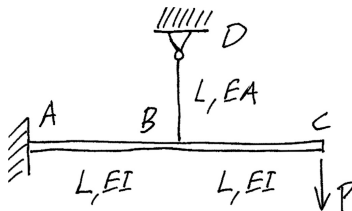
7.9 En balk med konstant rektangulär sektion är upplagd på två stöd och belastad enligt övre figuren. Man vill minska största påkänningen i balken genom att utföra den enligt den undre figuren, dvs med linjärt varierande höjd, men oförändrad bredd och oförändrad volym. I vilken proportion kan största påkänningen minskas genom en sådan åtgärd? Bortse från balkens eget tyngd.



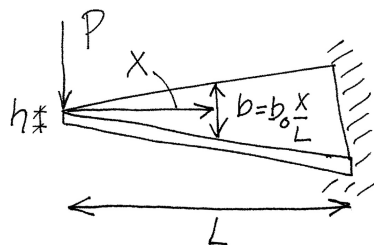
7.10 En vikt med tyngden $P = 16000$ N hänger i ett bandstål med bredden 40 mm. Bandstålet, som är lagt över en skiva med 2 m diameter (se fig.), har elasticitetsmodulen 200000 N/mm^2 och sträckgränsen 600 N/mm^2 . För vilka tjocklekar på bandstålet ligger maximipåkänningen under sträckgränsen?



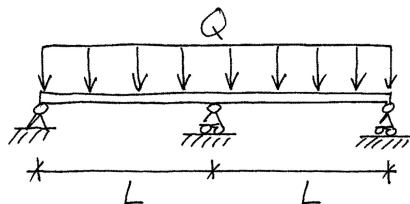
7.11 En tråd BD är spänd mellan ett fundament och mittpunkten på en konsolbalk ABC. Bestäm nedböjningen vid B då kraften P påläggs enligt figuren.



7.12 En konsolbalk med varierande böjstyvhet är belastad av en kraft så som figuren visar. Balkens tvärsnitt är rektangulärt med konstant höjd h och linjärt varierande bredd $b(x) = b_0 x/L$. Balkens längd är L . Bestäm nedböjningen vid kraften. Materialet har elasticitetsmodulen E .



7.13 En balk med längden $2L$ är upplagd på tre stöd enligt figur. Balken är belastad med en jämnt utbredd belastning Q . Rita diagram som visar moment och tvärkraft.



7 Svar till övningar

Till några uppgifter finns anvisningar, här och i kapitlet för anvisningar

Deformation

1.1 a) $\epsilon = 1.7 \times 10^{-4}$, b) $\delta_{max} = 0.24\text{mm}$, c) $\delta = \sqrt{L_o^2 + \sqrt{3}xL_o + x^2}$,
 d) Maclaurinutv. $\epsilon_{AB'} \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{x}{L_o} \approx 0.00216506$, och exakt $\epsilon_{AB'} \approx \sqrt{1 + \sqrt{3}x/L_o + x^2/L_o^2} \approx 0.00216584$. Relativa felet är 0.04%

1.2 $\epsilon = \sqrt{1 + 2\frac{\Delta}{L_o} \cos \alpha_o + \left(\frac{\Delta}{L_o}\right)^2} - 1$,
 $\alpha_o = \pi/2$, $\epsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta}{L_o}\right)^2} - 1$
 $\Delta \ll L_o$, $\epsilon = \frac{\Delta}{L_o} \cos \alpha_o$

1.3 $\delta_v = L\left(\frac{\epsilon_b}{\sin \alpha \cos \alpha} - \epsilon_a \cot \alpha\right)$, $\delta_h = \epsilon_b L$

1.4 $\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{AB} = \sqrt{1 + 2\frac{\delta}{L_o} \sin \alpha_o + \left(\frac{\delta}{L_o}\right)^2} - 1 \\ \epsilon_{BC} = \sqrt{1 - 2\frac{\delta}{L_o} \sin \alpha_o + \left(\frac{\delta}{L_o}\right)^2} - 1 \end{array} \right.$
 $\alpha_o = \pi/2$, $\epsilon_{AB} = \frac{\delta}{L_o}$, $\epsilon_{BC} = -\frac{\delta}{L_o}$
 $\delta \ll L_o$, $\epsilon_{AB} = \frac{\delta}{L_o} \sin \alpha_o$, $\epsilon_{BC} = -\frac{\delta}{L_o} \sin \alpha_o$

1.5 För små deformationer ($\delta \ll L_o$) blir medeltöjningen i andra ordningens approximation: $\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \epsilon_i = \frac{\Delta^2}{4L^2}$

Töjning

2.1 a) se FS, b) $\epsilon_x = 1.5 \times 10^{-5}$, $\epsilon_y = 0$, $\gamma_{xy} = -4.5 \times 10^{-5}$, c)
 $\epsilon_{max} \approx 0.114$, $\epsilon_{min} \approx -0.086$, $\epsilon_x \approx \epsilon_y \approx 0$, $\gamma_{xy} \approx \frac{5}{25} = 0.2$, d)
 $\epsilon_{max} = 0.1 \times 10^{-5}$, $\epsilon_{min} = -0.1 \times 10^{-5}$, e) $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \pm 1$ dvs. vinkeln är $\pm 45^\circ$.

2.2 $\tan 2\phi = \frac{\gamma}{\epsilon_y - \epsilon_x}$

2.3 $a = \frac{c}{2} = \frac{\alpha}{2}$, $a + b = \frac{\beta}{2}$ och $b = 1$

2.4 $\Phi = 54.2^\circ$ med riktning enligt figuren

2.5 $\epsilon_1 = -0.0004$, $\epsilon_2 = 0.0004$ och $\Phi = 60^\circ$ medurs och 30° moturs.

2.6 Ljusstrålen vrids $3 \cdot 10^{-4}$ rad $= 0.017^\circ$

2.7 Axelkorset läggs så att det bildar 40.5° mot AB. Vinkeln vrids i riktning från B mot C.

2.8 Huvudtöjningarna förhåller sig som $-1/3$ (alt. -3). Vidare erhålls att den största skjuvningen γ är lika med 4 (alt. $4/3$) ggr absolutvärdet av minsta huvudtöjningen.

2.9 $90^\circ -$ värdet

2.10 Ändringen av rymddiagonalens längd är av storleksordningen δ^2/a dvs i de flesta sammanhang försumbar.

Spänning

3.1 c) $\sigma = g\rho(L - x)$

3.2 a) $\sigma_1 = 215.4$ N/mm², $\sigma_2 = 44.5$ N/mm², $\sigma_3 = 0$ N/mm², b) 34.7° och -55.3° , c) 85.4 N/mm² d) 196.9 N/mm² resp. 215.4 N/mm²

3.3 a) $\sigma_1 = -120 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_2 = 80 \text{ N/mm}^2$, b) $\varphi = 18.4^\circ$ moturs, 71.6° medurs, c) 100 N/mm^2 d) Deviationshypotesen ger 174 N/mm^2 och skjuvspänningshypotesen ger 200 N/mm^2

3.4 (A) Teckna var för sig de tre lastsystemens verkan i två icke-parallella riktningar. Superponera.

Svar: Man får homogen, radiell dragningsfördelning.

$$3.5 \sigma_{1,2} = \frac{P_2}{\sqrt{2}}(3 \pm \sqrt{5})$$

3.6 (A) Använd Mohrs cirkel.

Svar: Ja, $\Delta\phi = 18.4^\circ$, $\tau_{\xi\eta} = 50 \text{ N/mm}^2$

$$3.7 \pm 60^\circ$$

$$3.8 D(x) = D_o \exp\left(\frac{\pi \rho D_o^2}{8M} x\right)$$

Elasticitet. Enaxliga tillstånd

$$4.1 \text{ a) } \delta = \frac{GL}{2EA}, \text{ b) } \delta = \frac{3GL}{2EA}$$

$$4.2 \delta = \frac{2}{3} \frac{\rho \omega^2 L^3}{E}$$

4.3 Förlängning 377 m, största spänning 283 MPa erhålls vid $x = 0$.

4.4 Konstant tvärsnitt ger en vevstång. Kvoten mellan styvhetererna är $\frac{8}{9}$.

4.5 (A) Då deformationsvillkoret uppställs kan man anse att de bägge

icke-vertikala stängerna förblir parallella med sina respektive utgångsriktningar.

$$\text{Svar: } S_1 = \frac{P}{5}, S_2 = \frac{4P}{5}$$

$$4.6 \quad P = \sigma_o A \left(1 + \frac{L_2}{L_1}\right)$$

4.7 (A) Antag att linornas undre föreningspunkt förskjuts ett stycke δ nedåt. I och med att alla töjningar kan uttryckas i δ får man lätt en kraftekvation som ger totalkraften.

Svar: $\sigma = 126 \text{ N/mm}^2$ (längsta), $\sigma = 326 \text{ N/mm}^2$ (mellersta) och $\sigma = 526 \text{ N/mm}^2$ (kortaste)

$$4.8 \quad S_1 = \frac{P}{6}, S_2 = \frac{P}{3} \text{ och } S_3 = \frac{P}{2}$$

4.9 a) $\gamma_{xy} = 6 \cdot 10^{-4}$, b) $\epsilon_1 = 1.84 \cdot 10^{-4}$, $\epsilon_2 = 8.16 \cdot 10^{-4}$, c) γ_{max} i planet $= 6.3210^{-4}$, d) $\sigma_1 = 103 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_2 = 197 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_3 = 0 \text{ N/mm}^2$ (ty plant spänningstillstånd), $\phi = 35.8^\circ$ som vridning från x -axeln mot y -axeln, e) τ_{max} i punkten $= 98.5 \text{ N/mm}^2$

4.10 (A) OBS. plant deformationstillstånd.

Svar: $\sigma_1 = 468 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_2 = 686 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_3 = 346 \text{ N/mm}^2$. Enligt skjuvspänningshypotesen $\sigma_{e,s} = 340 \text{ N/mm}^2$ och enligt deviationsarbetshypotesen $\sigma_{e,d} = 298 \text{ N/mm}^2$

$$4.11 \quad \sigma_1 = -70 \text{ N/mm}^2, \sigma_2 = 160 \text{ N/mm}^2, \sigma_3 = 0 \text{ N/mm}^2$$

$$4.12 \quad S_1 = 0.140P, S_2 = 0.387P, S_3 = 0.473P$$

4.13 Nya mätningar måste göras. Felet kan vara 6 och 4 % fel för ϵ_1 resp. ϵ_2

Viskoelasticitet. Enaxliga tillstånd

5.1 $\epsilon_{\infty} = 0.0031$

5.2 35%

5.3 23 min

5.4 0.32 s

5.5 198 kN

5.6 $\ddot{\epsilon} + \frac{E}{\eta_1} \dot{\epsilon} = \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right) \dot{\sigma} + \frac{E}{\eta_1 \eta_2} \sigma,$

5.7 $\sigma_{max} = 28 \text{ N/mm}^2$ vid $t = 20 \text{ s}$

5.8 $\epsilon_{2\tau} = 2.58 \cdot 10^{-3}$

Vridning

6.1 $\phi = \frac{M_v L}{GK}$ där K antar värdena: a) $2\pi r^3 h$, b) $\frac{2\pi}{3} r h^3$

6.2 735 cm^4

6.3 $\varphi = 2.48 \frac{ML}{\pi G R^4}$

6.4 $\phi = \tau_{max} \frac{2}{3} \left(1 + \frac{65}{81} \right) \frac{L}{Gd}$ vilket med insatta värden ger $\phi \approx 0.03 \text{ rad}$
 $\approx 1.72^\circ$

6.5 $\frac{5}{27} \frac{M_v L}{G \pi a^3 h}$

6.6 Maximal förvridning: $\frac{1}{36}$ rad $\approx 1.6^\circ$

6.7 $\tau_1 = \frac{G_1 M_v}{G_1 K_1 + G_2 K_2} r$, $\tau_2 = \frac{G_2 M_v}{G_1 K_1 + G_2 K_2} r$, där τ_1 gäller i $0 \leq r \leq R_1$ och τ_2 gäller i $R_1 < r \leq R_2$

Böjning

7.1 $\frac{PL^3}{3EI}$

7.2 $\delta(x) = -w(x) = \frac{q_o L^4}{EI} \left[\frac{1}{24} \left(\frac{x}{L} \right)^4 - \frac{1}{6} \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \frac{1}{4} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$

7.3 $x = \frac{L}{1+\nu}$

7.4 $\delta = \frac{16g\rho L^3}{15Ea^2}$

7.5 $\delta = -w(x) = \frac{q_o L^4}{EI} \left\{ \left(\frac{2}{\pi} \right)^4 (\sin(\pi x/2L) - 1) + \frac{1}{3\pi} (2 + \left(\frac{x}{L} \right)^3) - \frac{x}{\pi} \right\}$.

7.6 (A) Välj ut ett lämpligt stycke (längd $L/2$) och räkna på detta som en balk enligt exempel 7.1.

Svar: Om $h < 4$ mm

7.7 70 mm

7.8 $\frac{Q}{4} \leq P < \frac{Q}{2}$

7.9 Största påkänningen reduceras till hälften

7.10 (A) Spänningen beror bl.a. på att bandet böjs runt cylindern.

Svar: $3 - \sqrt{5} < h < 3 + \sqrt{5}$ mm, $0.8 \leq h \leq 5.2$ mm

$$7.11 \quad \delta = \frac{5PL^3}{3EI} \frac{1}{1+AL^2/3I}$$

$$7.12 \quad \delta = \frac{6PL^3}{Eb_o h^3}$$

$$7.13 \quad M(x) = \frac{Q}{16L} x(4x - 3L) \text{ i intervallet } 0 \leq x \leq L$$